Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 917.925

Условия наличия рациональных интегралов дифференциального уравнения третьего порядка с рациональной правой частью

Г.Т. Можджер

Объектом исследования является нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с рациональной правой частью. Цель работы – нахождение необходимых и достаточных условий существования первых интегралов определенного вида у рассматриваемого уравнения и изучение аналитических свойств полученных первых интегралов. В основной части получены необходимые и достаточные условия наличия первых интегралов рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с рациональной правой частью. Для этих дифференциальных уравнений приведены вычеты и соответствующие им резонансы, а также корни характеристического уравнения.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение третьего порядка, первый интеграл, резонансы, уравнение для вычетов, характеристическое уравнение.

The object of study is a nonlinear third-order differential equation with a rational right side. The goal of the study is to find the necessary and sufficient conditions for the existence of the first integrals of the equation and to study the analytical properties of the obtained first integrals. Introduction contains the object of study and the equations for residues and resonances of the equation, as well as the characteristic equation, relations connecting the roots of the characteristic equation and some coefficients of the given differential equation of the third order. The main part contains necessary and sufficient conditions for the existence of the first integrals of the given nonlinear differential equation of the third order with rational right side. For these differential equations residues and roots of the characteristic equation are given. The obtained results can be used in the analytical theory of the ordinary differential equations.
Keywords: differential equation of the third order, the first integral, resonances, the equation for residues, characteristic equation.

Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + a_4y'^2 + a_5y^2y' + a_6y^4, a_6 \neq 0. \tag{1}$$

Найдем условия на коэффициенты уравнения (1), при которых оно имеет первый интеграл веса $p_1 = 2k$ вида

$$y^{2k-12}y''^4 + \sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{2n+1} A_{n,m}y^{2k+2m-n-14}y'^{2n+1-m}y''^{4-n} = K, \tag{2}$$

где $A_{n,m}$ – постоянные коэффициенты, K – произвольная постоянная интегрирования.

Предварительные сведения. Упрощенным уравнением к уравнению (1) является

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2}.$$

Для данного уравнения характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda^2 + (a_1+1)\lambda - a_2. \tag{3}$$

Отсюда

$$a_1 + 1 = -2(\lambda_1+\lambda_2),\ a_2 = -2\lambda_1\lambda_2, \tag{4}$$

где λ_1, λ_2 – корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$. Решение уравнения (1) можно представить в виде ряда

$$y = h_0\tau^{-1} + \ldots + h_r\tau^{r-1} + \ldots,\ \tau = z - z_0,\ h_0 \neq 0.$$

В работах [1], [2] показано, что имеют место следующие уравнения для вычетов h_0 и резонансов r:

$$a_6h_0^3 - a_5h_0^2 + (2a_3+a_4)h_0 + 6 - 2a_1 - a_2 = 0, \tag{5}$$

$$(r+1)(r^2 - M_ir + N_i) = 0,\ i = \overline{1,3}, \tag{6}$$

где

$$M_i = 7 - a_1 + a_3 h_{0i},\ N_i = 3(6 - 2a_1 - a_2) + 2(2a_3 + a_4)h_{0i} - a_5 h_{0i}^2,$$

h_{0i} – корни уравнения (5).

В [2] показано, что

$$N_i = (6 - 2a_1 - a_2)\left(1 - \frac{h_{0i}}{h_{0j}}\right)\left(1 - \frac{h_{0i}}{h_{0k}}\right), i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k,\ i,\ j,\ k = \overline{1,3}. \quad (7)$$

Из соотношения (5) будем иметь

$$\frac{a_5}{a_6} = h_{01} + h_{02} + h_{03},\ \frac{2a_3 + a_4}{a_6} = h_{01}h_{02} + h_{01}h_{03} + h_{02}h_{03},\ \frac{6 - 2a_1 - a_2}{a_6} = -h_{01}h_{02}h_{03}. \quad (8)$$

В работе [3] показано, что существуют целые числа m, n, рациональное ν такие, что $0 \le m \le n$ и

$$(n - m)\lambda_1 + m\lambda_2 = \nu. \quad (9)$$

При этом уравнение (1) имеет первый интеграл вида

$$y^{2\nu}((yy'' + \lambda_1 y'^2)^m (yy'' + \lambda_2 y'^2)^{n-m} + F(y'', y', y)) = K, \quad (10)$$

где K – постоянная интегрирования.

Основной результат. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1). Будем предполагать, что (6) при h_{01} найденном из (5), имеет корень $r = 2k$. Тогда (7) при $i = 1$ с учетом (4) примет вид

$$N_1 = 2(\lambda_1 + 2)(\lambda_2 + 2)\left(1 - \frac{h_{01}}{h_{02}}\right)\left(1 - \frac{h_{01}}{h_{03}}\right).$$

Пусть l является вторым корнем уравнения (6) найденном при h_{01} из (5). Получим следующие соотношения:

$$M_1 = 2k + l,\ N_1 = 2kl. \quad (11)$$

Следовательно, имеем следующие случаи:

$$(\lambda_1 + 2)\left(1 - \frac{h_{01}}{h_{02}}\right) = k,\ (\lambda_2 + 2)\left(1 - \frac{h_{01}}{h_{03}}\right) = l, \quad (12)$$

$$\lambda_1 + 2 = k,\ (\lambda_2 + 2)\left(1 - \frac{h_{01}}{h_{02}}\right)\left(1 - \frac{h_{01}}{h_{03}}\right) = l. \quad (13)$$

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

1. Пусть имеем (12), тогда получим

$$\lambda_1 = -\frac{2(h_{01} - h_{02}) + kh_{02}}{h_{01} - h_{02}},\ \lambda_2 = -\frac{2(h_{01} - h_{03}) + lh_{03}}{h_{01} - h_{03}}. \quad (14)$$

