Основные закономерности турбулентного течения в пристеночных слоях

М. Д. МИЛЛИОНЩИКОВ

УДК 532.542.4

Течение в пристеночных слоях характеризуется тормозящим или ускоряющим поток действием стенки. Для определенности мы будем рассматривать случай полного прилипания к стенке. При этом поток изменяет свою скорость в пределах пристеночного слоя до величины скорости стенки. В частном случае неподвижной стенки осуществляется полное торможение потока.

При ламинарном течении, устойчивом при достаточно малых значениях числа Рейнольдса, течение описывается хорошо известным уравнением, использующим закон Ньютона для вязкой жидкости:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{du}{dy}, \tag{1}$$

где τ_0 — напряжение трения; ν — коэффициент кинематической вязкости; u — скорость; ρ — плотность жидкости; y — расстояние от стенки.

Это уравнение можно записать в безразмерной форме:

$$\frac{d\widetilde{u}}{d\eta} = 1, \tag{2}$$

где $\eta = \frac{yv_*}{\nu}$ — безразмерная координата; $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ — динамическая скорость; $\widetilde{u} = \frac{u}{v_*}$.

Интеграл этого уравнения, удовлетворяющий условию прилипания к неподвижной стенке, имеет вид

$$\widetilde{u} = \eta. \tag{3}$$

При малых числах Рейнольдса потока, определяемого, например, через толщину ламинарного пограничного слоя δ_0,

$$Re = \delta = \frac{\delta_0 v_*}{\nu},$$

ламинарное течение устойчиво и этот линейный закон сохраняется, однако при $\delta = Re_{\text{кр}}$ устойчивость ламинарного течения нарушается и возникает турбулентное течение.

Однако и при развившейся в основном потоке турбулентности ламинарное течение существует в пристеночном слое на расстояниях, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant Re_{\text{кр}}$, т. е. всегда существует так называемый ламинарный подслой, который играет существенную роль в формировании законов сопротивления и законов массообмена и теплопередачи.

Умножая левую часть уравнения (2) на η, а правую — на равную ей величину $\widetilde{u}$, получаем

$$\eta \frac{d\widetilde{u}}{d\eta} = \widetilde{u}. \tag{4}$$

Уравнению (4) можно дать следующую трактовку: ламинарное течение можно представить в виде суперпозиции вихрей, катящихся по стенке с безразмерной угловой скоростью $d\widetilde{u}/d\eta$, со скоростью качения в точке η, равной скорости потока $\widetilde{u}$. Отметим, что в этом случае скорость перемещения вихрей полностью определяется законом Ньютона для вязкой жидкости.

При больших значениях числа Рейнольдса ламинарное течение теряет устойчивость. Возникают вихри, вначале в небольшом числе, создающие течение с более или менее регулярно чередующимися пульсациями скорости, которое с ростом чисел Рейнольдса также теряет устойчивость.

Наконец, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса устанавливается статистически упорядоченный режим течения, который мы и называем турбулентным режимом.

В этом режиме уже уместно рассматривать усредненные значения скорости и давления. Для усредненных характеристик течения — скорости, перепада давления и других величин — известны хорошо экспериментально подтвержденные закономерности, позволяющие считать, что турбулентное течение обладает интегральными особенностями, которые можно попытаться описать некоторой моделью течения в поле усредненных скоростей.

В настоящей работе сделана попытка построения такой модели течения.

Из самого понятия турбулентности вытекает, что турбулентное течение в отличие от ламинарного не определяется механизмом молекулярного обмена, характеризующегося фиксированной средней длиной свободного пробега молекул и определенной средней скоростью теплового движения молекул. Турбулентный режим — это статистически упорядоченный обмен, вызванный образованиями различного масштаба. Отсюда вытекает, что уравнение (4), форма которого обусловлена молекулярной вязкостью, должно нарушиться.

Основное положение излагаемой ниже теории заключается в том, что мы будем рассматривать турбулентное течение в поле усредненных характеристик, так же как и ламинарное течение, в виде суперпозиции вихрей, катящихся по граничной поверхности, однако в отличие от ламинарного течения скорость перемещения вихрей не просто равна скорости течения, а есть некоторая более общая функция скорости, причем поверхностью качения вихрей является граничная поверхность ламинарного подслоя, характеризующегося безразмерной толщиной δ.

