

Исследование особенностей распределения полей напряжений в многослойных покрытиях

В.В. МОЖАРОВСКИЙ, Н.А. МАРЬИНА

В работе представлены результаты численного и аналитического решения задач о напряженно-деформированном состоянии, распределении напряжений в композиционной среде. В качестве объекта исследования рассматривалась плоская слоистая композиционная среда. Определялось влияние физических и механических свойств материалов слоистых тел на напряженное состояние
Ключевые слова: покрытие, напряжения, ортотропия, слоистые тела

The results of numerical and analytical solutions of problems of the stress-strain state and the distribution of stresses in the composite environment are presented. Flat layered composite media, such as strips, were considered as the object of study. We determined the influence of the physical and mechanical properties of materials of layered bodies on the state of stress
Key words: strip, stress, orthotropy, layered body.

Введение. Многослойные покрытия, характеризуются, как правило, периодически повторяющимися слоями из двух и более материалов. Толщина некоторых слоев может достаточно малой, но несмотря на это их влияние на триботехнические свойства материалов достаточно велико. Такие покрытия оказываются значительно тверже и прочнее, чем однородные покрытия из тех же материалов. Гетерогенные многослойные покрытия улучшают несущую способность, обеспечивая плавные изменения механических свойств от твердого покрытия к более мягкой и гибкой подложке. Контактная нагрузка в слоистых телах сопряжения распределяется в большей области и тем самым снижается концентрация предельных напряжений. Следует также отметить, что покрытия триботехнического назначения прежде всего должны обеспечивать высокую износостойкость и стабильное фрикционное поведение материалов. Для выполнения этих требований необходимы высокая адгезия между покрытием и подложкой и хорошая несущая способность, т.е. способность материала сопротивляться нагрузке без пластических деформаций, растрескивания и расслаивания покрытий.

Основные подходы к расчету. В работе представлены результаты численного и аналитического решения задач о напряженно-деформированном состоянии, распределении напряжений в композиционной среде. В качестве объекта исследования рассматривались плоская композиционная среда и слоистая композиционная среда. Определялось влияние физических и механических свойств материалов слоистых тел на напряженное состояние (рисунок 1).

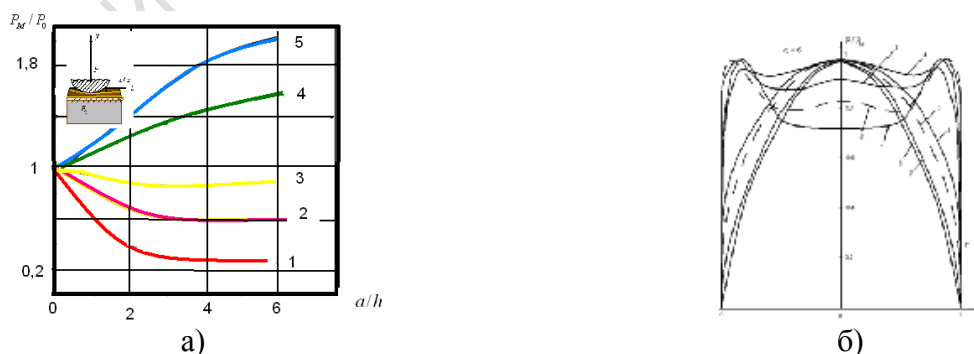
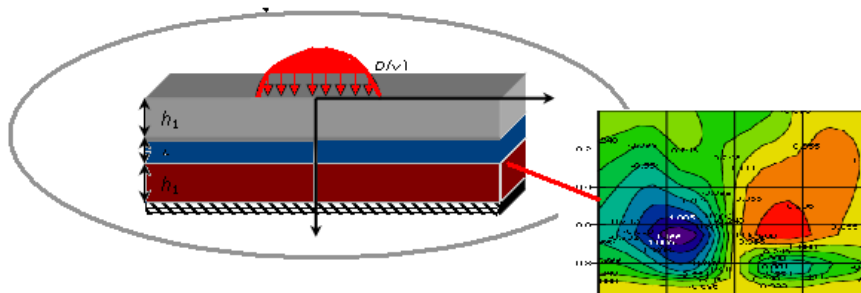


Рисунок 1 – а) ((ГПа) $E_1 = 52,7$; $E_2 = 11,9$; $G_{12} = 5,62$; $\nu_{12} = 0,25$) 1: $\frac{E_2}{E} = 16$; 2: 2,5; 3 – 1; 4 – 0,2; 5 – 0,05. б) примеры эпюры давления [1].

Изменение относительного давления P_M / P_0 (отношение максимального давления к герцевскому) от a/h (отношение полуширины зоны контакта к толщине слоя) при вдавлении цилиндрического индентора в ортотропное покрытие

контактная сила P задана) при вдавливании цилиндрического индентора в ортотропное покрытие. Характер распределения напряжений в зоне контакта ортотропных тел (при вдавливании жесткого индентора в ортотропную полуплоскость) существенно отличается от распределения при контакте изотропных тел.