Из (8) и первого соотношения из (11) найдем

$$a_3 = \frac{l(h_{01} - h_{02})(h_{01} + h_{03}) + 2kh_{01}(h_{01} - h_{03})}{h_{01}(h_{01} - h_{02})(h_{01} - h_{03})},$$

$$a_4 = -\frac{2(l(h_{01} - h_{02})(h_{01} + h_{03}) + lk(h_{01}h_{02} + h_{01}h_{03} + h_{02}h_{03}) + 2kh_{01}(h_{01} - h_{03}))}{h_{01}(h_{01} - h_{02})(h_{01} - h_{03})}, \quad (15)$$

$$a_5 = -\frac{2kl(h_{01} + h_{02} + h_{03})}{h_{01}(h_{01} - h_{02})(h_{01} - h_{03})},\ a_6 = -\frac{2kl}{h_{01}(h_{01} - h_{02})(h_{01} - h_{03})}.$$

Если $h_{01} = \frac{3k}{2a_3},\ h_{02} = -\frac{3k}{2a_3},\ h_{03} = -\frac{k}{2a_3}$, то из (4), (14) и (15) найдем

$$l = k,\ \lambda_1 = \frac{k - 8}{4},\ \lambda_2 = \frac{k - 4}{2},\ a_1 = 7 - \frac{3k}{2},\ a_2 = -\frac{1}{4}(k - 4)(k - 8),$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2}(k - 4),\ a_5 = \frac{a_3^2}{9},\ a_6 = -\frac{2a_3^3}{9k}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y''' = \left(7 - \frac{3k}{2}\right)\frac{y'y''}{y} - \frac{1}{4}(k-4)(k-8)\frac{y'^3}{y^2} + a_3 yy'' + \frac{a_3}{2}(k-4)y'^2 + \frac{a_3^2}{9}y^2 y' - \frac{2a_3^3}{9k}y^4. \quad (16)$$

Умножим (16) на интегрирующий множитель

$$A(y,y',y'') = y^{2k-15}(4\left(yy'' + \frac{k-4}{2}y'^2\right)^3 - \frac{a_3}{3}(9(2yy'' + (k-4)y'^2)^2 + c(18yy'' +$$
$$+ (7k-36)\,y'^2)y^4)y^2 y' + \frac{2a_3^2}{9k}(26k(2yy'' + (k-4)\,y'^2)\,y'^2 + 3c(3yy'' +$$
$$+ (5k-6)\,y'^2)y^4)y^4 + \frac{4a_3^3}{9k}(4yy'' - 2(3k+4)\,y'^2 - 3cy^4)y^6 y' - \frac{8a_3^4}{9k^2}(2yy'' +$$
$$+ (3k-4)\,y'^2)y^8 + \frac{16a_3^5}{9k^2}y^{10}y' + \frac{c}{2}(2yy'' + (k-4)\,y'^2)(3yy'' + (k-6)\,y'^2)y^4)$$

и, проинтегрировав его, получим первый интеграл вида

$$y^{2k-16}(\left(yy'' + \frac{k-4}{2}y'^2\right)^4 - \frac{a_3}{12}(2yy'' + (k-4)y'^2)(6(2yy'' + (k-4)y'^2)^2 +$$
$$+c(18yy'' + (5k-36)y'^2)y^4)y^2 y' + \frac{a_3^2}{36k}(52k(2yy'' + (k-4)y'^2)^2 +$$
$$+c(36y^2y''^2 + 24(5k-6)yy'^2y'' + (35k^2 - 240k + 144)y'^4)y^4)y^4 + \frac{2a_3^3}{27k}(3(2yy'' +$$
$$+(k-4)y'^2)(2yy'' - (7k+4)y'^2) - c(18yy'' + (11k-36)y'^2)y^4)y^6 y' -$$
$$-\frac{a_3^4}{81k^2}(72y^2y''^2 + 72(3k-4)yy'^2y'' + 2(13k^2 - 216k + 144)y'^4 + 9cky^4y'^2)y^8 + \quad (17)$$
$$+\frac{4a_3^5}{81k^2}(36yy'' + 2(17k-36)y'^2 + 9cy^4)y^{10}y' - \frac{4a_3^6}{27k^3}(4ky'^2 + cy^4)y^{12} -$$
$$-\frac{32a_3^7}{81k^3}y^{14}y' + \frac{16a_3^8}{81k^4}y^{16} + \frac{c}{16}(2yy'' + (k-4)y'^2)^2(4yy'' + (k-8)y'^2)y^4) = K,$$

где c – произвольное.

Если $h_{01} = -\frac{51k}{10a_3}$, $h_{02} = \frac{17k}{10a_3}$, $h_{03} = -\frac{17k}{70a_3}$, то из (4), (14) и (15) найдем

$$l = -6k, \lambda_1 = \frac{k-8}{4}, \lambda_2 = \frac{3k-20}{10}, a_1 = 7 - \frac{11k}{10}, a_2 = -\frac{1}{20}(k-8)(3k-20),$$
$$a_4 = \frac{a_3}{34}(19k-68), a_5 = \frac{75a_3^2}{289}, a_6 = -\frac{350a_3^3}{4913k}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y''' = \left(7 - \frac{11k}{10}\right)\frac{y'y''}{y} - \frac{1}{20}(k-8)(3k-20)\frac{y'^3}{y^2} + a_3 yy'' +$$
$$+\frac{a_3}{34}(19k-68)y'^2 + \frac{75a_3^2}{289}y^2y' - \frac{350a_3^3}{4913k}y^4. \quad (18)$$