Таким образом, основное уравнение предлагаемой модели турбулентности может быть записано в виде

$$(\eta-\delta)\frac{d\tilde{u}}{d\eta}=f(\tilde{u}), \tag{5}$$

где $f(\tilde{u})$ — неизвестная функция.

Естественно предположить, что статистически упорядоченное движение, устанавливающееся при развившейся турбулентности, характеризуется наивыгоднейшим распределением, обеспечивающим экстремум некоторого функционала.

Найдем течение, при котором обеспечивается минимум кинетической энергии, соответствующей заданному расходу жидкости, отнесенному к сопротивлению течения.

При рассмотрении этой вариационной задачи нет необходимости ограничиваться случаем постоянного напряжения трения τ, который имеет место при течении в пристеночном слое вблизи одной стенки.

Мы рассмотрим более общий случай течения между двумя параллельными плоскостями, где имеет место линейный закон изменения τ:

$$\tau=\tau_0(1-y/r),$$

τ_0 — напряжение на стенке; r — полуширина («радиус») области течения.

Безразмерный расход жидкости, определяемый как отношение объемного расхода жидкости, отнесенного к единице площади поперечного сечения потока, т. е. отношение средней скорости течения $u_{ср}$ к динамической скорости v_*, равен, как известно, величине $\sqrt{\frac{8}{\lambda}}$, где λ — коэффициент сопротивления. Таким образом,

$$\frac{u_{ср}}{v_*}=\sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \tag{6}$$

Отношение $\frac{u_{ср}}{v_*}$ определяется формулой

$$\tilde{Q}=\tilde{u}_{ср}=\frac{u_{ср}}{v_*}=\int\limits_{-(\eta_0-\delta)}^{+(\eta_0-\delta)}\tilde{u}\,d\eta, \tag{7}$$

где

$$\eta_0=\frac{v_* r}{\nu}.$$

Безразмерная кинетическая энергия поступательного движения, соответствующая качению вихрей, определяется формулой

$$\tilde{W}=\frac{1}{2}\int\limits_{-(\eta_0-\delta)}^{+(\eta_0-\delta)}\left[(\eta-\delta)\frac{d\tilde{u}}{d\eta}\right]^2 d\eta. \tag{8}$$

Таким образом, ставится задача об экстремуме функционала

$$F=\int\limits_{-(\eta_0-\delta)}^{+(\eta_0-\delta)}H\left(\eta,\,\tilde{u},\,\frac{d\tilde{u}}{d\eta}\right)d\eta, \tag{9}$$

где

$$H=\tilde{Q}+a\tilde{W}=\tilde{u}+\frac{a}{2}\left[(\eta-\delta)\frac{d\tilde{u}}{d\eta}\right]^2; \tag{10}$$

a — произвольная постоянная.

Уравнение Эйлера

$$H_{\tilde{u}}-\frac{d}{d\eta}H_{\tilde{u}'}=0 \tag{11}$$

для функции H, определяемой формулой (10), принимает вид

$$1-a\frac{d}{d\eta}\left[(\eta-\delta)^2\frac{d\tilde{u}}{d\eta}\right]=0. \tag{12}$$

Отсюда следует первый интеграл

$$(\eta-\delta)^2\frac{d\tilde{u}}{d\eta}=\frac{1}{a}(\eta-\delta)+\text{const}.$$

Принимая, что выполняется равенство

$$(\eta-\delta)^2\tilde{u}'=0$$

при $\eta=\delta$, имеем $\text{const}=0$ и, следовательно,

$$(\eta-\delta)\frac{d\tilde{u}}{d\eta}=\frac{1}{a}. \tag{13}$$

Отсюда следует логарифмический закон распределения скоростей для области развившейся турбулентности, т. е. при $\eta>\delta$

$$\tilde{u}=\frac{1}{a}\ln(\eta-\delta)+\text{const}. \tag{14}$$

Отметим, что для получения логарифмического закона нам не понадобилось вводить понятия турбулентной вязкости, пути смешения и связанных с этими понятиями гипотез о их зависимости от динамической скорости и расстояния от стенки как для случая постоянного, так и для случая переменного τ.