Определялись изменения профилей давления при вдавливании цилиндрического штампа в покрытие на упругом основании в зависимости от модуля упругости E (рисунок 1). Просчитана зависимость и получены результаты изменения напряжений σ_y , σ_x , τ_{xy} по глубине от поверхности контакта, для различных тел (в зависимости от физических постоянных материала). Для качественного сравнения результатов приведены также данные для изотропного случая; оценено влияние свойств анизотропии на распределение напряжений). В работе представлены расчеты распределения напряжений в трехслойном покрытии в зависимости от физических и геометрических параметров отдельных слоев (рисунок 2).



распределения максимальных напряжений в трехслойной системе

Рисунок 2 – Схема действия нагрузки на слоистую систему

Таким образом, рассматривается слоистое композиционное покрытие, на верхней границе которого действует нагрузка, оказываемая некоторым штампом. Давление под штампом предполагается заданным законом $p(x)$. Схема действия нагрузки и распределения напряжений в трехслойной системе представлена по следующему алгоритму:

Рассматриваются условия жесткого адгезионно закрепленных слоев составного покрытия.

Граничные условия при действии нормальной нагрузки $p(x)$ имеют вид:

- 1 нагрузка на верхней границе покрытия $\sigma_{y(1)}|_{(y=0)} = -p(x)$ при $|x| \leq a$,
- 2 отсутствие трения на поверхности $\tau_{xy(1)}|_{(y=0)} = 0$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 3 $\sigma_{y(1)}|_{(y=h_1)} = \sigma_{y(2)}|_{(y=h_1)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 4 $\tau_{xy(1)}|_{(y=h_1)} = \tau_{xy(2)}|_{(y=h_1)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 5 $\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x}|_{(y=h_1)} = \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x}|_{(y=h_1)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 6 $\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x}|_{(y=h_1)} = \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x}|_{(y=h_1)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 7 $\sigma_{y(2)}|_{(y=h_1+h_2)} = \sigma_{y(3)}|_{(y=h_1+h_2)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 8 $\tau_{xy(2)}|_{(y=h_1+h_2)} = \tau_{xy(3)}|_{(y=h_1+h_2)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 9 $\frac{\partial u_{(2)}}{\partial x}|_{(y=h_1+h_2)} = \frac{\partial u_{(3)}}{\partial x}|_{(y=h_1+h_2)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 10 $\frac{\partial v_{(2)}}{\partial x}|_{(y=h_1+h_2)} = \frac{\partial v_{(3)}}{\partial x}|_{(y=h_1+h_2)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 11 $\sigma_{y(3)}|_{(y=h_1+h_2+h_3)} = \sigma_{y(4)}|_{(y=h_1+h_2+h_3)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 12 $\tau_{xy(3)}|_{(y=h_1+h_2+h_3)} = \tau_{xy(4)}|_{(y=h_1+h_2+h_3)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,
- 13 $\frac{\partial u_{(3)}}{\partial x}|_{(y=h_1+h_2+h_3)} = \frac{\partial u_{(4)}}{\partial x}|_{(y=h_1+h_2+h_3)}$ при $-\infty \leq x \leq \infty$,

$$\frac{\partial v_{(3)}}{\partial x} \Big|_{(y=h_1+h_2+h_3)} = \frac{\partial v_{(4)}}{\partial x} \Big|_{(y=h_1+h_2+h_3)} \text{ при } -\infty \leq x \leq \infty,$$

где τ , σ – компоненты напряжений, связанные уравнениями обобщенного закона Гука, u , v – компоненты перемещений слоев покрытия, a – полуширина площадки действия нагрузки на верхней границе покрытия, h_i – толщина слоев покрытия $i = 1 \dots 3$.

Моделирование действия нормальной нагрузки. Многие задачи теории упругости могут быть описаны с помощью допущений Г. Герца: в том случае, когда область контакта мала по сравнению с размерами контактирующих тел и если она далеко удалена от других поверхностей, то контактирующие тела можно аппроксимировать полуплоскостями и полупространствами. Предполагается, что протяженность контактирующих тел в направлении оси z является достаточно большой по сравнению с шириной полосы нагружения $[-a, a]$ и $\varepsilon_z = 0$, что представляет собой случай плоской деформации. Математическая модель граничных задач для слоистой системы строится в напряжениях, и рассматривается ортотропный случай анизотропии промежуточного слоя.

При отсутствии массовых сил для плоских задач механики анизотропного тела напряжения можно выразить через функцию напряжений Эри:

$$\sigma_{x(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_{(i)}}{\partial y^2}; \quad \sigma_{y(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_{(i)}}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy(i)} = -\frac{\partial^2 \Phi_{(i)}}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

где индексы $i = 1 \dots 3$ определяют отношение к соответствующему слою составного слоистого покрытия.