Умножим (18) на интегрирующий множитель

$$A(y,y',y'') = y^{2k-15}(4\left(yy'' + \frac{3k-20}{10}y'^2\right)^3 - \frac{a_3}{255}(3060y^2y''^2 + 4(469k - 3060)yy'^2y'' +$$
$$+(287k^2 - 3752k + 12240)y'^4)y^2y' - \frac{4a_3^2}{867k}(2520y^2y''^2 - 12(107k + 840)yy'^2y'' -$$

$$-(649k^2-2568k-10080)y'^4)y^4+\frac{280a_3^3}{4913k}(418yy''+(37k-836)y'^2)y^6y'+$$
$$+\frac{9800a_3^4}{250563k^2}(118yy''-(271k+236)y'^2)y^8-\frac{23186800a_3^5}{4259571k^2}y^{10}y')$$

и, проинтегрировав его, получим первый интеграл вида

$$y^{2k-16}(\left(yy''+\frac{3k-20}{10}y'^2\right)^4-\frac{a_3}{12750}(10yy''+(3k-20)y'^2)(5100y^2y''^2+$$
$$+40(79k-510)y\,y'^2\,y''+(487k^2-6320k+20400)\,y'^4)y^2y'-\frac{4a_3^2}{4335k}(4200y^3\,y''^3-$$
$$-30(107k+840)y^2\,y'^2\,y''^2-5(649k^2-2568k-10080)y\,y'^4\,y''-(569k^3-6490k^2+$$
$$+12840k+33600)\,y'^6)y^4+\frac{2a_3^3}{73695k}(438900y^2\,y''^2+2100(37k-836)y\,y'^2\,y''-$$
$$-(19477k^2+155400k-1755600)\,y'^4)y^6y'+\frac{10a_3^4}{250563k^2}(57820y^2\,y''^2-980(271k+ \quad (19)$$
$$+236)y\,y'^2\,y''-(45421k^2-531160k-231280)\,y'^4)y^8-$$
$$-\frac{280a_3^5}{4259571k^2}(82810yy''-(36303k+165620)\,y'^2)y^{10}y'+\frac{215168800a_3^6}{72412707k^2}y^{12}\,y'^2+$$
$$+\frac{404740000a_3^7}{1231016019k^3}y^{14}y'-\frac{4057690000a_3^8}{20927272323k^4}y^{16})=K.$$

Если $h_{01}=\frac{ck}{a_3}$, $h_{02}=-\frac{ck}{3a_3}$, $h_{03}=-\frac{ck}{2(c-1)a_3}$, то из (4), (14) и (15) найдем

$$l=\frac{(2c-1)k}{2},\ \lambda_1=\frac{k-8}{4},\ \lambda_2=\frac{k-4}{2},\ a_1=7-\frac{3k}{2},\ a_2=-\frac{1}{4}(k-4)(k-8),$$
$$a_4=\frac{a_3}{2}(k-4),\ a_5=-\frac{a_3^2(4c-7)}{4c^2},\ a_6=-\frac{3a_3^3(c-1)}{2c^3k},$$

где c – произвольное.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y'''=\left(7-\frac{3k}{2}\right)\frac{y'y''}{y}-\frac{1}{4}(k-4)(k-8)\frac{y'^3}{y^2}+a_3yy''+\frac{a_3}{2}(k-4)y'^2-$$
$$-\frac{a_3^2(4c-7)}{4c^2}y^2y'-\frac{3a_3^3(c-1)}{2c^3k}y^4. \quad (20)$$

Умножим (20) на интегрирующий множитель

$$A(y,y',y'')=y^{2k-15}(4\left(yy''+\frac{k-4}{2}y'^2\right)^3-3a_3(2yy''+(k-4)y'^2)^2y^2y'-$$
$$-\frac{a_3^2}{2c^2k}(2yy''+(k-4)y'^2)(8(c-1)yy''+(k(4c^2+4c-5)-16(c-1))y'^2)y^4-$$
$$-\frac{a_3^3}{c^3k}(12(4c-1)yy''+(k(4c^2+28c-5)-24(4c-1))y'^2)y^6y'+$$
$$+\frac{a_3^4(c-1)^2}{6c^4k^2}(6yy''+(k(4c+5)-12)y'^2)y^8-\frac{12a_3^5(c-1)^3}{c^5k^2}y^{10}y')$$

и, проинтегрировав его, получим первый интеграл вида

$$y^{2k-16}(\left(yy''+\frac{k-4}{2}y'^2\right)^4-\frac{a_3}{2}(2yy''+(k-4)y'^2)^3y^2y'+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{a_3^2}{8c^2k}(2yy''+(k-4)y'^2)^2(16(c-1)yy''+(k(12c^2+8c-11)-32(c-1))y'^2)y^4-\\
&-\frac{a_3^3(c-1)}{c^3k}(2yy''+(k-4)y'^2)(3(4c-1)yy''+(k(2c^2+8c-1)-6(4c-1))y'^2)y^6y'+\\
&+\frac{a_3^4}{16c^4k^2}(288(c-1)^2y^2y''^2+96(c-1)^2(k(4c+5)-12)yy'^2y''+(k^2(16c^4+\\
&+192c^3-240c^2-160c+165)-192k(c-1)^2(4c+5)+1152(c-1)^2)y'^4)y^8-\\
&-\frac{a_3^5(c-1)}{2c^5k^2}(72(c-1)^2yy''+(k(16c^3+24c^2-96c+29)-144(c-1)^2)y'^2)y^{10}y'+\\
&+\frac{9a_3^6(c-1)^2(2c+1)(2c-5)}{2c^6k^2}y^{12}y'^2+\frac{54a_3^7(c-1)^3}{c^7k^3}y^{14}y'-\frac{27a_3^8(c-1)^4}{c^8k^4}y^{16})=K.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