Таким образом, схема качения вихрей со скоростью, определяемой экстремумом функционала, связанного с удельным сопротивлением и кинетической энергией, соответствующей модели качения вихрей, дает теоретическое обоснование логарифмического закона распределения скоростей и объясняет причину универсальности этого закона для случая постоянного и переменного касательного напряжения.

Понятие турбулентной вязкости $\nu_т$, определяемой формулой

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu_т \frac{du}{dy}, \tag{15}$$

является, однако, полезным при рассмотрении течений в тех областях изменения чисел Рейнольдса, где еще не полностью исключается влияние молекулярной вязкости на формирование профиля скорости и закона сопротивления.

Из формул (13) и (15) непосредственно вытекает формула для коэффициента турбулентной вязкости:

$$\nu_т = \frac{\tau}{\rho v_*} (y - \delta_0). \tag{16}$$

Для пристеночного слоя вдоль пластины имеем

$$\tau = \tau_0 = \text{const},$$

и следовательно,

$$\nu_т = a v_* (y - \delta_0). \tag{17}$$

Для течения между двумя параллельными плоскостями

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r}\right),$$

и, следовательно,

$$\nu_т = a v_* (y - \delta_0) \left(1 - \frac{y}{r}\right), \tag{18}$$

и аналогичное выражение для турбулентной вязкости, вызванной шероховатостью [1, 2].

Используя принцип суперпозиции молекулярной и турбулентной вязкости, имеем для эффективной вязкости $\nu_{эфф}$ выражение

$$\nu_{эфф} = \nu + \nu_т$$

и, следовательно, уравнения для течения у пластинки и для трубы и соответствующие интегралы этих уравнений, полученные в работе [1]. Для пластинки имеем профиль скорости

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{a} \ln [1 + a(\eta - \delta)] + \delta, \tag{19}$$

где $a = 0$ при $\eta \leqslant \delta$ и $a = \text{const} \neq 0$ при $\eta > \delta$. При $a = 0$ раскрытие неопределенности дает формулу для ламинарного подслоя: $\frac{u}{v_*} = \eta$ при $\eta \leqslant \delta$.

Формула для течения между параллельными пластинками имеет вид

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{2a} \left\{ \ln [1 + a\eta_0 (\bar{y} - \bar{\delta}) \cdot (1 - \bar{y})] + \frac{(1 - \bar{\delta})}{\sqrt{\Delta}} \ln \frac{\{\sqrt{\Delta} + [2\bar{y} - (1 + \bar{\delta})]\} [\sqrt{\Delta} - (\bar{\delta} - 1)]}{\{\sqrt{\Delta} - [2\bar{y} - (1 + \bar{\delta})]\} [\sqrt{\Delta} + (\bar{\delta} - 1)]} \right\} + \delta, \tag{20}$$

где

$$\bar{y} = y/r;\ \Delta = \frac{4}{a\eta_0} + (1 - \bar{\delta})^2;\ \bar{\delta} = \delta/r;\ \eta_0 = \frac{r v_*}{\nu}.$$

Ее отличие от более простой формулы (19) проявляется лишь вблизи оси потока, где заметное отклонение от формулы (19) обеспечивает, между прочим, обращение в нуль производной du/dy на оси трубы.

Таким образом, данную работу можно рассматривать как теоретическое обоснование гипотез о структуре коэффициента турбулентной вязкости и методов расчета турбулентных течений, предложенных в работах [1, 2].

Остановимся на определении коэффициентов a и δ. Что касается коэффициента δ, то его величина определяется условиями устойчивости ламинарного течения, которые в данной работе не рассматриваются, поэтому мы по-прежнему будем считать его экспериментальным коэффициентом, определяемым профилем скорости в непосредственной близости к стенке.

Коэффициент a определялся из измерений профиля скорости. Однако его можно определить и другим методом, не требующим столь детальных измерений.

Известно, что, анализируя свои экспериментальные данные по измерению потоков в трубах, Никурадзе [3] в 1932 г. установил, что при больших значениях числа Рейнольдса существует инвариант, связанный с неравномерностью потока, а именно им установлено, что отношение разности максимальной скорости и удельного расхода потока к динамической скорости есть величина постоянная, близкая к значению, равному 4.