Функция напряжений Φ_2 для промежуточного анизотропного слоя должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$S_{11} \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial y^4} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial y^2 \partial x^2} + S_{22} \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial x^4} = 0. \quad (3)$$

Коэффициенты S_{ij} в уравнении (1) определяются по зависимостям обобщенного закона Гука, включающего в случае ортотропного материала $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ ($E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}$).

Для упругого изотропного слоя функция напряжений Эри Φ_i ($i = 1, 3$) должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \Phi_i}{\partial x^4} = 0. \quad (4)$$

Решения уравнений (2) и (3) для рассматриваемой слоистой системы при действии нормальных усилий представляем в виде

$$\Phi_1 = \int_0^\infty \left\{ (A_1 + \alpha y A_2) e^{\alpha y} + (A_3 + \alpha y A_4) e^{-\alpha y} \right\} \cdot \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha,$$

$$\Phi_3 = \int_0^\infty \left\{ (C_1 + \alpha y C_2) e^{\alpha y} + (C_3 + \alpha y C_4) e^{-\alpha y} \right\} \cdot \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha, \quad (5)$$

$$\Phi_4 = \int_0^\infty \left\{ D_1 + \alpha y D_2 \right\} e^{-\alpha y} \cdot \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha.$$

$$\Phi_2 = \int_0^\infty [B_1 ch(\alpha y) + B_2 sh(\alpha y) + y B_3 ch(\alpha y) + y B_4 sh(\alpha y)] \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha, \quad (6)$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2$ – коэффициенты, зависящие от α и определяемые из приведенных граничных условий, $\beta_i, i = 1, 2$ – действительные корни характеристического уравнения, полученного для решения (6). Значения β_1, β_2 определяются по следующим зависимостям:

Значения величин β_1, β_2 определяются следующим образом:

$$\beta_{1,2} = \left(\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{12}}}{2S_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

или
$$\beta_1^2 \beta_2^2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2S_{12} + S_{66}}{S_{22}}.$$

Зависимости для напряжений в трехслойной системе с учетом приведенных функций Эри имеют следующий вид:

– для слоев (I) и (III)

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \int_0^\infty \left\{ (A_1 + (\alpha y + 2)A_2)e^{\alpha y} + (A_3 + (\alpha y - 2)A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \sigma_y^{(1)} &= -\int_0^\infty \left\{ (A_1 + \alpha y A_2)e^{\alpha y} + (A_3 + \alpha y A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \tau_{xy}^{(1)} &= \int_0^\infty \left\{ (A_1 + (\alpha y + 1)A_2)e^{\alpha y} - (A_3 + (\alpha y - 1)A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \sin(\alpha x) d\alpha, \\ \sigma_x^{(3)} &= \int_0^\infty \left\{ (C_1 + (\alpha y + 2)C_2)e^{\alpha y} + (C_3 + (\alpha y - 2)C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha, \\ \sigma_y^{(3)} &= -\int_0^\infty \left\{ (C_1 + \alpha y C_2)e^{\alpha y} + (C_3 + \alpha y C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \tau_{xy}^{(3)} &= \int_0^\infty \left\{ (C_1 + (\alpha y + 1)C_2)e^{\alpha y} - (C_3 + (\alpha y - 1)C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \sin(\alpha x) d\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

– для средней анизотропной полосы ($i = 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= \int_0^\infty \left[\frac{B_1}{\beta_1^2} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2^2} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + \frac{B_1}{\beta_1^2} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2^2} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \sigma_y^{(2)} &= -\int_0^\infty \left[B_1 ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_2 ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + B_1 sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_2 sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \tau_{xy}^{(2)} &= \int_0^\infty \left[\frac{B_1}{\beta_1} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + \frac{B_1}{\beta_1} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \sin(\alpha x) d\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Для использования зависимостей между перемещениями на границе слоев, заданных в граничных условиях, могут использоваться следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} &= \int_0^\infty \left\{ (A_1 \delta + (\alpha y \delta + \rho)A_2)e^{\alpha y} + (A_3 \delta + (\alpha y \delta - \rho)A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} &= -\int_0^\infty \left\{ (A_1 \delta + (\alpha y \delta + \delta + \rho v)A_2)e^{\alpha y} + (A_3 \delta + (\alpha y \delta + \delta - \rho v)A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \frac{\partial u^{(3)}}{\partial x} &= \int_0^\infty \left\{ (C_1 \delta + (\alpha y \delta + \rho)C_2)e^{\alpha y} + (C_3 \delta + (\alpha y \delta - \rho)C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha, \\ \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x} &= -\int_0^\infty \left\{ (C_1 \delta + (\alpha y \delta + \delta + \rho v)C_2)e^{\alpha y} + (C_3 \delta + (\alpha y \delta + \delta - \rho v)C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta = \frac{1+\nu}{E}$, $\rho = \frac{2}{E}$ – в случае плосконапряженного состояния, $\delta = \frac{1+\nu}{E}$, $\rho = \frac{2(1-\nu^2)}{E}$

– в случае плоской деформации;

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \int_0^{\infty} \left[B_1 R_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_2 R_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + B_1 R_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_2 R_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = - \int_0^{\infty} \left[B_1 Q_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_2 Q_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + B_3 Q_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_4 Q_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \sin(\alpha x) d\alpha,$$

где $R_i = \frac{S_{11}}{\beta_i^2} - S_{12}$, $Q_i = \frac{S_{12}}{\beta_i} - S_{22}\beta_i$ $i = 1, 2$.

