МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

К ВОПРОСУ О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ θ-ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

ON THE PROBLEM OF INTERSECTIONS OF THE MAXIMAL θ-SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, π − некоторое множество простых чисел. Доказаны теоремы, отражающие общие закономерности пересечений максимальных подгрупп конечной группы G взаимно простых с числами из π индексов, включающие утверждения о пересечениях $\Phi_{\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)}}(G)$ и $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi}(G)}}(G)$.

***Ключевые слова**: формации конечных групп, подгрупповой m-функтор, пересечения максимальных θ-подгрупп конечной группы.*

Let $\mathfrak{F}$ be a nonempty formation, π − some set of prime numbers. The theorems reflecting the general regularities on intersections of maximal subgroups of a finite group mutually simple with numbers from π indexes including statements on the intersections $\Phi_{\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)}}(G)$ and $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi}(G)}}(G)$ are received.

***Keywords**: formations of finite groups, subgroup m-functor, intersections of maximal θ-subgroups in a finite group.*

Введение

Результаты В.С. Монахова [1], [2] о пересечениях всех максимальных подгрупп и всех максимальных абнормальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга $\mathrm{F}(G)$, в конечной разрешимой ненильпотентной группе G были распространены в работе [3] на пересечения всех максимальных подгрупп π'-индексов $\pi'd$-группы, π − некоторое множество простых чисел, и на пересечения всех максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп π'-индексов конечной не $\mathfrak{F}$-группы, $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ – локальная S_n-замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$, в том числе на случай $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$, а также на пересечения соответствующих максимальных подгрупп без ограничений на их индексы (случаи, возникающие при $\pi=\varnothing$). В работе доказанные ранее утверждения включены в результаты, отражающие общие закономерности пересечений максимальных подгрупп, полученные с использованием понятия подгруппового m-функтора, определённого в [4]. Для случая $\pi=\varnothing$, $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}$ распространение результатов [1], [2] на необязательно разрешимые конечные группы с применением функторного метода было осуществлено в работе [5].

1 Предварительные сведения и результаты

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [6].

Под подгрупповым m-функтором будем понимать всякое отображение θ, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ-подгруппами группы G.

Подгрупповой m-функтор θ, удовлетворяющий условию $\theta(G^\varphi)=\{H^\varphi \mid H\in\theta(G)\}$ для любого изоморфизма φ группы G, назовём подгрупповым m_i-функтором.

Определение подгруппового m-функтора, рассматриваемого как подгрупповой m_i-функтор, принадлежит авторам книги [4, с. 13−14].

Подгрупповой m-функтор θ назовём подгрупповым m_s-функтором при выполнении условия: если $H\in\theta(G)$, то $H^x\in\theta(G)$ для всех $x\in G$.

Подгрупповые m_i-функтор и m_s-функтор будем называть также подгрупповыми m-функторами, обладающими свойствами i и s соответственно.

Пусть θ $-$ подгрупповой *m*-функтор. Через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ-подгрупп группы G. Легко видеть, что подгруппа $\Phi_\theta(G)$ является характеристической в *G*, если θ $-$ подгрупповой m_i-функтор, и подгруппа $\Phi_\theta(G)$ нормальна в *G*, если θ $-$ подгрупповой m_s-функтор.

Пусть $\mathfrak{F}$ $-$ непустая формация, θ $-$ подгрупповой *m*-функтор. Согласно принятым в [7] обозначениям, пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп группы G обозначаем через $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$. Если для любой группы G множество $\theta(G)$ включает все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G, то θ будем называть $\mathfrak{F}$-абнормально полным подгрупповым *m*-функтором. В частном случае, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}$ $-$ формация всех нильпотентных групп, получаем определение абнормально полного подгруппового *m*-функтора, введённого и рассматриваемого для подгруппового m_s-функтора в [7].

Подгрупповой *m*-функтор θ называется регулярным (эпиморфным) [4], если для любой нормальной подгруппы *N* группы *G* выполняются следующие условия:

1) из $H\in\theta(G)$ всегда следует $HN/N\in\theta(G/N)$;

2) из $H/N\in\theta(G/N)$ всегда следует $H\in\theta(G)$.

Обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi'=\mathrm{P}\setminus\pi$, где P – множество всех простых чисел, считаем также, что $\pi\neq\mathrm{P}$. Пусть θ $-$ подгрупповой *m*-функтор, $\mathfrak{F}$ $-$ непустая формация. Через θ_π будем обозначать подгрупповой *m*-функтор, сопоставляющий каждой группе *G* саму группу *G* и множество всех тех её максимальных θ-подгрупп, индекс каждой из которых не делится на числа из π; пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ_π-подгрупп группы G обозначают $\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. Если для любой группы G множество $\theta(\mathrm{G})\setminus\{\mathrm{G}\}$ совпадает с множеством всех максимальных (всех максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных) подгрупп в G, то $\Phi_{\theta_\pi}(G)=\Phi_\pi(G)$, $(\Phi_{\theta_\pi}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно). В случае $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}$ используются обозначения $\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_{\theta_\pi}(G)$, $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi(G)$.

Пусть N $-$ нормальная подгруппа группы G. Через $\Phi_{\theta,\overline{N}}(G)$ $(\Phi_{\theta,N}(G))$ обозначаем пересечение всех максимальных θ-подгрупп группы *G*, не содержащих (содержащих, соответственно) N, θ $-$ подгрупповой *m*-функтор. Пересечение всех максимальных (всех максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных) подгрупп группы *G*, каждая из которых имеет взаимно простой с числами из π индекс и не содержит *N*, обозначаем через $\Phi_{\pi,\overline{N}}(G)$ $(\Delta_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ соответственно).

Если в группе *G* не существует максимальных подгрупп, отвечающих указанным требованиям, соответствующие пересечения считаем совпадающими с *G*.

Подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_N(G)$ группы G, N $-$ нормальная подгруппа в G, определяется следующим образом: $\tilde{\mathrm{F}}_N(G)\supseteq N$, $Soc(G/N)=\tilde{\mathrm{F}}_N(G)/N$ [3]. Пусть θ $-$ подгрупповой m_s-функтор. Тогда подгруппы $\Phi_{\theta_\pi}(G)$, $\Delta_{\theta_\pi}(G)$ нормальны в группе *G*. Через $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\theta}(G)$ обозначаем в дальнейшем $\tilde{\mathrm{F}}_N(G)$, если $N=\Phi_\theta(G)$. В случаях, когда $N\in\{\Phi_\pi(G)$, $\Phi_{\theta_\pi}(G), \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G), \Delta_\pi(G), \Delta_{\theta_\pi}(G), \Delta(G)\}$, используем обозначения $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi}(G)$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G)$ и $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta}(G)$ соответственно.

Лемма 1.1. *Пусть* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ $-$ *непустые формации,* $\pi(\mathfrak{F}_1)\cap\pi(\mathfrak{F}_2)=\varnothing$, $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. *Для всякой формации* $\mathfrak{F}_3$, *удовлетворяющей условию* $\mathfrak{F}_2\subseteq\mathfrak{F}_3\subseteq\mathfrak{F}_0$, *и максимальной,* $\pi(\mathfrak{F}_2)$*-индекса подгруппы H в группе G равносильны условия: подгруппа H* $\mathfrak{F}_i$*-абнормальна в* G, $i\in\{0,2,3\}$.

Доказательство. Докажем вначале, что условие $\mathfrak{F}_0$-абнормальности максимальной, $\pi(\mathfrak{F}_2)$-индекса подгруппы группы *G* равносильно условию её $\mathfrak{F}_2$-абнормальности в G.

Так как $\mathfrak{F}_2\subseteq\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, то $G^{\mathfrak{F}_0}\subseteq G^{\mathfrak{F}_2}$, а значит, $\mathfrak{F}_0$-абнормальность всякой максимальной подгруппы группы G влечёт её $\mathfrak{F}_2$-абнормальность в *G*.

Пусть *H* $-$ $\mathfrak{F}_2$-абнормальная максимальная, $\pi(\mathfrak{F}_2)$-индекса подгруппа группы G. Значит, $G\neq 1$, и предположим, что *H* $\mathfrak{F}_0$-нормальна в G, т. е. $G^{\mathfrak{F}_0}\subseteq H$. Обозначая $\overline{G}=G/G^{\mathfrak{F}_0}\in\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, $\overline{H}=H/G^{\mathfrak{F}_0}$, имеем: $(\overline{G})^{\mathfrak{F}_2}=\overline{N}=N/G^{\mathfrak{F}_0}\in\mathfrak{F}_1$, $\overline{G}/\overline{N}\in\mathfrak{F}_2$. Обозначим $\pi(\mathfrak{F}_1)=\pi$, тогда $\pi(\mathfrak{F}_2)\subseteq\pi'$. Если $\overline{H}$ не содержит $\overline{N}$, то $\overline{H}\overline{N}=\overline{G}$, $|\overline{G}:\overline{H}|$ $-$ π-число, что противоречит условию $|G:H|$ $-$ π'-число. Значит, $\overline{N}\subseteq\overline{H}$, а потому $N\subseteq H$. Так как $G/N\cong\overline{G}/\overline{N}$, то $G^{\mathfrak{F}_2}\subseteq N\subseteq H$. Полученное противоречие с $\mathfrak{F}_2$-абнормальностью *H* означает, что предположение о $\mathfrak{F}_0$-нормальности H в G неверно, подгруппа H $\mathfrak{F}_0$-абнормальна в G.