Наличием этого отличного от нуля параметра, по-видимому, можно объяснить существование отличной от нуля постоянной v_*/a для течения в трубах и между стенками.

При развившейся турбулентности вне стенок такого отличного от нуля параметра не существует, и в этом случае $v_*/a = 0$ и поток характеризуется равномерным распределением скорости; мы переходим в область действия законов изотропного турбулентного течения.

Используя формулу (20), нетрудно установить, что при стремлении η к бесконечности при неограниченном возрастании $\widetilde{u}_{\text{макс}}$ и $\widetilde{u}_{\text{ср}}$ разность $\widetilde{u}_{\text{макс}} - \widetilde{u}_{\text{ср}}$ стремится к конечному пределу, равному

$$\lim_{\eta\to\infty} (\widetilde{u}_{\text{макс}} - \widetilde{u}_{\text{ср}}) = \frac{3}{2a}. \tag{21}$$

Отсюда вытекает, что при экспериментальном значении этого предела, равном 3,88, величина $a = 0{,}39$.

При определении величины a мы использовали полученное из эксперимента значение предела (21). Между тем величина $v_*/a = v_0$, являющаяся постоянной при составлении функционала F, должна определяться из условий задачи.

Действительно, при больших значениях числа Рейнольдса уравнение (13) можно записать в следующей форме:

$$\bar{y}\,\frac{du}{d\bar{y}} = v_0,$$

где v_0 — постоянная, имеющая размерность скорости. Интеграл этого уравнения имеет вид

$$u = v_0 \ln \bar{y} + \text{const}.$$

Определяя постоянную из условия $u = u_{\delta_0}$ при $\bar{y} = \bar{\delta}_0$, получаем

$$u = v_0 \ln \frac{y}{\delta_0} + u_{\delta_0}.$$

Для течения в канале имеем

$$u_{\text{ср}} = -v_0\,(1 + \ln \bar{\delta}_0) + u_{\delta_0}.$$

Откуда для канала

$$v_0 = \frac{u_{\delta_0} - u_{\text{ср}}}{1 + \ln \bar{\delta}_0}.$$

Из этой формулы видно, что величина постоянной v_0 логарифмического закона определяется расходом жидкости и граничным условием: значением величины скорости на границе турбулентной области.

Определяя постоянную интегрирования из условия $u = u_{\text{макс}}$ при $\bar{y} = 1$, получаем выражение для v_0, справедливое для канала

$$v_0 = u_{\text{макс}} - u_{\text{ср}}.$$

Соответствующая формула для трубы при том же законе распределения скорости имеет вид

$$v_0 = \frac{2}{3}\,(u_{\text{макс}} - u_{\text{ср}}).$$

Отсюда следуют универсальные законы распределения скорости для больших значений числа Рейнольдса:

для канала

$$\frac{u_{\text{макс}} - u}{u_{\text{макс}} - u_{\text{ср}}} = \ln \frac{r}{y}, \tag{22}$$

для круглой трубы

$$\frac{u_{\text{макс}} - u}{u_{\text{макс}} - u_{\text{ср}}} = \frac{2}{3} \ln \frac{r}{y}. \tag{23}$$

Величина a не входит в формулы (22) и (23).

Отметим также, что известные степенные законы распределения скоростей мы получаем, полагая, что скорость, соответствующая качению вихрей, пропорциональна скорости течения

$$\eta\,\frac{d\widetilde{u}}{d\eta} = \frac{1}{m}\,\widetilde{u},$$

откуда

$$\widetilde{u} = \text{const}\cdot\eta^{1/m},$$

т. е., например, при законе 1/7 скорость качения составляет 1/7 от скорости потока. Однако эти степенные законы не соответствуют условиям экстремальности и с ростом числа Рейнольдса переходят в логарифмический закон, являющийся экстремальным в указанном выше смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Миллионщиков. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М. «Наука», 1969.
2. М. Д. Миллионщиков. «Атомная энергия», 28, 206 (1970).
3. И. Никурадзе. В сб. «Проблемы турбулентности». Под ред. М. А. Великанова и Н. Т. Швейковского. М.— Л., ОНТИ, 1936, стр. 75.