

## Свойства псевдоскалярных мезонов в формализме уравнения Солпитера

Е. А. Дей

Методом конечных элементов выполнено численное решение системы однородных интегральных уравнений Солпитера, описывающей псевдоскалярные связанные состояния системы кварк-антикварк. Вычислен спектр масс и волновые функции Солпитера для нейтральных псевдоскалярных тяжелых мезонов.

**Ключевые слова:** уравнение Солпитера, связанное состояние, псевдоскалярные мезоны.

The numerical solution of the system of homogeneous integral Salpeter equations for pseudoscalar quark-antiquark bound states is obtained with the finite element method. Masses and Salpeter wave functions for neutral pseudoscalar heavy mesons are calculated.

**Keywords:** Salpeter equation, bound state, pseudoscalar mesons.

### Введение

Для исследования свойств мезонов как связанных состояний кварка и антикварка в настоящее время применяется широкий набор методов и подходов – от нерелятивистских моделей до решеточных вычислений. Одним из способов учета релятивистских свойств кварков является одновременное приближение для уравнения Бете-Солпитера, приводящее к уравнению Солпитера [1].

Наиболее широко для численного решения уравнения Солпитера применяется вариационный метод по системе функций, построенных по полиномам Лагерра [2], и метод кубических В-сплайнов [3]. В данной работе уравнение Солпитера для состояний с квантовыми числами  $0^+$  решается численно методом коллокации в базисе линейных конечных элементов.

### 1 Уравнения Солпитера для псевдоскалярного кваркония

Уравнение Бете-Солпитера для системы кварк-антикварк имеет общий вид [2–4]:

$$(\hat{p}_1 - m_1) \chi_{P\alpha}(p) (\hat{p}_2 - m_2) = i \sum_j \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V^j(P, p, k) \Gamma^j \chi_{P\alpha}(k) \Gamma^j, \quad (1)$$

где  $P, p$  – полный и относительный импульсы частиц в системе,  $p_1 = \alpha_1 P + p$ ,  $p_2 = \alpha_2 P - p$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ;  $V^j(P, p, k)$  – компоненты оператора взаимодействия, имеющие стандартную матричную структуру,  $\Gamma^S = 1$ ,  $\Gamma^V = \gamma^\mu$ ,  $\Gamma^T = \sigma^{\mu\nu}$ ,  $\Gamma^A = \gamma^\mu \gamma^5$ ,  $\Gamma^P = \gamma^5$ . Для систем, состоящих из кварков одного аромата,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ . Функция  $\chi(p)$  есть фурье-образ волновой функции Бете-Солпитера:

$$\chi_{P\alpha}(x_1, x_2) = \langle 0 | T [\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] P\alpha \rangle = e^{iPx} \chi_{P\alpha}(x). \quad (2)$$

Пропагатор кварка выражается через проекционные операторы:

$$\Lambda_\mu^\pm(\vec{p}) = \frac{1}{2\omega(\vec{p})} (\omega(\vec{p}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \pm m\gamma^0)), \quad \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$\frac{1}{\hat{p} - m} = \left( \frac{\Lambda_+^+(\vec{p})}{p^0 - \omega(\vec{p}) + i\varepsilon} + \frac{\Lambda_-^+(\vec{p})}{p^0 + \omega(\vec{p}) - i\varepsilon} \right) \gamma^0 = \gamma^0 \left( \frac{\Lambda_+^-(\vec{p})}{p^0 - \omega(\vec{p}) + i\varepsilon} + \frac{\Lambda_-^-(\vec{p})}{p^0 + \omega(\vec{p}) - i\varepsilon} \right). \quad (3)$$

Одновременное приближение для уравнения (1) подразумевает, что все взаимодействия между частицами системы являются мгновенными в системе центра масс  $P = (M, \vec{0})$ , так что

ядро уравнения зависит только от трехмерных импульсов  $V \equiv V(\vec{p} - \vec{k})$ . Как следствие, волновая функция Солпитера в системе центра масс  $\vec{P} = 0$ ,  $P = M$  определяется соотношением

$$\varphi(\vec{k}) = i \int \frac{dk_0}{2\pi} \chi(k). \quad (4)$$

После интегрирования по  $dp_0$  уравнение (1) принимает вид [4]:

$$\left(\frac{M}{2} - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - m\gamma^0\right)\varphi(\vec{p}) + \varphi(\vec{p})\left(\frac{M}{2} - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\gamma^0\right) = i \sum_j \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} V^j(\vec{p} - \vec{k}) \Lambda_+^+(\vec{k}) \gamma^0 \Gamma^j \varphi(\vec{k}) \Gamma^j \gamma^0 \Lambda_-^-(\vec{k}) - \\ - i \sum_j \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} V^j(\vec{p} - \vec{k}) \Lambda_-^+(\vec{k}) \gamma^0 \Gamma^j \varphi(\vec{k}) \Gamma^j \gamma^0 \Lambda_+^-(\vec{k}). \quad (5)$$

