ЖУРНАЛ «АТОМНАЯ ЭНЕРГИЯ», т. 28, вып. 4 (АПРЕЛЬ 1970)

Физическая интерпретация теоремы об интеграле реактивности

В. В. ОРЛОВ, Э. А. СТУМБУР

УДК 621.039.51.12

В работе [1] доказана теорема, связывающая интеграл реактивности с коэффициентами реактивности на границах однородных зон реактора (или в более общем случае — с градиентами сечений). Ниже показано, что этот результат является следствием инвариантности уравнения переноса нейтронов относительно преобразования подобия [2].

Рассмотрим критический реактор, поток нейтронов в котором $\varphi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ подчиняется уравнению

$$\boldsymbol{\Omega}\nabla\varphi = \hat{\Sigma}\varphi. \tag{1}$$

Здесь $\hat{\Sigma}\varphi$ — интеграл столкновений — преобразование функции распределения потока нейтронов φ, происходящее в среднем при столкновении нейтронов с ядрами среды (сюда относятся все процессы взаимодействия нейтронов с ядрами — деление, захват, рассеяние и т. д.).

Уравнение (1) не нарушится, если все размеры критической системы изменить в m раз (например, уменьшить), а все макроскопические сечения во столько же раз увеличить:

$$\mathbf{r}' = \frac{1}{m}\mathbf{r}; \tag{2}$$

$$\hat{\Sigma}'(\mathbf{r}') = m\hat{\Sigma}(\mathbf{r}); \tag{3}$$

при этом уравнение (1) остается справедливым, а реактор сохранит критичность.

Предположим, что реактор состоит из нескольких однородных зон, ограниченных поверхностями S_j. Рассмотрим бесконечно малое преобразование системы:

$$m = 1 + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Преобразования (2) и (3) эквивалентны двум последовательным возмущениям реактора (см. рисунок):

а) увеличению сечений в m раз в каждой зоне:

$$\Sigma' = \Sigma + \delta\Sigma; \quad \delta\Sigma = \varepsilon\Sigma;$$

б) сдвигу границ между зонами, равнозначному замене сечений Σ_1 на Σ_2 в объеме между поверхностями S и S' (при $\mathbf{nr} < 0$) и Σ_2 на Σ_1 (при $\mathbf{nr} > 0$). Здесь $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S в сторону среды «1».

Поскольку при преобразовании (2), (3) реактор остается критическим, совокупность возмущений вида «а» и «б» должна взаимно компенсироваться в отношении влияния на коэффициент размножения системы.

Так как элемент объема между S и S' имеет вид

$$dV = |\mathbf{n}\delta\mathbf{r}_s|\, dS = \varepsilon\, |\mathbf{nr}_s|\, dS,$$

то, пользуясь соотношением теории малых возмущений [3], получим

$$\iiint_V \int \varphi^+\hat{\Sigma}\varphi\, d\mathbf{r}\, dE\, d\boldsymbol{\Omega} = \int_S (\mathbf{nr}_s)\, dS \iint \varphi^+ (\hat{\Sigma}_2 - \hat{\Sigma}_1)\, \varphi\, dE\, d\boldsymbol{\Omega}. \tag{4}$$

Аналогичное соотношение получается и при неоднородном распределении вещества в зонах реактора. В этом случае возмущенное сечение в точке $\mathbf{r}$ будет:

$$\Sigma'(\mathbf{r}) = \Sigma(\mathbf{r}m)\, m = (1+\varepsilon)\, \Sigma(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{r}) = \Sigma(\mathbf{r}) + \varepsilon\Sigma(\mathbf{r}) + \varepsilon\mathbf{r}\nabla\Sigma + \ldots$$

