Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 517.977

Оптимальная по быстродействию стабилизация математического маятника

Е.А. Ружицкая

Рассматривается задача оптимальной по быстродействию стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия в классе ограниченных управлений. Для построения стабилизирующих по быстродействию обратных связей используется вспомогательная задача оптимального управления – задача минимизации интенсивности управляющего воздействия.

Ключевые слова: обратная связь, стабилизация, динамическая система, задача оптимального управления, задача быстродействия, математический маятник.

The time-optimal stabilization problem of a mathematical pendulum in the upper positions of equilibrium in the class of bounded controls is considered. For the construction of time-optimal stabilizing feedback an auxiliary optimal control problem – the problem of minimizing the intensity of the control is used.

Keywords: feedback, stabilization, dynamic system, optimal control, time-optimal control problem, mathematical pendulum.

Введение. Математический маятник – классический объект нелинейной механики, который часто используется для проверки алгоритмов решения задач. В работах [1], [2] предложены различные методы построения обратных связей для математического маятника. Кроме требования устойчивого поведения системы, как привило, на переходные процессы накладываются дополнительные условия. Одним из таких условий является требование наибыстрейшего устойчивого поведения системы. В данной работе описывается метод построения оптимальных стабилизирующих обратных связей в задаче быстродействия с использованием методов теории оптимального управления. При этом структура обратной связи в явном, формульном виде не задается. Её значения вычисляются с помощью решения специальной вспомогательной задачи оптимального управления. В статье развиваются исследования работ [3]–[8], в которых описаны методы построения оптимального управления типа обратной связи и их применения к проблеме стабилизации.

Постановка задачи. Математическая модель маятника с приложенным к его оси подвеса управляющим моментом u имеет вид

$$\ddot{x} + \sin x = u, \tag{1}$$

где x – угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\dot{x}$ – угловое ускорение, $t \geq 0$ – время. При $u = u(t) \equiv 0,\ t \geq 0,$ состояниями равновесия системы (1) на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ являются точки

$$(x = \pm 2k\pi,\ \dot{x} = 0),\ \ k = 0,1,\ldots; \tag{2}$$

$$(x = \pm(2k+1)\pi,\ \dot{x} = 0),\ \ k = 0,1,\ldots. \tag{3}$$

Точки (2) – устойчивые, а точки (3) – неустойчивые состояния равновесия математического маятника.

При малых начальных отклонениях $|x(0)| + |\dot{x}(0)|,\ \ |x(0) - \pi| + |\dot{x}(0)|,$ для стабилизации маятника в нижнем устойчивом положении равновесия $(0, 0)$ используется линейное уравнение

$$\ddot{x} + x = u, \tag{4}$$

а для стабилизации неустойчивого верхнего состояния $(\pi, 0)$ – уравнение

$$\ddot{x} - x = u. \tag{5}$$

Опишем метод построения оптимальных по быстродействию обратных связей на примере стабилизации математического маятника (5) в верхнем неустойчивом положении равновесия.

Пусть G – ограниченная окрестность состояния равновесия $(x=0, \dot{x}=0)$ системы (5), $u=0$. Выберем натуральное число $N\,(N>2)$, вещественные числа $h>0$, $L>0$. Положим $t^*=Nh$.

Функцию

$$u(t,x,\dot{x}),\ t\in[0,h[,\ t\geq 0,\ (x,\dot{x})\in G, \tag{6}$$

назовем дискретной (с периодом квантования $h>0$) ограниченной стабилизирующей обратной связью системы (5) в области G, если:

1) $u(t,0,0)=0,\ t\in[0,h[$;

2) $|u(t,x,\dot{x})|\leq L,\ (x,\dot{x})\in G,\ t\in[0,h[$;

3) траектория замкнутой системы

$$\ddot{x}-x=u(t,x,\dot{x}),\ x(0)=x_{01},\dot{x}(0)=x_{02},\ (x_{01},x_{02})\in G, \tag{7}$$

является непрерывным решением уравнения

$$\dot{x}-x=u(t),\ x(0)=x_{01},\ \dot{x}(0)=x_{02},$$

при $u(t)=u(t-kh,x(kh)),\ t\in[kh,(k+1)h[,\ k=0,1,...$;

4) система (7) асимптотически устойчива в G.