Завершение доказательства леммы следует из того, что $G^{\mathfrak{F}_0}\subseteq G^{\mathfrak{F}_3}\subseteq G^{\mathfrak{F}_2}$.

В работе [8] вводилось определение радикальной локальной формации $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{I}^{\mathrm{M}}_{\pi'}$, содержащей $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$; $\mathfrak{I}^{\mathrm{M}}_{\pi'} = \bigcap_{\varphi\in\mathrm{M}}(\mathfrak{I}_\varphi)_{\pi'}$, где $(\mathfrak{I}_\varphi)_{\pi'}$ − формация всех φ-дисперсивных π'-групп, φ пробегает некоторое множество *M* линейных упорядочений множества всех простых π'-чисел. В случае $\pi=\varnothing$ для формации $\mathfrak{I}^{\mathrm{M}}_{\pi'}$ принимается обозначение $\mathfrak{I}^{\mathrm{M}} = \bigcap_{\varphi\in\mathrm{M}}\mathfrak{I}_\varphi$.

***Следствие* 1.1.1.** *Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Условие абнормальности максимальной, π'-индекса подгруппы H в группе G равносильно условию $\mathfrak{N}_{\pi'}$-абнормальности и условию $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$-абнормальности H в G.*

(2) *Условия $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{I}^{\mathrm{M}}_{\pi'}$-абнормальности и $\mathfrak{I}^{\mathrm{M}}_{\pi'}$-абнормальности максимальной, π'-индекса подгруппы H в группе G равносильны.*

Группу *M* называют квазинильпотентной ([9], с. 124), если $HC_M(H/K)=M$ для любого главного фактора H/K группы M. Через $\mathfrak{N}^*_{\pi'}$ ($\mathfrak{N}^*$) обозначаем формацию всех квазинильпотентных π'-групп, $2\in\pi'$ (формацию всех квазинильпотентных групп, соответственно); $\mathrm{F}^*_{\pi'}(G)$ − $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}^*_{\pi'}$-радикал группы *G*.

***Теорема* 1.1.** *Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, то:*

(1) $\mathrm{F}^*_{\pi'}(G)\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$;

(2) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi}(G)$.

Доказательство. (1) Ввиду S_n-замкнутости формации $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}^*_{\pi'}$ нормальная в $G/\Phi_\pi(G)$ π'-подгруппа $\mathrm{F}^*_{\pi'}(G)/\Phi_\pi(G)$ содержится в $\mathfrak{N}^*_{\pi'}\subseteq\mathfrak{N}^*$, а значит, с учётом леммы 2.4 (3) из [3],

$$\mathrm{F}^*_{\pi'}(G)/\Phi_\pi(G)\subseteq\mathrm{F}^*(G/\Phi_\pi(G))=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)/\Phi_\pi(G).$$

Следовательно, $\mathrm{F}^*_{\pi'}(G)\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$.

Утверждение (2) вытекает из теоремы 3.2 [3], согласно которой $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G)$, и утверждения (1) следствия 1.1.1 леммы 1.1. Теорема доказана.

***Следствие* 1.1.1** [5]. Для любой группы *G* справедливо включение $\mathrm{F}^*(G)\subseteq\tilde{\mathrm{F}}(G)$.

***Следствие* 1.1.2** [3]. Для любой группы *G* справедливо равенство $\tilde{\mathrm{F}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta}(G)$.

***Лемма* 1.2.** *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если θ − $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой m-функтор, то $\Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G)=\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)=\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$. В частности, $\Delta_{\theta_\pi}(G)=\Delta_\pi(G)$, если θ − абнормально полный подгрупповой m-функтор.*

(2) *Пусть θ − абнормально полный подгрупповой m-функтор. Если формация $\mathfrak{F}$ содержит формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, то подгрупповой m-функтор θ является $\mathfrak{F}$-абнормально полным и*

$$\Delta_\pi(G)=\Delta_{\theta_\pi}(G)\subseteq\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)=\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G).$$

Доказательство. (1) Так как множество $\theta(G)$ включает все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы G, то множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп группы G, откуда $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G)$. Множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп π'-индексов в G, следовательно, совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп π'-индексов в G, а значит, $\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$.

