Физика

УДК 531.51:531.18:530.12

Поле массивной плоскости в гравистатике Бриллюэна

Н. А. Ахраменко, Л. М. Булавко

Получены соотношения, определяющие напряженность статического гравитационного поля массивной плоскости в релятивистской гравистатике Бриллюэна. Показано, что напряженность поля для этого случая существенно отличается от ньютоновского поля тяготения.
Ключевые слова: напряженность гравитационного поля, тяготение, массивная плоскость.

There are obtained the relations determining the intensity of static gravitational field of massive plane in the Brillouin relativistic gravitstatics. It is shown that the intensity of the field in this case considerably differs from newtonian field of gravitation.
Keywords: intensity of gravitational field, gravitation, massive plane.

Напряженность $\mathbf{g}$ статического поля тяготения или ускорение свободного падения, создаваемого неподвижной пылевидной материей с распределенной в пространстве некоторой объемной плотностью массы μ, удовлетворяет уравнениям релятивистской гравистатики [1; 2]:

$$\nabla\mathbf{g} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{g}^2 = -4\pi G\mu , \tag{1}$$

$$\nabla\times\mathbf{g} = 0 , \tag{2}$$

где c – скорость света в вакууме, G – гравитационная постоянная.

Соотношения (1) и (2) являются обобщением уравнений теории статического гравитационного поля Ньютона.

В [1] на основании соотношений (1) и (2) получены выражения для статического гравитационного поля плоскопараллельного слоя толщиной $2l$ с объемной плотностью свободной массы μ. Логарифмический потенциал поля и его напряженность зависят от координаты z (ось OZ перпендикулярна плоскопараллельному слою) и имеют вид:

$$U(z)=\begin{cases} U_0\left(\operatorname{ch}(Kl)-(z+l)K\operatorname{sh}(Kl)\right), & z\le -l,\\ U_0\operatorname{ch}(Kz), & -l\le z\le l,\\ U_0\left(\operatorname{ch}(Kl)+(z-l)K\operatorname{sh}(Kl)\right), & z\ge l\,; \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathbf{g}(z)=\begin{cases} \dfrac{2c^2K\,\mathbf{th}(Kl)}{1-(z+l)K\,\mathbf{th}(Kl)}\cdot\mathbf{q}, & z\le -l,\\ -2c^2K\,\mathbf{th}(Kz)\cdot\mathbf{q}, & -l\le z\le l,\\ \dfrac{-2c^2K\,\mathbf{th}(Kl)}{1+(z-l)K\,\mathbf{th}(Kl)}\cdot\mathbf{q}, & z\ge l. \end{cases} \tag{4}$$

где $K=\dfrac{\sqrt{2\pi G\mu}}{c}$, $\mathbf{q}$ – единичный вектор нормали к поверхности слоя, параллельный оси z.

Статическое гравитационное поле плоскости определим как предельный случай поля плоскопараллельного слоя толщиной $2l$ при стремлении толщины слоя к нулю. При стремлении толщины слоя к нулю объемная плотность массы μ устремляется к бесконечности, и масса оказывается сосредоточенной на поверхности с поверхностной плотностью σ. Объемная плотность массы μ и поверхностная плотность массы σ при стремлении толщины слоя к нулю могут быть связаны соотношением $\mu = \dfrac{\sigma}{2l}$.

Подставим параметр K и объемную плотность массы μ в выражения (3) и с учетом стремления толщины слоя к нулю найдем логарифмический потенциал поля, а затем – его напряженность.

Для логарифмического потенциала поля получим:

$$U(z) = \begin{cases} \lim\limits_{l \to 0} \left\{ U_0 \left(\mathbf{ch} \dfrac{\sqrt{\pi G \sigma l}}{c} - (z + l) \dfrac{\sqrt{\pi G \sigma}}{c\sqrt{l}} \mathbf{sh} \dfrac{\sqrt{\pi G \sigma l}}{c} \right) \right\}, & z < 0, \\ U_0, & z = 0, \\ \lim\limits_{l \to 0} \left\{ U_0 \left(\mathbf{ch} \dfrac{\sqrt{\pi G \sigma l}}{c} + (z - l) \dfrac{\sqrt{\pi G \sigma}}{c\sqrt{l}} \mathbf{sh} \dfrac{\sqrt{\pi G \sigma l}}{c} \right) \right\}, & z > 0. \end{cases}$$