2. Пусть теперь имеет место (13), тогда получим

$$\lambda_1=k-2,\ \lambda_2=\frac{lh_{02}h_{03}}{(h_{01}-h_{02})(h_{01}-h_{03})}-2. \tag{22}$$

Из (8) и первого соотношения из (11) найдем

$$
\begin{aligned}
&a_3=\frac{l(h_{01}^2-h_{01}h_{02}-h_{01}h_{03}-h_{02}h_{03})}{h_{01}(h_{01}-h_{02})(h_{01}-h_{03})},\ a_4=-\frac{2l((k-1)(h_{01}h_{02}+h_{01}h_{03}+h_{02}h_{03})+h_{01}^2)}{h_{01}(h_{01}-h_{02})(h_{01}-h_{03})},\\
&a_5=-\frac{2kl(h_{01}+h_{02}+h_{03})}{h_{01}(h_{01}-h_{02})(h_{01}-h_{03})},\ a_6=-\frac{2kl}{h_{01}(h_{01}-h_{02})(h_{01}-h_{03})}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Если $h_{01}=\frac{k}{2a_3},\ h_{02,03}=-\frac{(3\pm\sqrt{15}i)k}{12a_3}$, то из (4), (22) и (23) получим

$$
\begin{aligned}
&l=k,\ \lambda_1=\frac{k-8}{4},\ \lambda_2=k-2, a_1=7-\frac{5k}{2},\ a_2=-\frac{1}{2}(k-2)(k-8),\\
&a_4=\frac{a_3}{2}(k-4),\ a_5=0,\ a_6=-\frac{6a_3^3}{k}.
\end{aligned}
$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y'''=\left(7-\frac{5k}{2}\right)\frac{y'y''}{y}-\frac{1}{2}(k-2)(k-8)\frac{y'^3}{y^2}+a_3yy''+\frac{a_3}{2}(k-4)y'^2-\frac{6a_3^3}{k}y^4. \tag{24}$$

Умножив уравнение (24) на интегрирующий множитель

$$
\begin{aligned}
A(y,y',y'')=\ &y^{2k-15}(4(yy''+(k-2)y'^2)^3-12a_3(yy''+(k-2)y'^2)^2y^2y'+12a_3^2(yy''+\\
&+(k-2)y'^2)y^4y'^2+\frac{4a_3^3}{k}(12yy''+(11k-24)y'^2)y^6y'-\frac{48a_3^4}{k^2}(yy''+2(k-1)y'^2)y^8+\frac{48a_3^5}{k^2}y^{10}y')
\end{aligned}
$$

и, проинтегрировав его, получим первый интеграл вида

$$
\begin{aligned}
&y^{2k-16}((yy''+(k-2)y'^2)^4-4a_3(yy''+(k-2)y'^2)^3y^2y'+6a_3^2(yy''+\\
&+(k-2)y'^2)^2y^4y'^2+\frac{4a_3^3}{k}(yy''+(k-2)y'^2)(6yy''+(5k-12)y'^2)y^6y'-\\
&-\frac{a_3^4}{k^2}(24y^2y''^2+96(k-1)yy'^2y''+(71k^2-192k+96)y'^4)y^8+\\
&+\frac{24a_3^5}{k^2}(2yy''+(3k-4)y'^2)y^{10}y'+\frac{120a_3^6}{k^2}y^{12}y'^2-\frac{288a_3^7}{k^3}y^{14}y'+\frac{144a_3^8}{k^4}y^{16})=K.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Теорема 1. Пусть $r=2k$ является одним из корней резонансного уравнения (6), найденного хотя бы при одном $h_{0i},\ i=1,\ 2,\ 3$ из (5).

Если имеют место соотношения (4), (14), (15), то при:

1). $h_{01}=\dfrac{3k}{2a_3}$, $h_{02}=-\dfrac{3k}{2a_3}$, $h_{03}=-\dfrac{k}{2a_3}$ получим уравнение (16), которое имеет первый интеграл вида (17);

2). $h_{01}=-\dfrac{51k}{10a_3}$, $h_{02}=\dfrac{17k}{10a_3}$, $h_{03}=-\dfrac{17k}{70a_3}$ получим уравнение (18), которое имеет первый интеграл вида (19);

3). $h_{01}=\dfrac{ck}{a_3}$, $h_{02}=-\dfrac{ck}{3a_3}$, $h_{03}=-\dfrac{ck}{2(c-1)a_3}$, где c — произвольное, получим уравнение (20), которое имеет первый интеграл вида (21).

Если имеют место соотношения (4), (22), (23), то при $h_{01}=\dfrac{k}{2a_3}$, $h_{02,\,03}=-\dfrac{(3\pm\sqrt{15}i)k}{12a_3}$ получим уравнение (24), которое имеет первый интеграл вида (25).

Замечание. Если имеют место (14) или (22), то в (9) будет $n=4, m=0$.

Предположим, что уравнение (1) имеет первый интеграл вида (2).

Пусть корни характеристического многочлена (3) будут

$$\lambda_1=\frac{1}{4}(k-8),\ \lambda_2=\frac{k(2p+3)-8(2p-1)}{4(2p-1)}, \tag{26}$$

а соотношение (9) с учетом (26) примет вид

$$\nu=\frac{k-8}{4}n+\frac{k}{2p-1}m. \tag{27}$$

Вес p_1 первого интеграла (10) равен $p_1=2(\nu+2n)$. Отсюда будем иметь

$$2(\nu+2n)=\left(\frac{n}{2}+\frac{2m}{2p-1}\right)k.$$

Получим $n(2p-1)+4m=4(2p-1)$.

Данное соотношение будет справедливо при $n=4, m=0$. Тогда соотношение (27) примет вид $\nu=k-8$, а вес интеграла $p_1=2k$.

