Проблемы физики, математики и техники, № 3 (24), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ

Р.В. Бородич, С.Н. Быков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON OPERATOR GENERALIZATION OF FRATTINI SUBGROUP

R.V. Borodich, S.N. Bykov

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Изучается поведение нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

***Ключевые слова**: формация, нормальная подгруппа, силовская p-подгруппа, группа операторов.*

The behavior of normal subgroups in generalized Frattini extension is studied.

***Keywords**: formation, normal subgroups, Sylow p-subgroup, group of operators.*

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. В обозначениях и определениях мы следуем монографиям [1], [2]. Исследование пересечений максимальных подгрупп восходит к работе Фраттини [3]. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многочисленных авторов. В частности, в работе В. Гашюца [4] исследовалось пересечение $\Delta(G)$ всех абнормальных максимальных подгрупп группы G. В работе Д. Бейдлемана и Т. Сео [5] изучалось поведение нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

В работе Д. Бейдлемана и Ш. Смита [6] был поставлен следующий вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?» Эта задача рассматривалась в работах многих авторов (см. монографию [2]). В данной работе этот вопрос рассматривается с позиции теории формаций и операторного обобщения подгруппы Фраттини.

1 Определения и обозначения

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть, $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

В работе [7] Д. Горенштейн исследовал существование силовских A-допустимых подгрупп и установил, что для любого $p \in \pi(G)$, если группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, тогда в ней существует A-допустимая силовская p-подгруппа и любые две из них сопряжены между собой в G.

Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Тогда A-допустимую нормальную подгруппу H группы G назовем операторно-обобщённой подгруппой Фраттини, если $G = N_G(K)$ для каждой нормальной подгруппы L из G и каждой A-допустимой силовской подгруппы K из L такой, что $G = HN_G(K)$.

Через $F_p(G)$ обозначают p-нильпотентный радикал группы G, то есть, произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп группы G.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $<H, H^x>$; *абнормальной*, если $x \in <H, H^x>$ для любого $x \in G$.

Отметим, что силовские подгруппы любой группы являются пронормальными.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп $\mathfrak{I}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{I}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{I}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{I}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{I}$, то

$$G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{I}.$$

Отображение f класса G всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\varphi}) \cap f(Ker\varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G;

3) $f(1) = G$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\Im$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Необходимо отметить, что не всякая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A.

Пример. Рассмотрим группу

$$G^* =< a,b,c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c > .$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G =< b > \times < c >$ и $A =< a >$ – группа операторов группы G. Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A-допустимая подгруппа $H =< bc >$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например, b, являются A-допустимыми. Отмеченный классс групп становится достаточно широким, если образовать группу $R = G^* \times Q$, где Q – сверхразрешимая группа и $(|G|,|Q|) = 1$.

2 Вспомогательные результаты

***Лемма* 2.1** [1]. *Если подгруппа H пронормальна в группе G, то* $N_G(H)$ *– абнормальная подгруппа группы G.*

***Лемма* 2.2** [1]. *Пусть f – локальный экран формации* $\Im$. *Группа G тогда и только тогда принадлежит* $\Im$, *когда* $G / F_p(G) \in f(p)$ *для любого* $p \in \pi(G)$.

***Лемма* 2.3** [7]. *Пусть группа G имеет группу операторов A, H – A-допустимая подгруппа группы G. Тогда* $N_G(H)$ *также является A-допустимой подгруппой в группе G.*

***Теорема* 2.4** [8]. *Пусть* $\Im$ *– локальная формация,* $G \in \Im$ *и p является простым делителем порядка группы G. Тогда формация* $\Im$ *содержит циклическую группу порядка p.*

3 Свойства операторно-обобщенной подгруппы Фраттини

***Теорема* 3.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$ *и H – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G. Тогда*

1) *H – нильпотентная подгруппа группы G;*

2) *любая нормальная подгруппа, содержащаяся в операторно-обобщенной подгруппе Фраттини, является операторно-обобщенной подгруппой Фраттини;*

3) *если* $\Delta(G) \neq G$, *то* $\Delta(G)$ *– операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G;*

4) $H\Phi(G)$ *– операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G;*

5) $HZ(G)$ *– операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(H)$ и K – силовская p-подгруппа подгруппы H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(K)H$. Так как H – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G, то $G = N_G(K)$. Итак, любая силовская p-подгруппа из H нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа H p-нильпотентна для любого простого числа $p \in \pi(H)$, следовательно, H – нильпотентная подгруппа группы G.