Вычислив пределы, получим:

$$U(z) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \dfrac{\pi G \sigma}{c^2} z \right), & z < 0, \\ U_0, & z = 0, \\ U_0 \left(1 + \dfrac{\pi G \sigma}{c^2} z \right), & z > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Из (5) найдем производные $\dfrac{d\,\mathrm{U}(z)}{dz}$:

$$\frac{\mathrm{dU(z)}}{\mathrm{dz}} = \begin{cases} -\mathrm{U_0} \dfrac{\pi \mathrm{G} \sigma}{\mathrm{c}^2}, & \mathrm{z} < 0, \\ \mathrm{U_0} \dfrac{\pi \mathrm{G} \sigma}{\mathrm{c}^2}, & \mathrm{z} > 0. \end{cases}$$

Определим далее напряженность гравитационного поля, используя его связь с логарифмическим потенциалом [1]:

$$\mathbf{g}(z) = -2\,\mathrm{c}^2 \frac{1}{\mathrm{U}(z)} \frac{d\,\mathrm{U}(z)}{dz} \cdot \mathbf{q}.$$

Значения напряженности для самой плоскости и по обе стороны от нее будут равны:

$$\mathrm{g}(z) = \begin{cases} \dfrac{2\pi G\sigma}{1 - \dfrac{\pi G\sigma}{c^2} z} \mathrm{q}, & z < 0, \\ 0, & z = 0, \\ -\dfrac{2\pi G\sigma}{1 + \dfrac{\pi G\sigma}{c^2} z} \mathrm{q}, & z > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

В выражении (6) для точек, расположенных на плоскости, напряженность поля принята равной нулю из соображений симметрии.

Из выражения (6) следует, что для точек, бесконечно удаленных от плоскости, напряженность поля равна нулю. График величины напряженности гравитационного поля от координаты z представлен двумя сплошными кривыми на рисунке 1. График имеет разрыв при $z = 0$ и включает обособленную точку в начале координат.

Из анализа соотношений (4) поля плоскопараллельного слоя можно сделать вывод, что для точек, бесконечно удаленных от плоскопараллельного слоя, напряженность поля также равна нулю. График величины напряженности гравитационного поля от координаты z плоскопараллельного слоя согласно выражению (4) представлен на рисунке 2.