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния сводится к определению коэффициентов с учетом граничных условий, т.е. решения системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$M \times K = (\vec{p} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T. \quad (11)$$

M – матрица коэффициентов, составленная исходя из принятого вида функций Эри каждого из слоев рассматриваемой слоистой системы, правая часть уравнения формируется исходя из вида действующей внешней нагрузки согласно граничным условиям. В компьютерной программе расчета сделаны следующие обозначения:

K – вектор столбец неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2$ используемых для определения напряжений.

Таким образом, входными данными для выполнения расчетов является следующий набор параметров: $h_1, h_2, h_3, E(1), \nu(1), E_1(2), E_2(2), \nu_{12}(1), G_{12}(2), E(3), \nu(3)$.

В случае рассмотрения композиционного покрытия на жестком основании количество граничных условий уменьшится и последние условия на границе слоев примут вид:

$$\frac{du^{(3)}}{dx} \Big|_{(y = h_1 + h_2 + h_3)} = 0,$$

$$h_1 \text{ при } -\infty \leq x \leq \infty.$$

Зависимости для напряжений и перемещений в основании, в случае рассмотрения упругого основания примут вид, аналогичный (6), а именно:

$$\sigma_x^{(4)} = \int_0^{\infty} \{ (D_1 + (\alpha y - 2)D_2) e^{-\alpha y} \} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\sigma_y^{(4)} = - \int_0^{\infty} \{ (D_1 + \alpha y D_2) e^{-\alpha y} \} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\tau_{xy}^{(4)} = - \int_0^{\infty} \{ (D_1 + (\alpha y - 1)D_2) e^{-\alpha y} \} \cdot \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u^{(4)}}{\partial x} = \int_0^{\infty} \{ (D_1 \delta + (\alpha y \delta - \rho)D_2) e^{-\alpha y} \} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\frac{\partial v^{(4)}}{\partial x} = - \int_0^{\infty} \{ (D_1 \delta + (\alpha y \delta + \delta - \nu \rho)D_2) e^{-\alpha y} \} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha.$$

Моделирование действия касательной нагрузки. Касательные усилия действуют в области контакта $[-a, a]$ параллельно оси Ox , а нормальное давление p считается равным нулю. Для решения данной граничной задачи в функциях Эри в выражениях (5,6), следует заменить $\cos()$ на $\sin()$ и изменить два первых граничных условия, которые примут вид:

1) отсутствие нормальных усилий:

$$\sigma_{y(1)} \Big|_{(y=0)} = 0 \text{ при } -\infty \leq x \leq \infty;$$

2) действие касательных сил:

$$\tau_{xy(1)} \Big|_{(y=0)} = q(x) \text{ при } |x| \leq a.$$

(13)

Напряжения и перемещения в слоистой системе при действии только касательных усилий находим в виде

$$\sigma_x^{q(1)} = \int_0^{\infty} \left\{ (A_1 + (\alpha y + 2)A_2)e^{\alpha y} + (A_3 + (\alpha y - 2)A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \sin(\alpha x) d\alpha,$$

$$\sigma_y^{q(1)} = - \int_0^{\infty} \left\{ (A_1 + \alpha y A_2)e^{\alpha y} + (A_3 + \alpha y A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \sin(\alpha x) d\alpha,$$

$$\tau_{xy}^{q(1)} = - \int_0^{\infty} \left\{ (A_1 + (\alpha y + 1)A_2)e^{\alpha y} - (A_3 + (\alpha y - 1)A_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\sigma_x^{q(3)} = \int_0^{\infty} \left\{ (C_1 + (\alpha y + 2)C_2)e^{\alpha y} + (C_3 + (\alpha y - 2)C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha,$$

$$\sigma_y^{q(3)} = - \int_0^{\infty} \left\{ (C_1 + \alpha y C_2)e^{\alpha y} + (C_3 + \alpha y C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \sin(\alpha x) d\alpha,$$

$$\tau_{xy}^{q(3)} = - \int_0^{\infty} \left\{ (C_1 + (\alpha y + 1)C_2)e^{\alpha y} - (C_3 + (\alpha y - 1)C_4)e^{-\alpha y} \right\} \cdot \cos(\alpha x) d\alpha.$$

– для средней анизотропной полосы ($i = 2$)

$$\sigma_x^{q(2)} = \int_0^{\infty} \left[\frac{B_1}{\beta_1^2} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2^2} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + \frac{B_1}{\beta_1^2} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2^2} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \sin(\alpha x) d\alpha,$$

$$\sigma_y^{q(2)} = - \int_0^{\infty} \left[B_1 ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_2 ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + B_1 sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + B_2 sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \sin(\alpha x) d\alpha,$$

$$\tau_{xy}^{q(2)} = - \int_0^{\infty} \left[\frac{B_1}{\beta_1} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2} ch\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) + \frac{B_1}{\beta_1} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_1}\right) + \frac{B_2}{\beta_2} sh\left(\frac{\alpha y}{\beta_2}\right) \right] \cos(\alpha x) d\alpha.$$

Для определения коэффициентов используется матрица системы М, представленная выше, и учитываются граничные условия.