Найдем условия на коэффициенты уравнения (1), при которых оно имело бы первый интеграл (2).

Исключая K из (2) и с учетом (1), получим следующие условия:

$$\begin{gathered}4a_1+2k-12+2A_{1,1}=0, 4a_3+A_{1,2}=0, (4-n)a_2A_{n,m}+(4-n)a_4A_{n,m-1}+\\+(4-n)a_5A_{n,m-2}+(4-n)a_6A_{n,m-3}+(3-n)a_3A_{n+1,m-1}+\\+((3-n)a_1+2k-15-n+2m)A_{n+1,m}+(2n-m+5)A_{n+2,m}=0,\end{gathered} \tag{28}$$

где $n=\overline{0,3}, m=\overline{1,2n+4}$,

$$A_{i,j}=\begin{cases}1, \text{ если } i=0,\ j=1,\\ 0, \text{ если } i=0,\ j\neq 1; \text{или } j\le 0; \text{или } i>4; \text{или } j>2i+1.\end{cases}$$

Найдем случаи совместности условий (28). В результате выделим все классы уравнений (1), имеющие первые интегралы вида (2), которые удовлетворяют (4) при условии (26), т.е. имеют место соотношения

$$a_1=7-\frac{2p+1}{2p-1}k,\ a_2=-\frac{(k-8)(k(2p+3)-8(2p-1))}{8(2p-1)}.$$

Получим следующие классы дифференциальных уравнений вида (1), которые имеют первые интегралы (2):

1. Если $p=\dfrac{5}{2}$, $a_4=\dfrac{a_3}{2}(k-4)$, $a_6=-\dfrac{2a_3(2a_3^2-a_5)}{k}$, то соотношения (26) примут вид $\lambda_1=\dfrac{k-8}{4}$, $\lambda_2=\dfrac{k-4}{2}$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) будет

$$y''' = \left(7 - \frac{3k}{2}\right)\frac{y'y''}{y} - \frac{1}{4}(k-4)(k-8)\frac{y'^3}{y^2} + a_3 yy'' + \\ + \frac{a_3}{2}(k-4)y'^2 + a_5 y^2 y' - \frac{2a_3}{k}(2a_3^2 - a_5)y^4. \qquad (29)$$

Следовательно, уравнение для вычетов (5) имеет вид

$$(2a_3h_0 - k)(4(2a_3^2 - a_5)h_0^2 + 4a_3kh_0 + k^2) = 0.$$

Отсюда при $h_0 = \dfrac{k}{2a_3}$ из уравнения резонансов (6) найдем резонансы

$$r_1 = \frac{(2a_3 + \sqrt{-a_3^2 + a_5})k}{2a_3}, r_2 = \frac{(2a_3 - \sqrt{-a_3^2 + a_5})k}{2a_3}.$$

Если же $h_0 = -\dfrac{(a_3 \pm \sqrt{-a_3^2 + a_5})k}{2(2a_3^2 - a_5)}$, то

$$r_1 = \frac{k}{4(2a_3^2 - a_5)}(5a_3^2 - 3a_5 \mp a_3\sqrt{-a_3^2 + a_5} + \sqrt{-8a_3^4 + 11a_3^2a_5 + a_5^2 \pm 6a_3(a_3^2 + a_5)\sqrt{-a_3^2 + a_5}}),$$

$$r_2 = \frac{k}{4(2a_3^2 - a_5)}(5a_3^2 - 3a_5 \mp a_3\sqrt{-a_3^2 + a_5} - \sqrt{-8a_3^4 + 11a_3^2a_5 + a_5^2 \pm 6a_3(a_3^2 + a_5)\sqrt{-a_3^2 + a_5}}).$$

Тогда первый интеграл (2) примет вид

$$y^{2k-16}(\left(yy'' + \frac{k-4}{2}y'^2\right)^4 - \frac{a_3}{2}(2yy'' + (k-4)y'^2)^3 y^2 y' + \frac{a_3^2}{4k}(2yy'' + (k- \\ -4)y'^2)^2(4yy'' + (7k-8)y'^2)y^4 + \frac{a_3^3}{k}(2yy'' + (k-4)y'^2)(2yy'' - (k+4)y'^2)y^6 y' - \\ - \frac{2a_3^4}{k^2}(4y^2y''^2 + 16(k-1)yy'^2y'' + (5k^2 - 32k + 16)y'^4)y^8 + \frac{32a_3^5}{k^2}(2yy'' + \\ +(k-4)y'^2)y^{10}y' - \frac{16a_3^6}{k^2}y^{12}y'^2 - \frac{64a_3^7}{k^3}y^{14}y' + \frac{128a_3^8}{k^4}y^{16} + \frac{a_3a_5}{k}(2yy'' + \\ +(3k-4)y'^2)(2yy'' + (k-4)y'^2)y^6y' - \frac{a_3^2a_5}{k^2}(4y^2y''^2 - 16yy'^2y'' + (3k^2 + \\ +16)y'^4)y^8 - \frac{8a_3^3a_5}{k^2}(8yy'' + (3k-16)y'^2)y^{10}y' + \frac{48a_3^4a_5}{k^2}y^{12}y'^2 - \frac{192a_3^6a_5}{k^4}y^{16} + \\ + \frac{16a_3a_5^2}{k^2}(yy'' - 2y'^2)y^{10}y' - \frac{12a_3^2a_5^2}{k^2}y^{12}y'^2 + \frac{48a_3^3a_5^2}{k^3}y^{14}y' + \frac{96a_3^4a_5^2}{k^4}y^{16} - \\ - \frac{16a_3a_5^3}{k^3}y^{14}y' - \frac{16a_3^2a_5^3}{k^4}y^{16} - \frac{a_5}{4k}(2yy'' + (k-4)y'^2)^2(4yy'' + (3k-8)y'^2)y^4 + \\ + \frac{a_5^2}{k^2}(2yy'' + (k-4)y'^2)(2yy'' + (3k-4)y'^2)y^8 - \frac{4a_5^3}{k^2}y^{12}y'^2) = K. \qquad (30)$$