Пусть Q – нормальная подгруппа, содержащаяся в операторно-обобщенной подгруппе Фраттини H. Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие силовские p-подгруппы K из L, что $G = QN_G(K)$. Из того, что $Q \subseteq H$, следует, что $G = HN_G(K)$ и $G = N_G(K)$. Следовательно, Q – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G.

Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие силовские p-подгруппы K из L, что $G = \Delta(G)N_G(K)$. По лемме 2.1 $N_G(K)$ – абнормальная подгруппа группы G, следовательно, $N_G(K)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной подгруппе T. Так как $T \supseteq \Delta(G)$, то $G = T$. Из полученного противоречия получаем, что $G = N_G(K)$, а это означает, что $\Delta(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G.

Следующие утверждения выполняются в силу того, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, а $Z(G)$ содержится в нормализаторе каждой подгруппы группы G. Теорема доказана.

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$ *и K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини. Если N – нормальная подгруппа группы G и* N / K π*-замкнута, то N –* π*-замкнутая подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть N / K имеет нормальную S_π-подгруппу H / K. Так как K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_π-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Тогда по свойству 2 теоремы

3.1 R – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини. Следовательно $G = N_G(S)$, а значит S нормальна в G.

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$ *и K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, тогда* $F_p(N/K) = F_p(N)/K$, *в частности,* $F(N/K) = F(N)/K$.

***Теорема* 3.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, *K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини и M – нормальная подгруппа группы G, содержащая K. Тогда* M/K *является операторно-обобщенной подгруппой Фраттини в* G/K *тогда и только тогда, когда M операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G.*

Доказательство. Допустим, что M – операторно-обобщённая подгруппа Фраттини группы G. Пусть L/K – нормальная подгруппа из G/K и пусть H – A-допустимая силовская р-подгруппа нормальной подгруппы L из G, такая, что

$$G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K).$$

Тогда $G = MN_G(KH)$. Пусть $g = mx$, где $m \in M$ и $x \in N_G(KH)$. Тогда $H^x \subseteq KH$. Так как L – нормальная подгруппа группы G, то H и H^x – A-допустимые силовские p-подгруппы в подгруппе $L \cap KH$. Поэтому существует элемент y из $L \cap KH$, такой, что $H^{xy} = H$. Следовательно, $xy \in N_G(H)$. Тогда $gy = m(xy)$ содержится в $MN_G(H)$. Так как $MN_G(H)$ содержит KH. Отсюда следует, что $y \in MN_G(H)$, следовательно, $g \in MN_G(H)$. Мы показали, что $G = MN_G(H)$. В силу того, что M – операторно-обобщённая подгруппа Фраттини группы G, следует, что $G = N_G(H)$. Отсюда заключаем, что M/K – операторно-обобщённая подгруппа Фраттини группы G/K.

Предположим, что M/K – операторно-обобщённая подгруппа Фраттини группы G/K. Пусть L – нормальная подгруппа группы G и пусть H – A-допустимая силовская p-подгруппа нормальной подгруппы L из G, такая, что $G = MN_G(H)$. Тогда

$$G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K).$$

Следовательно, так как KH/K – A-допустимая силовская p-подгруппа нормальной подгруппы KL/K из G/K, то $G/K = N_{G/K}(KH/K)$. Отсюда получаем, что KH – нормальная подгруппа группы G. Пусть H_1 – A-допустимая силовская p-подгруппа из KH, содержащая H. По обобщённой лемме Фраттини

$$G = KHN_G(H_1) = KN_G(H_1).$$

Следовательно, $G = N_G(H_1)$. Значит H_1 – нормальная подгруппа.

Из свойства 1 теоремы 3.1 следует, что M – нильпотентная подгруппа группы G. Тогда MH – нильпотентная подгруппа. Из того, что $G = MN_G(H)$, следует, что MH – нормальная нильпотентная подгруппа группы G.