Таким образом, в общем случае, при наличии многих зон в критическом реакторе, выполняется равенство

$$\int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega}\varphi^+\hat{\Sigma}\varphi = -\int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega}\varphi^+\mathbf{r}\,(\nabla\hat{\Sigma})\,\varphi + \sum_j \int_{S_j} (\mathbf{n}_j\mathbf{r})\, dS \int dE \int d\boldsymbol{\Omega}\, [\varphi^+\hat{\Sigma}_{\mathrm{int}}\varphi - \varphi^+\hat{\Sigma}_{\mathrm{ext}}\varphi]. \tag{5}$$

В последнем члене интегралы берутся по всем поверхностям, на которых сечения терпят разрыв, включая и внешнюю границу реактора. Величины Σ_{int} и Σ_{ext} — соответственно сечения внутренней и внешней среды (по отношению к выбранному направлению внешней нормали $\mathbf{n}_j$). Выражение вида

$$\int dE \int d\boldsymbol{\Omega}\varphi^+\hat{\Sigma}\varphi \equiv K(\mathbf{r}), \tag{6}$$

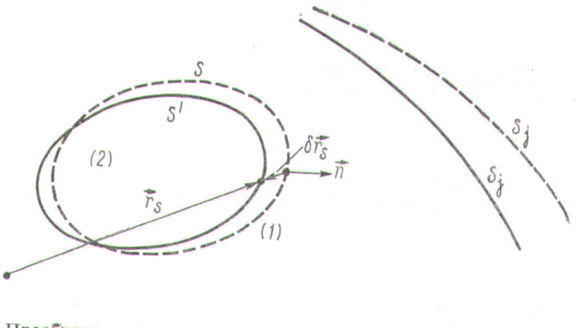
фигурирующее в уравнении (5), представляет собой коэффициент реактивности материала реактора в точке $\mathbf{r}$. Очевидно, он пропорционален изменению $K_{\text{эфф}}$ при создании малой полости вокруг точки $\mathbf{r}$ в критическом реакторе [1].

Формула (5) связывает интеграл реактивности J произвольного реактора с градиентами сечений, а для реактора, состоящего из совокупности однородных зон,— со значениями скачков коэффициентов реактивности на границах всех зон [4]:

$$J \equiv \int_V K(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \sum_j \int_{S_j} (\mathbf{rn}_j)\, [K_{\mathrm{int}}(\mathbf{r}) - K_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})]\, dS. \tag{7}$$

Примеры использования этого соотношения для анализа некоторых прикладных реакторных задач приведены в работе [5].

Используем формулу (7) для определения точного потока нейтронов на границе голой критической сферы. Как известно, решение таких задач даже в односкоростном случае требует сложного аналитического аппарата и значительных численных расчетов [6—8]. Во всей опубликованной литературе только в работе [9] приведены рассчитанные j_N-методом потоки нейтронов для трех критических сфер. В работе [8] методом Кейза [10] получены односкоростные кинетические потоки нейтронов для бесконечно протяженных критических пластин. Эти данные также могут дать информацию



Преобразование реактора при бесконечно малом сжатии.

Потоки нейтронов на границе критических сфер

c	R	$\Phi(R)$	$\varphi_0(R)$	$\widetilde{\varphi_0}(R)$	Значения $\varphi_0(R)$ взяты из работ
1,028	10,0	0,071	0,056	0,056	[9]
1,1	4,87	0,129	0,103	0,105	[8]
1,3	2,46	0,227	0,179	0,180	[8]
1,6	1,48	0,281	0,218	0,222	[8]
2,0	0,99	0,324	0,247	0,255	[8]
3,237	0,50	0,376	0,304	0,318	[9]

о распределении потока нейтронов в эквивалентных сферических системах. Для однородной критической сферы полный поток нейтронов $\varphi_0(r)$ описывается уравнением [7]

$$r\varphi_0(r)=\frac{c}{2}\int_{-R}^{R} r'\varphi_0(r')\,E_1(|r'-r|)\,dr', \tag{8}$$

где R — критический радиус в длинах свободного пробега; c — число вторичных нейтронов на одно столкновение.