Уравнение Солпитера (5) представляет собой одновременное приближение ковариантного формализма Бете-Солпитера и реализует теоретическое описание системы в трехмерном импульсном пространстве.

Для учета физических свойств кварк-антикваркового взаимодействия обычно используют суперпозицию потенциала одноглюонного обмена и запирающего потенциала, соответствующего линейному поведению в координатном представлении. В ряде работ в потенциал вводится также постоянная составляющая [4; 8]:

$$V(\vec{p} - \vec{k}) = \frac{4\pi\bar{\alpha}_s}{(\vec{p} - \vec{k})^2} \gamma_\mu^{(1)} \gamma_\mu^{(2)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left( \frac{4\pi\lambda}{(\vec{p} - \vec{k})^2 + \varepsilon^2} \right) + u. \quad (6)$$

Здесь  $\bar{\alpha}_s$  – константа одноглюонного обмена,  $\lambda$  – интенсивность запирающего взаимодействия.

Учет квантовых чисел мезона выполняется разложением волновой функции по полной системе инвариантов алгебры Дирака и выделением в полной волновой функции скалярных амплитуд и множителей, определяющих ее трансформационные свойства. Так, для состояния  $0^+$  волновая функция имеет общую структуру [5]:

$$\varphi(\vec{p}) = \varphi_1(p) \gamma^5 + \varphi_2(p) \left( \gamma^0 \gamma^5 + \gamma^5 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{m} \right). \quad (7)$$

Для скалярных функций  $\psi_1(p) = p\varphi_1(p)$ ,  $\psi_2(p) = p\varphi_2(p)$  в результате частичного разложения оператора взаимодействия получается система интегральных уравнений с симметричными ядрами:

$$M\psi_1(p) = \left[ \frac{2\omega^2(p)}{m} + u \frac{m}{\omega(p)} \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \psi_2(p) + \frac{m}{\omega(p)} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} pk V_2(p, k) \psi_2(k); \\ M\psi_2(p) = m \left( 2 + \frac{u}{\omega(p)} \right) \psi_1(p) + \frac{m}{\omega(p)} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} pk V_1(p, k) \psi_1(k). \quad (8)$$

Соответствующее условие нормировки имеет вид:

$$\frac{8}{m} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} \omega(p) \psi_1(p) \psi_2(p) = 2M. \quad (9)$$

Оператор взаимодействия в (8) содержит компоненты:

$$V_1(p, k) = V_0^S(p, k) - 4V_0^V(p, k); \quad V_2(p, k) = V_0^S(p, k) - \frac{pk}{m^2} V_1^S(p, k) + 2V_0^V(p, k); \\ V_{0,1}^S(p, k) = \frac{8\pi^2\lambda}{pk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} Q_{0,1} \left( \frac{p^2 + k^2 + \varepsilon^2}{2pk} \right); \quad V_0^V(p, k) = \frac{8\pi^2\bar{\alpha}_s}{pk} Q_0 \left( \frac{p^2 + k^2}{2pk} \right). \quad (10)$$

Величины  $V_0^S(p, k)$ ,  $V_1^S(p, k)$  и  $V_0^V(p, k)$  – элементы парциального разложения запирающей и одноглюонной компонент оператора взаимодействия (6), выражающиеся через функции Лежандра второго рода  $Q_0(z)$ ,  $Q_1(z)$ .

Таким образом, для расчета свойств составной системы кварк-антикварк необходимо решить систему двух однородных интегральных уравнений, ядра которых имеют интегрируемые логарифмические особенности. Для решения таких задач используются различные способы регуляризации или модификации интегрального ядра [5; 6]. В данной работе рассмотрен подход, использующий метод конечных элементов, позволяющий вычислить интегралы по области каждого элемента аналитически.