В данном случае интегрирующий множитель $A(y, y', y'')$ уравнения (1) будет

$$A(y, y', y'') = y^{2k-15}(4\left(yy'' + \frac{k-4}{2}y'^2\right)^3 - 3a_3(2yy'' + (k-4)y'^2)^2y^2y' + \frac{2a_3^2}{k}(2yy'' + \\ +(k-4)y'^2)(3yy'' + 2(2k-3)y'^2)y^4 + \frac{8a_3^3}{k}(yy'' - 2y'^2)y^6y' - \frac{16a_3^4}{k^2}(yy'' + \\ +2(k-1)y'^2)y^8 + \frac{64a_3^5}{k^2}y^{10}y' + \frac{8a_3a_5}{k}(yy'' + (k-2)y'^2)y^6y' - \frac{8a_3^2a_5}{k^2}(yy'' - 2y'^2)y^8 -$$

$$-\frac{64a_3^3a_5}{k^2}y^{10}y'+\frac{16a_3a_5^2}{k^2}y^{10}y'-\frac{2a_5}{k}(2yy''+(k-4)y'^2)(3yy''+2(k-3)y'^2)y^4+$$
$$+\frac{8a_5^2}{k^2}(yy''+(k-2)y'^2)y^8).$$

Пусть $y_0=h_0\tau^{-1}$ главная часть решения уравнения (1). Тогда получим

$$A(y_0,\,y_0',\,y_0'')=-\frac{1}{2k^2}\cdot\frac{h_0^{2k-9}}{\tau^{2k-3}}(2a_3h_0-k)(4(2a_3^2-a_5)h_0^2+4a_3kh_0+k^2).$$

Согласно [3], если $A(y_0,\,y_0',\,y_0'')=0$, то сумма корней резонансного уравнения (6) при $h_{0i}, i=\overline{1,3}$ равна весу первого интеграла, т.е. $p_1=r_1+r_2=2k$.

Здесь при $h_0=\dfrac{k}{2a_3}$ имеем резонансы, удовлетворяющие соотношению $r_1+r_2=2k$.

2. Если $p=\dfrac{5}{2},\ a_4=\dfrac{a_3}{2}(k-4),\ a_5=9a_3^2,\ a_6=-\dfrac{18a_3^3}{k}$, то получим уравнение (20), которому соответствует первый интеграл вида (21) при $c=-\dfrac{1}{2}$.

3. Если $p=\dfrac{5}{2},\ a_4=\dfrac{a_3}{2}(k-4),\ a_5=\dfrac{a_3^2}{9},\ a_6=-\dfrac{2a_3^3}{9k}$, то получим уравнение (16), которому соответствует первый интеграл вида (17).

4. Если $p=\dfrac{5}{2},\ a_4=\dfrac{a_3}{2}(k-4),\ a_5=\dfrac{3a_3^2}{7},\ a_6=-\dfrac{54a_3^3}{343k}$, то получим уравнение (20), которому соответствует первый интеграл вида (21) при $c=\dfrac{7}{6}$.

5. Если $p=\dfrac{5}{2},\ a_4=\dfrac{a_3}{2}(k-4),\ a_5=\dfrac{13a_3^2}{9},\ a_6=-\dfrac{10a_3^3}{9k}$, то получим уравнение (20), которому соответствует первый интеграл вида (21) при $c=-\dfrac{3}{2}$.

6. Если $p=\dfrac{21}{2},\ a_4=\dfrac{a_3}{6}(5k-12),\ a_5=\dfrac{55a_3^2}{9},\ a_6=\dfrac{50a_3^3}{9k}$, то соотношения (26) примут вид $\lambda_1=\dfrac{k-8}{4},\ \lambda_2=\dfrac{3k-20}{10}$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) будет

$$y'''=\left(7-\frac{11k}{10}\right)\frac{y'y''}{y}-\frac{1}{20}(k-8)(3k-20)\frac{y'^3}{y^2}+a_3yy''+\frac{a_3}{6}(5k-12)y'^2+\frac{55a_3^2}{9}y^2y'+\frac{50a_3^3}{9k}y^4. \quad (31)$$

Следовательно, уравнение для вычетов (5) имеет вид $(10a_3h_0-9k)(10a_3h_0-3k)(10a_3h_0+k)=0.$ Отсюда при $h_0=\dfrac{3k}{10a_3}$ из уравнения резонансов (6) найдем резонансы $r_1=k,\ r_2=\dfrac{2k}{5}$. Если же $h_0=\dfrac{9k}{10a_3}$, то $r_1=-k, r_2=3k.$ Если же $h_0=-\dfrac{k}{10a_3}$, то $r_1=\dfrac{k}{3}, r_2=\dfrac{2k}{3}$.