Представление внешней нагрузки интегралами Фурье. В соответствии с видом решений (5), (6) бигармонических дифференциальных уравнений (3) и (4) функции интенсивности распределения внешней нормальной $p(x)$ и касательной $q(x)$ нагрузок с помощью косинус и синус-преобразований Фурье представляются в интегральном виде следующим образом:

$$p(x) = \int_0^{\infty} \tilde{p}(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha; \quad q(x) = \int_0^{\infty} \tilde{q}(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha;$$

где \cos - и \sin – трансформанты Фурье определяются интегралами:

$$\tilde{p}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(x) \cos(\alpha x) dx; \quad \tilde{q}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q(x) \sin(\alpha x) dx;$$

Функции $p(x)$ и $q(x)$ должны быть отличными от нуля на отрезке $-a \leq x \leq a$ произвольной длины $2 \cdot a$ и равными нулю вне этого отрезка.

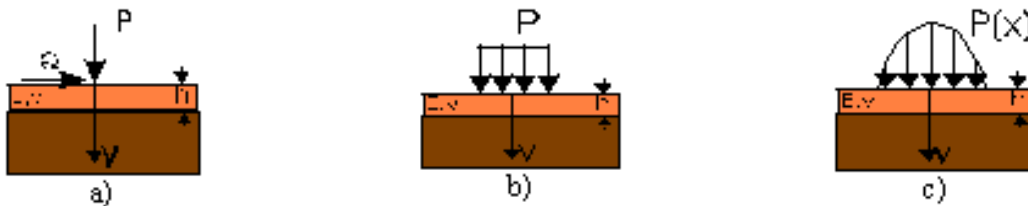


Рисунок 3 – Виды внешнего нагружения: сосредоточенная нагрузка (а), постоянно распределенная (б), параболический закон распределения давления (с)

Трансформанты Фурье для нагрузок, которые схематично показаны на рисунке 3., имеют следующий вид:

– при действии сосредоточенной силы $P\delta(x)$ (рисунок 2.5а) ($\delta(x)$ – дельта-функция) имеем

$$\tilde{p}(\alpha) = \frac{2P}{\pi} \int_0^{\infty} \delta(x) \cos(\alpha x) dx = \frac{2P}{\pi},$$

– при равномерно распределенной нормальной нагрузке (рисунок 2.б) имеем

$$p(x) = p_0 = \frac{P}{2a} = \text{const},$$

$$\tilde{p}(\alpha) = \frac{p}{\pi a} \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha},$$

– при параболическом законе распределения давления $p(x) = p_0(1 - \frac{x^2}{a^2})$, где $p_0 = \frac{3P}{4a}$ (рисунок 3.с) имеем:

$$\tilde{p}(\alpha) = \frac{3P}{(\alpha a)^3} [\sin(\alpha a) - \alpha a \cos(\alpha a)].$$

Определение напряженного состояния при произвольной функции нагружения.

Для случаев, когда интенсивность внешней нагрузки (нормальной или касательной) задается некоторой функцией, допускающей преобразование Фурье, решение граничной задачи изложено выше и, например, в[9]. Когда функция нагрузки имеет более сложный вид, например, задана дискретным законом (рисунок 3.б), применяется другой подход численного решения задачи. В этом случае напряженно-деформированное состояние определяется на основе решения граничной задачи для сосредоточенной нагрузки. Процедура расчета основывается на методе граничных элементов. Для этого поверхность контакта с распределенной нагрузкой разбивается на участки, в которых действует среднее постоянное давление P (рисунок 5)