## 2 Этапы численного метода и результаты расчетов

Для численного решения область изменения аргументов ограничивалась достаточно большим значением  $0 \leq p \leq p_{\max}$  и разбивалась на  $N$  равных конечных элементов. Искомые волновые функции выражались через функции формы конечных элементов:

$$\psi_1(p) = \sum_{i=1}^N \psi_i F_i(p); \quad \psi_2(p) = \sum_{i=1}^N \psi_{N+i} F_i(p). \quad (11)$$

Преимущество метода конечных элементов состоит в том, что все интегралы вычисляются не от неизвестных функций  $\psi_1(k)$ ,  $\psi_2(k)$ , а от функций формы, имеющих простой явный вид, так что большинство интегралов может быть вычислено аналитически.

В соответствии с методом коллокаций, в каждом узле невязка точного и численного решения системы уравнений (7) должна обращаться в ноль. В качестве узлов коллокации использовались центральные точки конечных элементов. С учетом выражений (9) при этом получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных значений волновой функции в узлах конечных элементов:

$$\left[ \frac{2\omega_i}{m} + \frac{mU}{\omega_i} \left( 1 - \frac{p_i^2}{m^2} \right) \right] \psi_{N+i} + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_i} \sum_{j=1}^N \left( p_i I_1 - \frac{p_i^2}{m^2} I_2 + 2p_i I_3 \right) \psi_{N+j} = M \psi_i;$$

$$m \left( 2 + \frac{U}{\omega_i} \right) \psi_i + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_i} \sum_{j=1}^N (p_i I_1 - 4p_i I_3) \psi_j = M \psi_{N+i}. \quad (12)$$

В системе уравнений (12) использованы обозначения:

$$I_{i,j}^{(1)} = \int_{k_{j-1}}^{k_j} k V_0^S(p_i, k) dk; \quad I_{i,j}^{(2)} = \int_{k_{j-1}}^{k_j} k^2 V_1^S(p_i, k) dk; \quad I_{i,j}^{(3)} = \int_{k_{j-1}}^{k_j} k V_0^V(p_i, k) dk.$$

Полученная система линейных уравнений образует задачу на собственные значения  $M$  для квадратной матрицы  $A$ , действующей на объединенный вектор  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,N}, \psi_{2,1}, \dots, \psi_{2,N})$ :

$$\sum_{j=1}^{2N} A_{i,j} \psi_j = M \psi_i; \quad i = 1..2N. \quad (13)$$

Задача на собственные значения решалась для объединенного вектора, содержащего узловые значения каждой волновой компоненты. В результате каждое собственное значение встречается дважды, но с противоположными знаками. Этот факт может служить косвенным подтверждением правильности численного решения.

Для системы  $c\bar{c}$  (чармоний) параметры расчета подбирались по массе состояния  $1S$   $M_{\eta_c} = 2.9803$  ГэВ [5]. Вычисленные значения массы последующих состояний при значениях  $p_{\max} = 16$ ,  $N = 200$ ,  $m_c = 1.28$ ,  $u = 0.042$ ,  $\alpha_s = 0.288$ ,  $\lambda = 0.28$  приведены в таблице 1. Там же приведены результаты расчетов массы  $b\bar{b}$ -системы (параметры расчета  $m_b = 4.96$ ,  $u = -0.794$ ,  $\alpha_s = 0.23$ ,  $\lambda = 0.28$ ). Для сравнения в таблице 1 приведены также экспериментальные

данные для спектра масс  $\eta_c$  [5] и результаты работы [6], в которой использована иная параметризация взаимодействия, для спектра  $\eta_b$ .

Таблица 1 – Спектр масс псевдоскалярных состояний чармония

Состояние	$M(\eta_c)$	$M(\eta_c)$ [5]
1S	2.980	2.9803
2S	3.642	3.637
3S	4.049	
4S	4.353	

Таблица 2 – Спектр масс псевдоскалярных состояний боттомония

Состояние	$M(\eta_b)$	$M(\eta_b)$ [6]
1S	9.39	9.39
2S	9.94	9.95
3S	10.326	10.311
4S	10.645	

Собственный вектор  $\psi$ , вычисляемый из (9) для отдельного собственного значения, содержит компоненты обеих волновых функций. На рисунках 1 и 2 приведены графики вычисленных волновых функций  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  для состояния  $\eta_c$  (1S) и  $\eta_b$  (1S) соответственно, нормированных в соответствии с условием (6).