Тогда первый интеграл (2) примет вид

$$y^{2k-16}(\left(yy''+\frac{3k-20}{10}y'^2\right)^4-\frac{a_3}{2250}(10yy''+(3k-20)y'^2)(900y^2y''^2+80(8k-$$
$$-45)yy'^2y''+(109k^2-1280k+3600)y'^4)y^2y'-\frac{a_3^2}{405k}(6800y^3y''^3+20(347k-$$
$$-2040)y^2y'^2y''^2+4(377k^2-6940k+20400)yy'^4y''+(21k^3-3016k^2+$$
$$+27760k-54400)y'^6)y^4+\frac{2a_3^3}{1215k}(17100y^2y''^2+20(1369k-3420)yy'^2y''+$$

$$+\,(5297k^2-54760k+68400)y'^4)y^6y'+\frac{10a_3^4}{729k^2}(5580y^2y''^2+12(1013k-1860)yy'^2y''+$$
$$+\,(643k^2-24312k+22320)y'^4)y^8+\frac{40a_3^5}{2187k^2}(6930yy''-(10243k+13860)y'^2)y^{10}y'-$$
$$-\frac{501200a_3^6}{729k^2}y^{12}y'^2-\frac{620000a_3^7}{729k^3}y^{14}y'-\frac{770000a_3^8}{2187k^4}y^{16})=K. \qquad (32)$$

В данном случае интегрирующий множитель $A(y,y',y'')$ уравнения (1) будет

$$A(y,y',y'')=y^{2k-15}(\left(yy''+\frac{3k-20}{10}y'^2\right)^3-\frac{a_3}{225}(2700y^2y''^2+20(91k-$$
$$-540)yy'^2y''+(301k^2-3640k+10800)y'^4)y^2y'-\frac{4a_3^2}{405k}(5100y^2y''^2+10(347k-$$
$$-2040)yy'^2y''+(377k^2-6940k+20400)y'^4)y^4+\frac{8a_3^3}{243k}(1710yy''+(1369k-$$
$$-3420)y'^2)y^6y'+\frac{40a_3^4}{243k^2}(930yy''+(1013k-1860)y'^2)y^8+\frac{30800a_3^5}{243k^2}y^{10}y').$$

Пусть $y_0=h_0\tau^{-1}$ главная часть решения уравнения (1). Тогда получим

$$A(y_0,\,y_0',\,y_0'')=-\frac{1}{60750k^2}\cdot\frac{h_0^{2k-9}}{\tau^{2k-3}}(10a_3h_0-9k)(10a_3h_0-3k)(10a_3h_0+k)^2(770a_3h_0-243k).$$

Здесь, при $h_0=\dfrac{9k}{10a_3}$ имеем резонансы удовлетворяющие соотношению $r_1+r_2=2k$.

7. Если $p=\dfrac{21}{2}$, $a_4=\dfrac{a_3}{34}(19k-68)$, $a_5=\dfrac{75a_3^2}{289}$, $a_6=-\dfrac{350a_3^3}{4913k}$, то получим уравнение (18) которому соответствует первый интеграл вида (19).

8. Если $p=\dfrac{21}{2}$, $a_4=\dfrac{a_3}{208}(103k-416)$, $a_5=\dfrac{225a_3^2}{832}$, $a_6=-\dfrac{225a_3^3}{3328k}$, то соотношения (26) примут вид $\lambda_1=\dfrac{k-8}{4}$, $\lambda_2=\dfrac{3k-20}{10}$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) будет

$$y'''=\left(7-\frac{11k}{10}\right)\frac{y'y''}{y}-\frac{1}{20}(k-8)(3k-20)\frac{y'^3}{y^2}+a_3yy''+\frac{a_3}{208}(103k-416)y'^2+$$
$$+\frac{225a_3^2}{832}y^2y'-\frac{225a_3^3}{3328k}y^4. \qquad (33)$$

Следовательно, уравнение для вычетов (5) имеет вид

$$(15a_3h_0+4k)(75a_3^2h_0^2+280a_3kh_0-624k^2)=0.$$

Отсюда при $h_0=-\dfrac{4k}{15a_3}$ из уравнения резонансов (6) найдем резонансы $r_1=\dfrac{k}{2}, r_2=\dfrac{k}{3}$. Если же $h_0=-\dfrac{4(7\pm\sqrt{166})k}{15a_3}$, то $r_1=2k, r_2=-\dfrac{(83\pm8\sqrt{166})k}{30}$.

Тогда первый интеграл (2) примет вид

$$-28080(49k+130)y^2y'^2y''^2-520(1897k^2-10584k-14040)yy'^4y''-(155713k^3-$$
$$-1972880k^2+5503680k+4867200)y'^6)y^4+\frac{a_3^3}{648960k}(3825900y^2y''^2-11700(19k+ \qquad (34)$$
$$+1308)yy'^2y''-(408337k^2-444600k-15303600)y'^4)y^6y'+\frac{15a_3^4}{173056k^2}(11310y^2y''^2-$$

$$-390(161k+116)yy'^2y''-(8893k^2-125580k-45240)y'^4)y^8-\frac{15a_3^5}{346112k^2}(54015yy''-$$

$$-2(15241k+54015)y'^2)y^{10}y'+\frac{7220925a_3^6}{5537792k^2}y^{12}y'^2+\frac{1468125a_3^7}{11075584k^3}y^{14}y'-$$

$$-\frac{14023125a_3^8}{177209344k^4}y^{16})=K.$$

9. Если $p=\dfrac{29}{2}$, $a_4=a_3(k-2)$, $a_5=\dfrac{112a_3^2}{9}$, $a_6=\dfrac{196a_3^3}{9k}$, то соотношения (26) примут вид $\lambda_1=\dfrac{k-8}{4}$, $\lambda_2=\dfrac{2(k-7)}{7}$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) будет

$$y'''=\left(7-\frac{15k}{14}\right)\frac{y'y''}{y}-\frac{1}{7}(k-7)(k-8)\frac{y'^3}{y^2}+a_3yy''+a_3(k-2)y'^2+\frac{112a_3^2}{9}y^2y'+\frac{196a_3^3}{9k}y^4. \qquad (35)$$