Покажем, что $N_G(H)$ содержит MH. Пусть H_2 – A-допустимая силовская p-подгруппа подгруппы MH. Тогда H_2 нормальна в G. Следовательно, $H \subseteq H_2$. Пусть H_3 – A-допустимая силовская p-подгруппа группы G, содержащая H_2. Так как L – нормальная подгруппа группы G, то $L \cap H_3 = H$ и $N_G(H_3) \subseteq N_G(H)$. Из этого следует, что $H_2 \subseteq N_G(H)$. Так как MH – нормальная нильпотентная подгруппа группы G, то $MH \subseteq N_G(H)$. Мы показали, что $G = N_G(H)$. Следовательно, M – обобщенная подгруппа группы G.

***Теорема* 3.4.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, *K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини,* $\mathfrak{I}$ *– локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{I})$. *Если субнормальная подгруппа H группы G содержит* $O_\pi(K)$ *и* $H/O_\pi(K) \in \mathfrak{I}$, *то* $H \in \mathfrak{I}$.

Доказательство. Согласно теореме 2.4 $\mathfrak{I}$ содержится в классе всех π-групп. Не ограничивая общности, можно считать, что K – π-группа. Таким образом H – π-группа и $H/K \in \mathfrak{I}$. Пусть $p \in \pi$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно следствия 3.2.1 $F_p(G/K) = F_p(G)/K$ получаем, что

$$F_p(H/K) = F_p(H)/K.$$

Так как $H/K \in \mathfrak{I}$, то, используя следствие 3.2.1 и лемму 2.2, получаем, что

$$(H/K)/F_p(H/K) = H/K/F_p(H)/K$$

$$H/F_p(H) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 2.2 подгруппа H входит в $\mathfrak{I}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{I}$ содержит формацию нильпотентных групп, $\pi = P$ и теорема 3.4 дает ответ на вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, такая, что $H/K \in \mathfrak{I}$, где K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, то будет ли $H \in \mathfrak{I}$?»

Если группа операторов A единична, а в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Гашюца $\Delta(G)$, то из теоремы 3.4 получаем

***Следствие* 3.4.1.** *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{I})$. *Если субнормальная подгруппа H группы G содержит* $O_\pi(\Delta(G))$ *и* $H/O_\pi(\Delta(G)) \in \mathfrak{I}$, *то* $H \in \mathfrak{I}$.

Если группа операторов A единична и в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то из теоремы 3.4 получаем результат работы [9].

Замечание. Если локальная формация $\mathfrak{F}$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ для субнормальной подгруппы H, не всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Действительно. Пусть $\mathfrak{F} = S_p$ – насыщенная формация всех p-групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ – циклическая группа порядка p^2q^2. Если $H = C_{p^2}\Phi(G)$, тогда $H \lhd G$ и $H / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, но $H \notin \mathfrak{F}$.

***Теорема* 3.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, K – *операторно-обобщенная подгруппа Фраттини,* $\mathfrak{F}$ – *локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и* $N / N \cap K \in \mathfrak{F}$. *Тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N = N_1 \times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq K$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap K$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 3.4 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq K$, то $N / DN_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap K$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя следствие 3.2.1 и лемму 2.2, получаем, что

$$(N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) =$$
$$= N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2.2 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

***Следствие* 3.5.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, K – *операторно-обобщенная подгруппа Фраттини,* $\mathfrak{F}$ – *локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная подгруппа группы G и* $N / N \cap K \in \mathfrak{F}$, *то* $N \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична, а в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Гашюца $\Delta(G)$, то из теоремы 3.5 получаем

***Следствие* 3.5.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *локальная формация. Если* N – *нормальная подгруппа группы* G *и* $N / N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, *тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N = N_1 \times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

***Следствие* 3.5.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если* N – *нормальная подгруппа группы* G *и* $N / N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $N \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична, а в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то из теоремы 3.5 получаем результат работы [1].

Заключение

В работе установлены основные свойства операторно-обобщенной подгруппы Фраттини и описано её влияние на строение самой группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

3. *Frattini*, *G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

4. *Gaschütz*, *W.* Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

5. *Beidleman*, *J.C.* Generalized Frattini subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, T.K. Seo // Pacific journal of mathematics. – 1967. – Vol. 23. – № 3. – P. 441–450.

6. *Beidleman*, *J.C.* On Frattini-like subgroups / J.C. Beidleman, H. Smith // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.

7. *Gorenshtein*, *D.* Finite groups / D. Gorenshtein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.

8. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

9. *Ballester-Bolinches*, *A.* On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.

Поступила в редакцию 26.02.15.