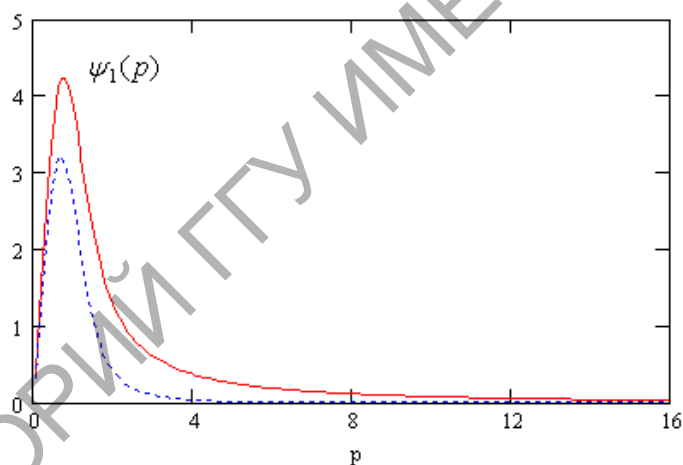


Рисунок 1 – график волновых функций  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  для  $\eta_c$  (2980)

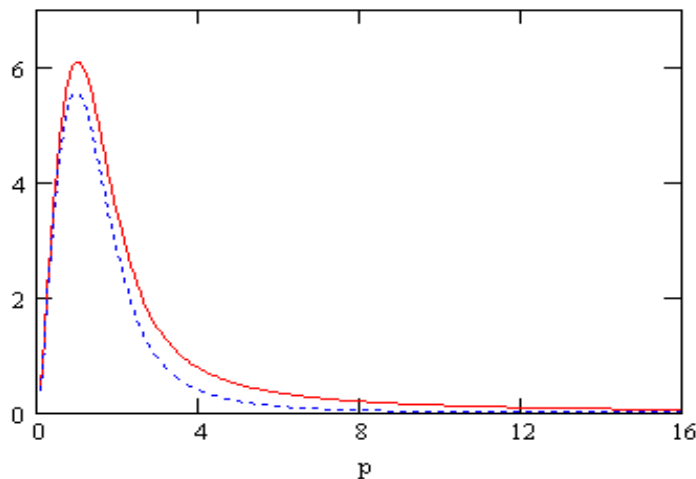


Рисунок 2 – график волновых функций  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  для  $\eta_b$  (9390)

Графики волновых функций показывают, что для тяжелых кваркониев вполне допустимым является предположение о равенстве двух волновых функций псевдоскалярного состояния.

Таким образом, метод коллокации по системе конечных элементов является удобным инструментом для численного решения уравнения Солпитера. Дальнейшее повышение точности численных результатов может быть достигнуто, во-первых, использованием конечных элементов высших порядков и, во-вторых, использованием эрмитовых конечных элементов, обеспечивающих непрерывность не только волновой функции, но и ее первых производных.

### Литература

1 Salpeter, E.E. Mass Corrections to the Fine Structure of Hydrogen-Like Atoms / E.E. Salpeter // *Phys. Rev.* – 1952. – V. 87. – P. 328–343.

2 Resag, J. Heavy quarkonia in a covariant Salpeter model / J. Resag, C.R. Münz // *Nucl. Phys.* – 1995. – V. A590. – P. 735–749.

3 Spence, J.R. Solving momentum-space integral equations for quarkonium spectra with confining potentials. Bethe-Salpeter equation with spin / J.R. Spence, J.P. Vary // *Phys. Rev.* – 1993. – V. C47. – P. 1282–1293.

4 Linde, J. Charmonium in the instantaneous approximation / J. Linde, H. Snellman // *Nucl. Phys.* – 1997. – V. A619. – P. 346–378.

5 Ivanov, I.A. Treatment of the Coulomb singularity in momentum space calculations / I.A. Ivanov, J. Mitroy // *Comp. Phys. Comm.* – 2001. – V. 134. – P. 317–320.

6 Амирханов, И.В. Релятивистские уравнения для связанных состояний с кулоновским и линейным потенциалами / И.В. Амирханов, Е.В. Земляная, И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина // *Математическое моделирование.* – 2000. – Т. 12. – № 12. – С. 79–96.

7 Nakamura, K. Review of Particle Physics / K. Nakamura and Particle Data Group 2010 // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* – 2010. – V. 37.

8 Chang, C.-H. Spectrum for Heavy Quarkonia and Mixture of the Relevant Wave Functions within the Framework of Bethe-Salpeter Equation / C.-H. Chang, G.-L. Wang // *arXiv.org.* – 2010. – hep-ph/1003.3827.

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины

Поступило 17.11.11