Следовательно, уравнение для вычетов (5) имеет вид $(7a_3h_0-3k)(14a_3h_0-3k)(14a_3h_0+k)=0$. Отсюда при $h_0=\dfrac{3k}{7a_3}$ из уравнения резонансов (6) найдем резонансы $r_1=2k$, $r_2=-\dfrac{k}{2}$. Если же $h_0=-\dfrac{k}{14a_3}$, то $r_1=\dfrac{k}{3}, r_2=\dfrac{2k}{3}$. Если же $h_0=\dfrac{3k}{14a_3}$, то $r_1=k, r_2=\dfrac{2k}{7}$.
Тогда первый интеграл (2) примет вид

$$y^{2k-16}(\left(yy''+\frac{2(k-7)}{7}y'^2\right)^4-\frac{a_3}{5145}(20580y^3y''^3+490(43k-252)y^2y'^2y''^2+$$

$$+14(493k^2-6020k+17640)yy'^4y''+(733k^3-13804k^2+84280k-164640)y'^6)y^2y'-$$

$$-\frac{a_3^2}{11025k}(447272y^3y''^3+2352(204k-1141)y^2y'^2y''^2+4704(27k^2-408k+$$

$$+1141)yy'^4y''+(8077k^3-254016k^2+1919232k-3578176)y'^6)y^4+$$

$$+\frac{8a_3^3}{4725k}(20433y^2y''^2+14(4055k-5838)yy'^2y''+(11787k^2-113540k+$$

$$+81732)y'^4)y^6y'+\frac{4a_3^4}{675k^2}(78792y^2y''^2+224(668k-1407)yy'^2y''+(17139k^2-$$

$$-299264k+315168)y'^4)y^8+\frac{112a_3^5}{6075k^2}(93114yy''-(43033k+186228)y'^2)y^{10}y'-$$

$$-\frac{15030064a_3^6}{2025k^2}y^{12}y'^2-\frac{41181952a_3^7}{2025k^3}y^{14}y'-\frac{113557696a_3^8}{6075k^4}y^{16})=K. \qquad (36)$$

10. Если $p=\dfrac{29}{2}$, $a_4=\dfrac{a_3}{182}(89k-364)$, $a_5=\dfrac{333a_3^2}{650}$, $a_6=-\dfrac{63a_3^3}{325k}$, то соотношения (26) примут вид $\lambda_1=\dfrac{k-8}{4}$, $\lambda_2=\dfrac{2(k-7)}{7}$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) будет

$$y'''=\left(7-\frac{15k}{14}\right)\frac{y'y''}{y}-\frac{1}{7}(k-7)(k-8)\frac{y'^3}{y^2}+a_3yy''+$$

$$+\frac{a_3}{182}(89k-364)y'^2+\frac{333a_3^2}{650}y^2y'-\frac{63a_3^3}{325k}y^4. \qquad (37)$$

Следовательно, уравнение для вычетов (5) имеет вид

$$(3a_3h_0+10k)(14a_3h_0-13k)(21a_3h_0+5k)=0.$$

Если же $h_0=-\dfrac{5k}{21a_3}$, то $r_1=\dfrac{k}{2}, r_2=\dfrac{k}{3}$. Если же $h_0=\dfrac{13k}{14a_3}$, то $r_{1,2}=\dfrac{(20\pm\sqrt{42})k}{20}$.

Тогда первый интеграл (2) примет вид

$$\begin{aligned}
&y^{2k-16}\Big(\left(yy''+\frac{2(k-7)}{7}y'^2\right)^4-\frac{2a_3}{468195}(936390y^3y''^3+3430(233k-1638)y^2y'^2y''^2+\\
&+98(2321k^2-32620k+114660)yy'^4y''+(21587k^3-454916k^2+3196760k-\\
&-7491120)y'^6)y^2y'-\frac{a_3^2}{621075k}(2086812y^3y''^3-34398(53k+364)y^2y'^2y''^2-\\
&-364(4231k^2-20034k-68796)yy'^4y''-(242713k^3-3080168k^2+7292376k+\\
&+16694496)y'^6)y^4+\frac{4a_3^3}{443625k}(1203930y^2y''^2+4095(67k-1176)yy'^2y''-\\
&-(19039k^2+548730k-4815720)y'^4)y^6y'+\frac{6a_3^4}{105625k^2}(55419y^2y''^2-546(297k+\\
&+406)yy'^2y''-(35071k^2-324324k-221676)y'^4)y^8-\frac{42a_3^5}{105625k^2}(20748yy''-\\
&-(3193k+41496)y'^2)y^{10}y'+\frac{12190563a_3^6}{2640625k^2}y^{12}y'^2+\frac{3222828a_3^7}{2640625k^3}y^{14}y'-\frac{2111508a_3^8}{2640625k^4}y^{16}\Big)=K.
\end{aligned}\tag{38}$$

Теорема 2. Если уравнение (1) имеет первый интеграл вида (2), то:

1). уравнениям (16), (18), (20), (33), (35), (37) соответствуют первые интегралы (17), (19), (21), (34), (36), (38), которые отвечают резонансу $2k$;

2). уравнениям (29), (31) соответствуют первые интегралы (30), (32). Если соответствующий интегрирующий множитель $A(y,y',y'')$ уравнений (29), (31) равен нулю при $y_0=h_0\tau^{-1}$, то вес соответствующего первого интеграла (30), (32) равен сумме корней соответствующего резонансного уравнения (6).

Литература

1. Мартынов, И.П. О первых интегралах дифференциального уравнения третьего порядка / И.П. Мартынов, Г.Т. Можджер // Вестник ГрГУ. Серия 2. – 2005. – № 1(31). – С. 59–66.

2. Можджер, Г.Т. Первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений высших порядков с рациональной правой частью: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Г.Т. Можджер. – Гродно, 2006. – 163 с.

3. Березкина, Н.С. О первых интегралах одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 10. – С. 1502–1503.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 28.08.2013