Кусочно-постоянную функцию $u(t), t\geq 0,$ $u(t)=u_j,\ t\in[(j-1)h,\ jh[,$ $j=1,2,...,$ удовлетворяющую ограничению $|u(t)|\leq L,\ t\geq 0,$ будем называть доступным управлением.

На введенном множестве доступных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия:

$$t^*\to\min, \tag{8}$$

$$\ddot{x}-x=u,\ x(0)=x_{01},\ \dot{x}(0)=x_{02}, \tag{9}$$

$$x(t^*)=0,\ \dot{x}(t^*)=0, \tag{10}$$

$$|u(t)|\leq L,\ t\geq 0. \tag{11}$$

Доступное управление $u(t), t\geq 0$ назовем *допустимым*, если оно удовлетворяет ограничению (11), порождает такую траекторию $(x(t),\dot{x}(t)), t\geq 0,$ системы (9), которая за конечное время $t^*=t^*(u)$ достигает состояния равновесия (10).

Допустимое управление $u^0(t\,|\,x_{01},x_{02}),\ t\in[0,t^*(u^0)],$ будем называть *оптимальным по быстродействию программным управлением* со временем быстродействия $t^{*0}=t^*(u^0)$ для состояния $(x_{01},x_{02}),$ если:

1) t^{*0} – наименьшее время из возможных $t^*=t^*(u)$ для допустимых управлений;

2) $\max\limits_{t\in[0,t^{*0}]}|u^0(t)|=\min\limits_{u^*}\max\limits_{t\in[0,t^{*0}]}|u^*(t)|,$

где минимум берется по всем допустимым управлениям $u^*(t), t\in[0,t^*(u^*)],$ для которых время $t^*(u^*)$ совпадает со временем оптимального быстродействия t^{*0}.

Введем определение оптимальной по быстродействию стабилизирующей обратной связи. Обозначим $u^0(t\,|\,z_1,z_2),\ t\in[0,t^{*0}(z_1,z_2)]$ оптимальное программное управление задачи (8)–(11) для состояния $(z_1,z_2),$ $\overline{X}$ – множество всех $(z_1,z_2),$ для которых существует оптимальное программное управление.

Функция

$$u^0(x,\dot{x})=u^0(0\,|\,z_1,z_2),\ (z_1,z_2)\in\overline{X} \tag{12}$$

называется *оптимальным (стартовым) по быстродействию управлением типа обратной связи* в задаче оптимального быстродействия (8)–(11).

Можно показать, что функция (12) является дискретной ограниченной стабилизирующей обратной связью для состояния (z_1,z_2).

Под траекторией $(x^0(t),\dot{x}^0(t)), t\geq 0,$ системы (9), замкнутой оптимальной обратной связью (12), будем понимать непрерывное решение уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t),\ x(0) = x_0,$$

где $u^0(t) = u^0(x^0(\tau),\dot{x}^0(\tau)), t\in[\tau,\tau+h], \tau = kh, k = 0,1,\ldots.$

Оптимальное стабилизирующее управление будем строить следующим образом. В начальный момент $t = 0$ для состояния (x_{01},x_{02}) вычислим $u^0(x_{01},x_{02})$ и положим $u^0(t) = u^0(x_{01},x_{02}),\ 0\leq t\leq h.$ Под действием этого управления, в момент $t = h$ система (9) оказывается в состоянии $(x^0(h),\dot{x}^0(h)).$ Пусть процесс управления осуществлен на промежутке $[0,\tau-h]$ и в момент $\tau = kh$ система оказалась в состоянии $(x^0(\tau),\dot{x}^0(\tau)).$ Управление $u^0(t)$ на следующем промежутке времени $[\tau,\tau+h[$ вычислим по формуле

$$u^0(t) = u^0(x^0(\tau),\dot{x}^0(\tau)), t\in[\tau,\tau+h[.$$

Таким образом, в каждом конкретном процессе управления динамической системой нужны значения обратной связи вдоль реализовавшейся траектории $(x^*(t),\dot{x}^*(t)), t\geq 0.$ При этом нужны не все значения управляющего воздействия, а лишь значения $u^*(t), t\geq 0,$ по ходу конкретного процесса управления.