(2) Так как $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{F}$, то, очевидно, множество всех абнормальных максимальных подгрупп группы G содержит все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G, откуда $\Delta(G)\subseteq\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\Delta_\pi(G)\subseteq\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$. А так как θ − абнормально полный подгрупповой *m*-функтор, то множество $\theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы, а значит, и все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G, т. е. θ − $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой *m*-функтор. По утверждению (1) $\Delta_\pi(G)=\Delta_{\theta_\pi}(G)$ и $\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$. Лемма доказана.

***Следствие* 1.2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ − абнормально полный подгрупповой m-функтор. Тогда $\Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G)=\Delta^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$.*

Следствие 1.2.1 вытекает непосредственно из леммы 1.2 и известного результата Селькина М.В. [6, следствие 8.7.1], указывая на избыточность требования регулярности подгруппового *m*-функтора θ и обладания им свойством s в условии следствия 5 работы [7].

***Следствие* 1.2.2.** *Пусть θ − абнормально полный подгрупповой m_s-функтор. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, то*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi}(G).$$

(2) $\tilde{\mathrm{F}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\theta}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta}(G)$ *для любой группы G.*

Доказательство. (1) Понятно, что

$$\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G)$$

ввиду утверждения (1) леммы 1.2. Следовательно, по лемме 3.3 [3]

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi}(G).$$

По теореме 1.1 (2) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi}(G)$. Утверждение (2) вытекает из утверждения (1), если положить $\pi = \varnothing$. Следствие доказано.

2 Достаточные условия справедливости утверждения $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_{\theta_\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}}(G) \neq G$ для группы G и подгруппового m_s-функтора θ и вытекающие из него следствия

Теорема 2.1. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Для всякой группы G и подгруппового m_s-функтора θ справедливо равенство*

$$\Phi_{\theta_\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G).$$

(2) *Пусть θ − $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой m_s-функтор, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть группа $G \notin \mathfrak{F}$, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Тогда $\Phi_{\theta_\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}}(G) \neq G$.*

Доказательство. (1) Заметим, что для всякой группы G, подгруппового m_s-функтора θ и нормальной в G подгруппы N подгруппа $\Phi_{\theta_\pi, \overline{N}}(G)$ нормальна в G. Обозначим $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) = N$.

Если $\Phi_{\theta_\pi}(G) = G$, то по определению $\Phi_{\theta_\pi, \overline{N}}(G) = G$. Пусть $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$. Тогда $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subset N$. Предположим, $\Phi_{\theta_\pi, \overline{N}}(G) \neq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. Тогда, очевидно, $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_{\theta_\pi, \overline{N}}(G) \cap \Phi_{\theta_\pi, N}(G)$. Пусть $K/\Phi_{\theta_\pi}(G)$ − минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_{\theta_\pi}(G)$ из $\Phi_{\theta_\pi, \overline{N}}(G)/\Phi_{\theta_\pi}(G)$. Так как $K \subseteq N$, то $\mathrm{K} \subseteq \Phi_{\theta_\pi, N}(G)$. Таким образом, $K/\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi, \overline{N}}(G) \cap \Phi_{\theta_\pi, N}(G)/\Phi_{\theta_\pi}(G) = 1$, что противоречит предположению о том, что $\Phi_{\theta_\pi, \overline{N}}(G) \neq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. Значит, $\Phi_{\theta_\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G)$. Утверждение (1) доказано.

(2) Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, содержащая все нильпотентные π'-группы $\mathfrak{N}_{\pi'}$, а подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, то по лемме 4 из [8] $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. По утверждению (1) леммы 1.2 $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subset G$. Следовательно, $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$, ибо $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. Из утверждения (1) следует $\Phi_{\theta_\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}}(G) \neq G$. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Если подгрупповой *m*-функтор θ является $\mathfrak{F}$-абнормально полным, то

$$\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$$

для любой группы G. Следующий результат вытекает из теоремы 2.1, так как $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, если для подгруппового m_s-функтора θ положить $\theta(G)$ состоящим из группы G и всех её $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп.