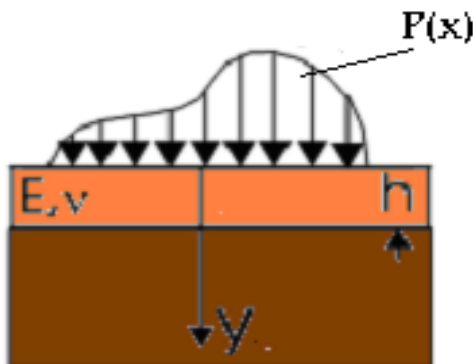


Рисунок – 4 Схема нагружения

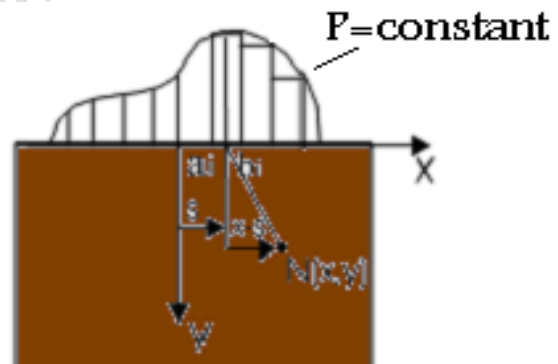


Рисунок 5 – Схема расчета внутренних напряжений

Используя зависимости, определяющие напряжения при действии сосредоточенных усилий $p(s)ds$ или $q(s)ds$, интегрируя их в пределах каждого участка, находим напряжение в произвольной точке $N(x, y)$ (рисунки 4 и 5). При действии нагрузки на одном из отрезков $[s_i - L, s_i + L]$ $i = 1..n$:

$$\sigma_x(x, y)_i = \int_{s_i - L}^{s_i + L} \sigma_x(x - s, y) p(s) ds$$

$$\sigma_y(x, y)_i = \int_{s_i - L}^{s_i + L} \sigma_y(x - s, y) p(s) ds ;$$

$$\tau_{xy}(x, y)_i = \int_{s_i - L}^{s_i + L} \tau_{xy}(x - s, y) p(s) ds ;$$

После процедуры интегрирования по i -му участку, определяются напряжения в некоторой точке, возникающие под действием нагрузки на всей области путем суммирования компонент напряжений, возникающих под действием нагрузок на каждом из отрезков $[a_i, b_i]$:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^n (\sigma_x)_i; \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^n (\sigma_y)_i; \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^n (\tau_{xy})_i.$$

Таким образом учитывается давление на каждом из участков с постоянной нагрузкой $[a_i, b_i]$ $a_i = x - s_i + L$, $b_i = x - s_i - L$, где s_i – серединная точка отрезка $[a_i, b_i]$, L – полуширина граничного элемента.

Результаты вычислений и анализ. По построенной математической модели напряжений в трехслойной системе проведем анализ общей картины напряжений в зависимости от геометрических параметров слоев. Недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии на напряженно-деформированное состояние покрытия при силовом и температурном воздействиях, что не позволяет обосновать практику их проектирования [1]–[8]. Решение этих и других задач весьма актуально как с позиции повышения достоверности результатов расчетного аппарата, так и с позиции конструирования покрытий повышенного срока службы.

Влияние анизотропии среднего слоя на НДС слоистого покрытия.

Таблица 1. – Физические характеристики волокнистых композиционных материалов, используемые при проведении расчетных экспериментов

Композиционный материал	Волокно			Матрица		
	модуль упругости ГПа	модуль сдвига ГПа	коэффициент Пуассона	модуль упругости ГПа	модуль сдвига ГПа	коэффициент Пуассона
Gr/Al	380	13.7	0.20	70	26	0.34
SS/Al	210	83	0.27	70	26	0.34
Al2O3/Al-Li	470	196	0.20	77	29	0.34
Epoxy glass	71	29.1	0.22	3.5	1.268	0.38

Рассмотрим также случай, когда средний слой трехслойного композиционного покрытия имеет анизотропное строение, например, волокнистую структуру. В этом случае изменение картины распределения напряжений в слоистом покрытии целесообразно исследовать при различных способах армирования, т.е. расположении волокон. Для исследования ограничимся тремя случаями армирования продольным, нормальным и поперечным. Следует отметить, что в данном случае толщина среднего слоя должна быть достаточной, чтобы проследить особенности при различном структурном строении среднего слоя. Это можно сделать, выделив данный слой отдельно, а действие соседних слоев заменить действующими силами с двух сторон. Далее приведем результаты, полученные при рассмотрении слоистой системы в комплексе.

В таблице 1 приведены физические характеристики для волокнистых композиционных материалов, используемые при проведении расчетных экспериментов.

Рассмотрим влияние способов ориентации волокон на особенности в распределении напряжений. На рисунках 6,7 представлены изолинии распределения напряжений в случае действия нормальной нагрузки, распределенной по параболическому закону при различных способах ориентации волокон в среднем слое. Отметим, что анизотропия промежуточного слоя заметно сказывается на картинах распределения напряжений. Особенно выделяется распределение напряжений τ_{xy} (рисунок 6). В данном случае максимум касательных напряжений находится на границе первого и второго слоя. При этом максимальные касательные напряжения возникают при продольной ориентации $0.7P_0$, при нормальной – $0.46P_0$, а при поперечной ориентации $0.3P_0$. Таким образом, в последнем случае наиболее низкая вероятность отслаивания, а при нормальном способе расположения волокон наблюдается максимальная, по сравнению с остальными, площадь действия максимальных напряжений на границе слоев, что говорит о слабой адгезионной прочности закрепления слоев.