Устройство, которое может вычислять эти значения, будем называть оптимальным по быстродействию стабилизатором (или просто стабилизатором).

Таким образом, проблема построения оптимальной по быстродействию обратной связи $u^0(x,\dot{x}), (x,\dot{x})\in\bar{X},$ свелась к описанию алгоритма работы оптимального по быстродействию стабилизатора.

Алгоритм построения оптимальной по быстродействию стабилизирующей обратной связи. Для начала работы оптимального стабилизатора необходимо знать значение $u^0(0)$ оптимального программного управления $u^0(t\,|\,x_{01},x_{02}),\ t\in[0,t^{*0}],$ задачи (8)–(11). Поскольку вся информация о задаче (8)–(11) известна заранее, то программное решение можно построить до начала процесса управления. Оптимальное программное управление $u^0(t\,|\,x_{01},x_{02}), t\in[0,t^{*0}],$ строилось следующим образом.

Используя формулу Коши, запишем задачу (8)–(11) в эквивалентной функциональной форме:

$$\begin{gathered} t^* \to \min, \\ F_{11}(t^*)x_{01} + F_{12}(t^*)x_{02} + \int_0^{t^*} F_{12}(t^*-t)u(t)dt = 0, \\ F_{21}(t^*)x_{01} + F_{22}(t^*)x_{02} + \int_0^{t^*} F_{22}(t^*-t)u(t)dt = 0, \\ |u(t)|\leq L, t\geq 0, \end{gathered} \tag{13}$$

где $F(t), t\geq 0, F(t)\in R^{2\times 2}$ – фундаментальная матрица решений системы $\ddot{x}-x = 0,$ которая имеет вид:

$$F(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{e^{-t}+e^{t}}{2} & \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2} \\ \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2} & \dfrac{e^{-t}+e^{t}}{2} \end{bmatrix}.$$

Во введенном классе доступных управлений задача (13) эквивалентна задаче:

$$\begin{gathered} N \to \min, \\ F_{11}(Nh)x_{01} + F_{12}(Nh)x_{02} + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{12}(Nh-t)dt = 0, \\ F_{21}(Nh)x_{01} + F_{22}(Nh)x_{02} + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{22}(Nh-t)dt = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

$$|u_j| \le L,\ j = \overline{0, N-1},\ N = t^* / h,\ N > 2,$$

где $u_j \in R, u_j$ – значение управления $u(t)$ на промежутке $[jh, (j+1)h[$.

Допустимое управление задачи (14) будем строить с помощью следующей задачи:

$$\max_{0 \le j \le N-1} |u_j| \to \min,$$

$$F_{11}(Nh)x_{01} + F_{12}(Nh)x_{02} + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{12}(Nh-t)dt = 0,$$

$$F_{21}(Nh)x_{01} + F_{22}(Nh)x_{02} + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{22}(Nh-t)dt = 0, \tag{15}$$

$$|u_j| \le L,\ j = \overline{0, N-1}.$$

Заменим задачу (15) задачей минимизации интенсивности управления:

$$\rho \to \min,$$

$$F_{11}(Nh)x_{01} + F_{12}(Nh)x_{02} + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{12}(Nh-t)dt = 0,$$

$$F_{21}(Nh)x_{01} + F_{22}(Nh)x_{02} + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{22}(Nh-t)dt = 0, \tag{16}$$

$$|u_j| \le \rho,\ j = \overline{0, N-1}.$$

Введем новые переменные $\xi_j = u_j / \rho,\quad j = \overline{0, N-1}, \xi^1 = 1/\rho.$ Тогда задача (16) эквивалентна задаче линейного программирования:

$$\xi^1 \to \max,$$

$$\xi^1(F_{11}(Nh)x_{01} + F_{12}(Nh)x_{02}) + \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{12}(Nh-t)dt = 0,$$

$$\xi^1(F_{21}(Nh)x_{01} + F_{22}(Nh)x_{02}) + \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \int_{jh}^{(j+1)h} F_{22}(Nh-t)dt = 0, \tag{17}$$

$$-1 \le \xi_j \le 1,\ j = \overline{0, N-1},\ \xi^1 \ge 0.$$

Пусть $\xi^{10}, \xi_j^0, j = \overline{0, N-1}$ – оптимальный план задачи (17). Возможны 2 случая:

1) $\rho^0 = 1/\xi^{10} > L$;

2) $\rho^0 = 1/\xi^{10} \le L$.

В первом случае полагаем $N = N-1$ и вновь решаем задачу (17). Число N уменьшаем до тех пор, пока $\rho^0 = 1/\xi^{10} \le L$. Фиксируем значение $N^0 = N$, при котором $\rho^0 \le L$.

Во втором случае полагаем $N = N+1$ и вновь решаем задачу (17). Увеличиваем число N пока не выполнится условие $\rho > L$. При этом фиксируем последнее значение $N^0 = N$, для которого $\rho^0 \le L$.

В обоих случаях N^0 – оптимальное значение N для задачи (15); $t^{*0} = N^0 h$ – время оптимального быстродействия,

$$u^0(t) = u^0(t \mid x_{01}, x_{02}), t \in [jh, (j+1)h[, j = \overline{0, N-1},$$

$$u^0(t) = u_j^0 = \xi_j^0 \rho^0,\ \rho^0 = 1/\xi^{10}$$

– оптимальное программное управление задачи (8)–(11).

Двойственный метод линейного программирования [9] является наиболее эффективным методом решения задачи (17), так как итерации двойственного метода на современных вычислительных машинах осуществляются за небольшое время. Если время, затраченное конкретным вычислительным устройством на построение оптимального управления задачи (17), меньше, чем h, то можно говорить, что для данной задачи с помощью данного вычислительного устройства можно реализовать оптимальное управление типа обратной связи в режиме реального времени [3]–[6].

Результаты оптимальной по быстродействию стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия. Пусть в начальный момент времени $t=0$ система (5) находилась в состоянии $x(0)=1, \dot{x}(0)=-1.$ Требуется за минимально возможное время перевести математический маятник в верхнее неустойчивое положение равновесия $x(t^*)=0, \dot{x}(t^*)=0$ и стабилизировать его в этом состоянии. При этом будем считать, что доступные управления удовлетворяют ограничению $|u(t)| \le L, t \ge 0.$

При решении задачи (13) были выбраны следующие значения параметров: 1) $L=1,$ $h=0,05;$ 2) $L=2,$ $h=0,05.$

На рисунке 1 представлены реализовавшиеся траектории системы $x^*(\tau),$ на рисунке 2 – значения стабилизирующей обратной связи. Кривые 1 (сплошные) соответствуют ограничению $L=1,$ кривые 2 (сплошные) – ограничению $L=2.$ При этом время стабилизации системы составило: при $L=1$ – 1,45, при $L=2$ – 1,1.

Чтобы сравнить результаты оптимизации рассматриваемой системы, наряду с задачей (13) была решена задача стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия без дополнительного требования быстродействия. Оптимальные обратные связи строились с помощью решения следующей задачи минимизации интенсивности управляющего воздействия:

$$\begin{gathered} \rho \to \min, \\ \ddot{x} - x = u, \; x(0) = x_{01}, \; \dot{x}(0) = x_{02}, \\ x(t^*) = 0, \; \dot{x}(t^*) = 0, \\ |u(t)| \le \rho, \; t \in [0, t^*]. \end{gathered} \tag{18}$$

Задача (18) была решена при следующих значениях параметров 1) $t^*=1,45;$ $h=0,05;$ 2) $t^*=1,1;$ $h=0,05.$ На рисунке 1 показаны реализовавшиеся траектории системы $x^*(\tau),$ а на рисунке 2 – значения стабилизирующей обратной связи. Кривые 3 (штриховые) соответствуют значениям $t^*=1,45;$ $h=0,05;$ кривые 4 (штриховые) – значениям $t^*=1,1;$ $h=0,05.$ Время стабилизации системы при $t^*=1,45$ составило – 8,7, при $t^*=1,1$ – 7,75.