Решение $\varphi_0(r)\,r$ этого уравнения тождественно второй собственной функции аналогичного уравнения для критической пластины толщиной $2R$. Поэтому для значений $r \geqslant \frac{1}{2}(R+x_0)$ поведение $\varphi_0(r)$ можно определить из основного распределения $\psi(x)$ в критической пластине толщиной $(R-x_0)$, где x_0 — длина экстраполяции. При этом $\varphi_0(r)=\frac{\psi(x)}{r}$ для сопоставляемых точек $x=r-\frac{1}{2}(R+x_0)$.

Потоки нейтронов $\varphi_0(R)$ на границе критических сфер, полученные по данным работ [8] и [9], приведены в таблице. Величины $\Phi(R)$ представляют потоки нейтронов, найденные с помощью диффузионной теории; эти значения превышают истинные потоки на 25—30%. (Все потоки нормированы на единицу в центре сферы.)

Покажем, как величины $\varphi_0(R)$ могут быть определены из формулы (7) путем элементарных расчетов.

Для голой однородной сферы, согласно выражению (7), получим

$$J=4\pi\int_0^R K(r)\,r^2\,dr=4\pi K(R)\,R^3. \tag{9}$$

Коэффициент реактивности в односкоростной кинетической теории имеет вид

$$K(r)=c\varphi_0^2(r)-$$
$$-2\int_{-1}^{1}\varphi(r,\mu)\,\varphi(r,-\mu)\,d\mu;\quad K(R)=c\varphi_0^2(R).$$

Поток $\varphi_0(R)$ на границе голой сферы определяется выражением

$$\varphi_0(R)=\sqrt{\frac{J}{4\pi cR^3}}. \tag{10}$$

При интегрировании по объему сферы основной вклад в интеграл реактивности J внесут внутренние области, где кинетический поток нейтронов $\varphi_0(r)$ близок к диффузионному распределению: $\Phi(r)=\sin Br/Br$ (B — материальный параметр). Поэтому точное значение J можно аппроксимировать его диффузионным эквивалентом.

Коэффициент реактивности в диффузионной теории имеет вид

$$K_{\text{дифф}}(r)=(c-1)\,\Phi^2(r)+3\left(\frac{c-1}{B^2}\right)^2\Phi'^2(r). \tag{11}$$

Соответственно интеграл реактивности может быть записан в форме

$$\frac{1}{4\pi}J_{\text{дифф}}=(c-1)\left(1+3\,\frac{c-1}{B^2}\right)\int_0^R \Phi^2(r)\,r^2\,dr+$$
$$+3\left(\frac{c-1}{B^2}\right)^2\Phi(R)\,\Phi'(R)\,R^2. \tag{12}$$

Вычисление этого выражения и подстановка полученных результатов в уравнение (10) приводит к достаточно удовлетворительной аппроксимации потоков на границе сфер $\widetilde{\varphi_0}(R)$, которые отличаются от точных $\varphi_0(R)$ на 2—3% в диапазоне c от единицы до двух. Отклонения имеют положительный знак, так как диффузионная форма интеграла реактивности завышает его точное значение.

Поступило в Редакцию 10/VII 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Стумбур. «Атомная энергия», **23**, 255 (1967).
2. А. Вейнберг, Е. Вигнер. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Г. И. Марчук, В. В. Орлов. В сб. «Нейтронная физика». М., Госатомиздат, 1961, стр. 30.
4. Э. А. Стумбур. «Атомная энергия», **25**, 522 (1968).
5. Э. А. Стумбур, С. П. Сазонов. «Атомная энергия», **27**, 55 (1969).
6. K. Case et al. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. Vol. I. Washington, Government Press, 1953.
7. Б. Дэвисон. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
8. G. Mitsis. Nucl. Sci. and Engng, **17**, 55 (1963).
9. T. Asaoka. J. Nucl. Energy, **22**, 99 (1968).
10. K. Case. Ann. Phys., 9, 1 (1960).