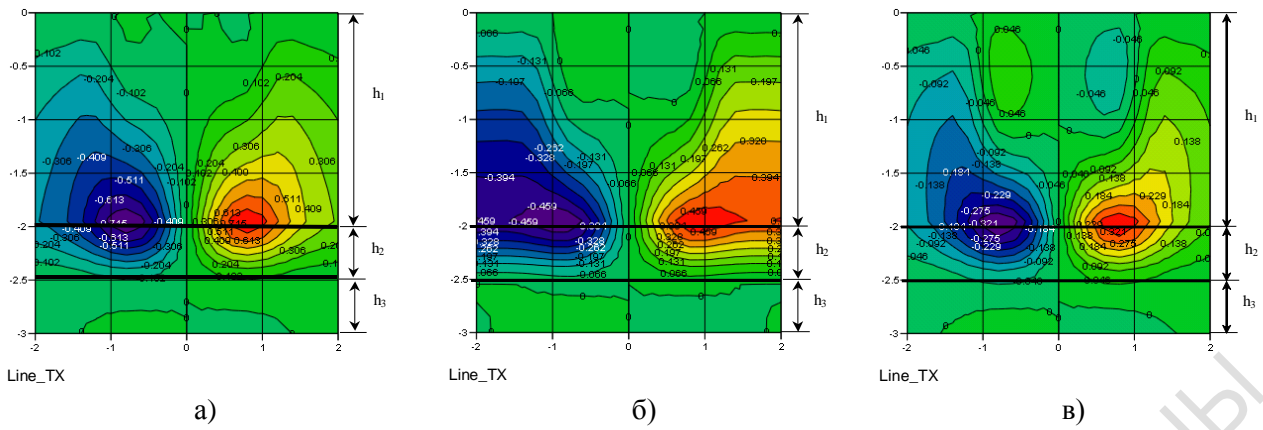


Рисунок 6 – Распределения напряжений τ_{xy} при различных способах ориентации волокон
 а) *long*, б) *norm*, с) *trans* при нормальной параболической нагрузке

$$(h_1=a, h_2=0.25h_1, h_3=0.25h_1).$$

Для комплексного анализа напряжений рассмотрим поля распределения τ_{max} , представленные на рисунке 7. Картина распределения главных напряжений также выделяет нормальный способ (рисунок 7б) расположения волокон, как менее надежный с точки зрения прочности слоистого покрытия.

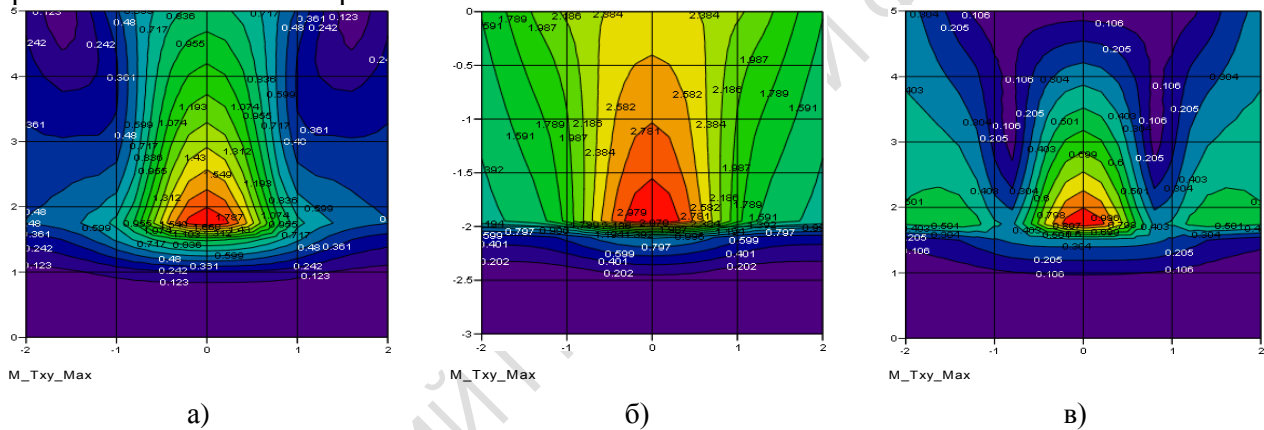


Рисунок 7 – Распределения напряжений τ_{max} при различных способах ориентации волокон
 а) *long*, б) *norm*, с) *trans* при нормальной параболической нагрузке

$$(h_1=a, h_2=0.25h_1, h_3=0.25h_1).$$

Рассмотрим, как влияет сила трения на распределение напряжений в слоистом композиционном покрытии при различных способах ориентации волокон в среднем слое.