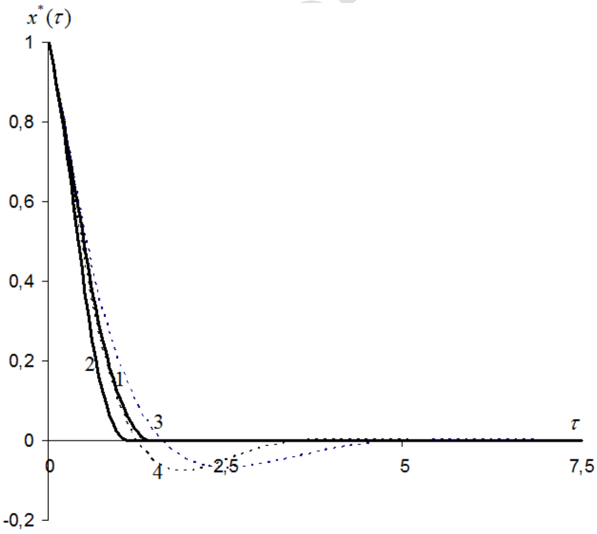

Рисунок 1 – Траектория замкнутой системы $x^*(\tau)$

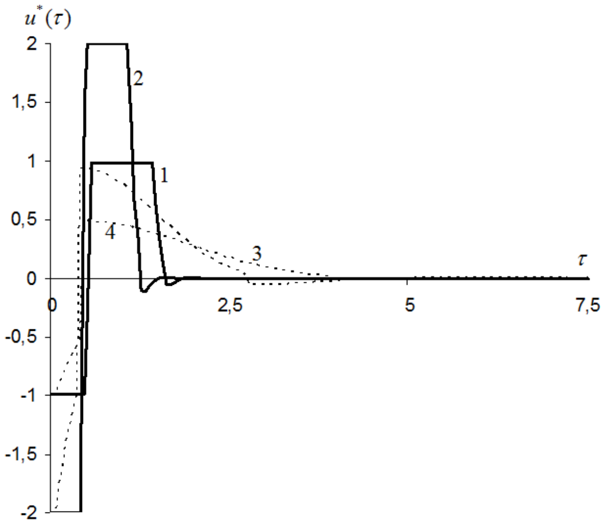

Рисунок 2 – Реализовавшиеся значения оптимальной обратной связи

Литература

1. Габасов, Р. Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 1. – С. 29–38.

2. Решмин, С.А. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза / С.А. Решмин, Ф.Л. Черноусько // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 51–62.

3. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов , Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – № 4 – С. 3–19.

4. Gabasov, R. Real–time construction of optimal closable feedbacks / R. Gabasov, F.M. Kirillova. – 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control. – San Francisco, CA, USA, June 30 – Jule 5. – San Francisco, CA, USA – 1996. – Vol. D. – P. 231–236.

5. Габасов, Р. Оптимальное управление в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 года) : пленарные доклады. – М. : Институт проблем управления, 2003. – С. 20–47.

6. Габасов, Р. Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 90–111.

7. Габасов, Р. Синтез оптимальных по быстродействию систем в классе ограниченных непрерывных управлений с ограниченными производными / Р. Габасов, Е.А. Ружицкая // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1998. – № 4. – С. 75–81.

8. Ружицкая, Е.А. Стабилизация оптимальных по быстродействию систем / Е.А. Ружицкая // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 35–38.

9. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации. Часть 1. Линейные системы / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск : Университетское, 1984. – 213 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 30.10.2013