***Следствие* 2.1.1** [3, теорема 3.7]. *Имеют место следующие утверждения*:

(1) *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ – локальная S_n-замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть группа $G \notin \mathfrak{F}$, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Тогда $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)}}(G) \neq G$.*

(2) *Для всякой группы G и непустой формации $\mathfrak{F}$ выполняется равенство*

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)}}(G).$$

Полагая для подгруппового m_s-функтора θ и любой группы G множество $\theta(G)$ состоящим из группы G и всех её максимальных подгрупп, получаем $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$. А так как $\Phi_\pi(G) \neq G$ для $\pi'\mathrm{d}$-группы G при условии $\Phi_\pi(G) \in \mathrm{C}_\pi$, то применение теоремы 2.1 (1) приводит к следующему результату.

***Следствие* 2.1.2** [3, теорема 2.4]. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Для всякой группы G выполняется равенство* $\Phi_\pi(G) = \Phi_{\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)}}(G)$.

(2) *Пусть G – $\pi'\mathrm{d}$-группа, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Тогда в G существует хотя бы одна максимальная подгруппа, имеющая взаимно простой с числами из π индекс и не содержащая $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$.*

Теорема 2.2. *Пусть θ − абнормально полный подгрупповой m_s-функтор, G − группа. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) $\Phi_{\theta_\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G)$;

(2) *если $G \neq \mathrm{F}_{\pi'}(G)$, то $\Phi_{\theta_\pi, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)}}(G) \neq G$.*

Доказательство. По следствию 1.2.2 (1) леммы 1.2 $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'} \supseteq \mathfrak{N}$, то абнормально полный подгрупповой m_s-функтор θ является и $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$-абнормально полным. Поэтому теорема 2.2 следует из теоремы 2.1.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 2.2. Пусть подгрупповой абнормально полный m_s-функтор θ выделяет в каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и всех её абнормальных максимальных подгрупп. В этом случае из теоремы 2.2 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_π. *Тогда:*

(1) $\Delta_{\pi,\overline{\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}}(G)=\Delta_\pi(G)$;

(2) *если* $G\neq F_{\pi'}(G)$, *то в* G *существуют максимальные абнормальные подгруппы, имеющие взаимно простые с числами из* π *индексы и не содержащие* $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$, т. е. $\Delta_{\pi,\overline{\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}}(G)\neq G$.

Следующий результат получается из теоремы 2.2 при $\pi=\varnothing$ и доказан в [5] для случая θ − эпиморфный абнормально полный подгрупповой m_i-функтор.

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть* θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s-*функтор. Тогда для любой группы* G *справедливы утверждения:*

(1) $\Phi_{\theta,\overline{\tilde{F}(G)}}(G)=\Phi_\theta(G)$;

(2) *если* $G\neq F(G)$, *то* $\Phi_{\theta,\overline{\tilde{F}(G)}}(G)\neq G$.

Отметим также, что следствие 1 работы [5], а также следствие 2.4.1 теоремы 2.4 работы [3] о совпадении пересечения всех максимальных подгрупп неединичной группы G с пересечением всех её максимальных подгрупп, не содержащих $\tilde{F}(G)$, вытекает как из следствия 2.1.2 теоремы 2.1 (в случае $\pi=\varnothing$), так и из утверждения 1 следствия 2.2.2 теоремы 2.2 (множество $\theta(G)$ состоит из группы G и всех её максимальных подгрупп).

В случае, когда абнормально полный подгрупповой m_s-функтор θ выделяет в каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и всех её абнормальных максимальных подгрупп, из следствия 2.2.2 теоремы 2.2 вытекает лемма 1.4 и следствие 2 работы [5], а также следствие 3.7.5 теоремы 3.7 работы [3] о том, что в каждой ненильпотентной группе G существуют ненормальные максимальные подгруппы M такие, что $M\tilde{F}(G)=G$; пересечение всех таких максимальных ненормальных подгрупп совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$. Этот результат вытекает также из следствия 2.2.1 теоремы 2.2 при $\pi=\varnothing$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов, В.С.* Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – №4 (47). – С. 31–33.

2. *Монахов*, *В.С.* Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.

3. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

4. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. навука, 2003. – 254 с.

5. *Васильев*, *А.Ф.* Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроквашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.

6. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

7. *Бородич*, *Е.Н.* О пересечениях $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. – 2007. – № 3. – С. 47–52.

8. *Белоконь, Л.М.* Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.

9. *Huppert*, *B.* Finite groups III. / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

Поступила в редакцию 03.04.15.