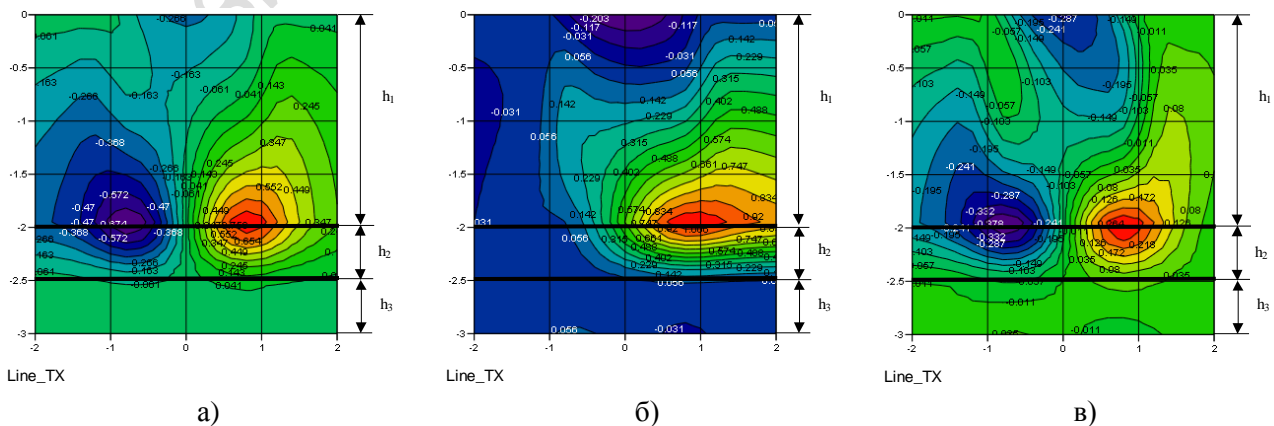


Рисунок 8 – Распределения напряжений τ_{xy} при различных способах ориентации волокон
 а) *long*, б) *norm*, с) *trans* при нормальной и касательной нагрузках $f=0.3$

$$(h_1=a, h_2=0.25h_1, h_3=0.25h_1)$$

На рисунке 8 выделяется явно асимметричный характер в распределении касательных напряжений при нормальной схеме армирования (рисунок 3.7 8b).

Заключение. В результате проведенных исследований разработаны и созданы математические модели для расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем при действии локального взаимосвязанного силового нагружения с учетом свойств волокнистых композиционных материалов. Сделан анализ существующих математических моделей слоистых материалов, работающих в условиях контактного взаимодействия с учетом свойств анизотропии. Определено напряженное состояние слоистого основания с учетом действия силовых полей. Некоторые результаты доложены на международных научно-практических конференциях [2]–[4].

Литература

1. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов. / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский– Минск : Наука, 1988. – 280 с.
2. Можаровский, В.В. Математическое моделирование при расчете конструкций из композиционных материалов с учетом температурных эффектов / В.В. Можаровский, Н.А. Марьина // XI Белорусская математическая конференция: Сб. тезисов докладов, Минск, 4–9 ноября 2012 г. – Минск : Издат. центр БГУ, 2012. – С. 81–82.
3. Можаровский, В.В. Влияние физических и геометрических параметров дорожного покрытия на энергетические потери / В.В. Можаровский, Н.А. Марьина // Энергоэффективность и экологическая безопасность на транспорте, в промышленности и в строительстве: материалы международной науч.-пр. конференции, 15–16 декабря 2011, Гомель. – Гомель : БелГут, 2011. – С. 132–133
4. Mozharovsky, V. Study of contact parameters of the reinforced layered rubber with reference to creation of tires / Valentin Mozharovsky, Sergey Shilko, Natalia Marina // Материалы 10-th International of Ukrainian Mechanical Engineers in Lviv, 25–27 May, 2011. – Львов : Институт проблем математики и механики НАНУ, 2011. – С. 14–16.
5. Марьина, Н.А. Математическое моделирование расчета многослойных гетерогенных покрытий / Н.А. Марьина, В.В. Можаровский // Математическое и имитационное моделирование МОДС: материалы VII международной научно– практической конференции 2012, Чернигов, 25–28 июня 2012. – Чернигов : Черниговский техн. ун-т, 2012. – С. 130–133.
6. Можаровский, В.В. Исследование контактного взаимодействия с учетом анизотропии термо-механических параметров / В.В. Можаровский, Н.А. Марьина // Современные проблемы машиностроения: материалы IX науч.– тех. конф., Гомель, 27–28 октября 2012. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2012. – С. 75–76.
7. Можаровский, В.В. Задачи контактного квазистатического взаимодействия слоистого волокнистого материала с учетом действия температуры / В.В. Можаровский, Н.А. Марьина // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленных воздействием полей различной физической природы : Сб. докладов, Львов, 2012. – Львов : Институт проблем математики и механики НАНУ, 2012.– С. 114–115.
8. Плесакачевский, Ю.М. Металлополимерные системы: задачи механики / Ю.М. Плесакачевский, С.В. Шилько, В.В. Можаровский // Известия НАН Беларуси, сер. физ.-техн. наук. – 1998. – № 4. – С. 42–52.
9. Никишин, В.С. Задачи теории упругости для многослойных сред / В.С. Никишин, Г.С. Шапиро. – М. : Наука, 1973. – 132 с.