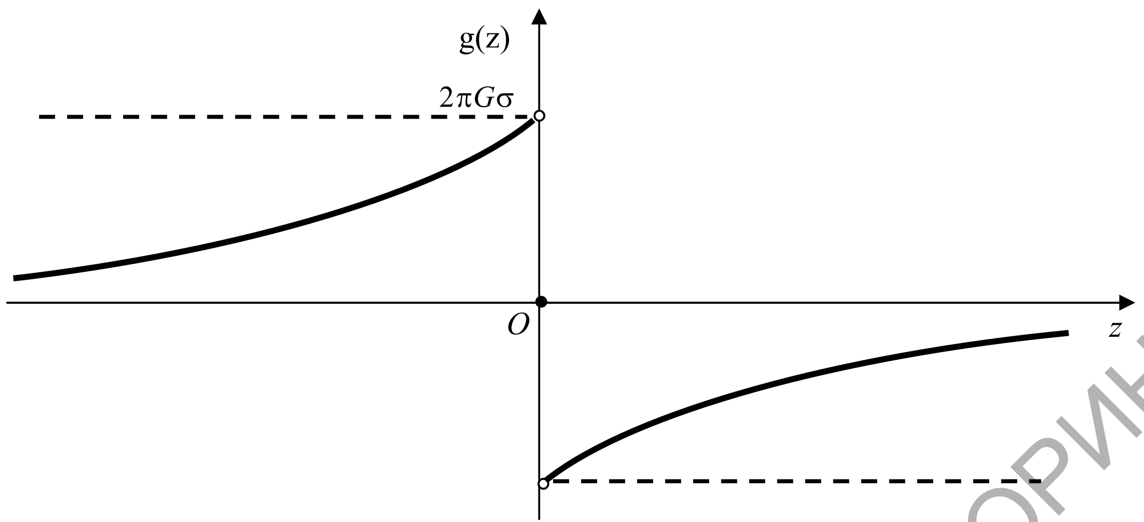

Рисунок 1

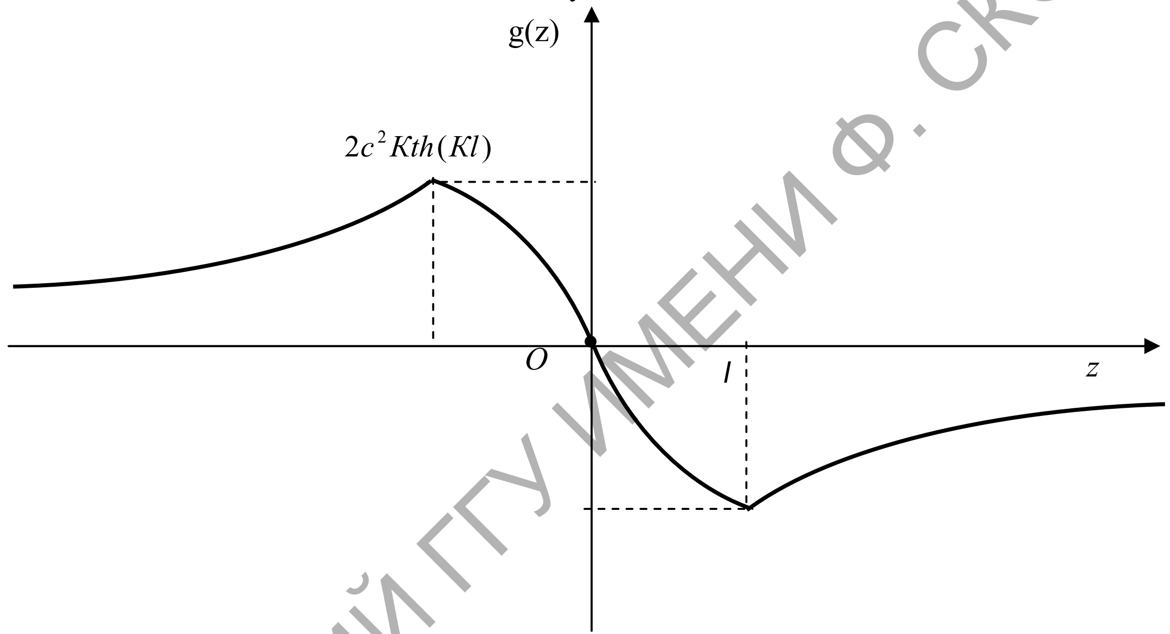

Рисунок 2

Максимум соответствует точкам, находящимся на поверхности плоскопараллельного слоя. По мере удаления от плоскопараллельного слоя величина напряженности монотонно стремится к нулю.

На небольших расстояниях от плоскости, когда z близко к нулю, из (6) получаем формулу:

$$\mathbf{g}(z) = \begin{cases} 2\pi G\sigma \cdot \mathbf{q}, & z < 0, \\ 0, & z = 0, \\ -2\pi G\sigma \cdot \mathbf{q}, & z > 0. \end{cases}$$

Из теории тяготения Ньютона следует, что поле однородной плоскости с поверхностной плотностью массы σ для всех точек пространства вне плоскости однородно и равно:

$$\mathbf{g}(z) = \begin{cases} 2\pi G\sigma \cdot \mathbf{q}, & z < 0, \\ -2\pi G\sigma \cdot \mathbf{q}, & z > 0. \end{cases}$$

В этом легко убедится, так как это поле является аналогом напряженности электрического поля равномерно заряженной плоскости в электростатике, величина которой

$$E = \frac{\sigma^э}{2\varepsilon_0},$$

где $\sigma^э$ – поверхностная плотность заряда, ε_0 – электрическая постоянная.

Сравнив формы записей закона Кулона и закона всемирного тяготения для величины силы

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

можно установить соответствие между коэффициентами:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G; \ \Rightarrow \ \frac{1}{2\varepsilon_0} \to -2\pi G.$$

Тогда, заменив E на g, $\sigma^{э}$ на σ, а также коэффициенты, получим величину напряженности (для полупространства, где координата является положительной):

$$g = -2\pi G\sigma.$$

График величины напряженности гравитационного поля от координаты z для ньютоновского поля тяготения представлен на рисунке 1 двумя прямыми пунктирными линиями. График имеет разрыв также при $z = 0$ и включает обособленную точку в начале координат (напряженность поля на самой плоскости принимаем равной нулю).

Таким образом, напряженность гравитационного поля массивной плоскости в релятивистской гравистатике Бриллюэна существенно отличается от значений ньютоновского поля тяготения. В частности, частица, удаленная от плоскости, движущаяся в направлении от нее с некоторой скоростью, испытывает бóльшую тормозящую силу в ньютоновском поле тяготения, чем в гравистатике Бриллюэна. Этот эффект эквивалентен появлению у частицы ”ускоряющей силы” по сравнению с ньютоновским полем тяготения.

Литература

1 Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель, изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.

2 Бриллюэн, Л. Новый взгляд на теорию относительности / Л. Брюллюэн. – М.: Мир, 1972.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 08.11.11