Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(69), 2011

УДК 530.145

Параметры вариационной теории возмущений

Л. Д. Корсун

Применяется метод вариационной теории возмущений в квантовой хромодинамике, позволяющий выйти за рамки обычного пертурбативного анализа. Получены формулы для основных непертурбативных ренормгрупповых функций в рамках вариационной теории возмущений. Найдено уравнение, позволяющее определить вариационный параметр в любом порядке непертурбативного разложения.
Ключевые слова: вариационная теория возмущений, эффективная константа связи, ренормгрупповая функция.

The method of variational perturbation theory is applied to quantum chromodynamics. It allows to go beyond the basic perturbative analysis. The main non-perturbative renormalization-group functions are obtained within the variational perturbation theory. An equation for determining the variational characteristic in any order of nonperturbative resolution is obtained.
Keywords: variational perturbation theory, effective coupling constant, renormalization group function.

Применен метод вариационной теории возмущений (ВТВ) [1; 2], основанный на построении функционала вариационного типа. При таком подходе удается не только расширить область применимости вариационного разложения по сравнению с теорией возмущений (ТВ), но и анализировать предел сильной связи. Положительными чертами метода ВТВ являются незначительная схемная чувствительность вместе с устойчивостью к высшим петлевым поправкам для всего интервала энергий. В подходе ВТВ появляется возможность сохранения аналитических свойств эффективной константы разложения, что позволяет самосогласованным образом определить инвариантный заряд во времени подобной области [3].

Данная работа посвящена исследованию различных способов фиксирования вариационных параметров в методе ВТВ и построению алгоритма вычисления основных непертурбативных ренормгрупповых функций КХД.

При построении вариационного разложения в КХД исследуемая величина представляется в виде степенного ряда с новым малым параметром разложения a, который связан с константой связи λ посредством уравнения:

$$\lambda = \frac{g^2}{(4\pi)^2} = \frac{\alpha_s}{4\pi} = \frac{1}{C}\frac{a^2}{(1-a)^3}. \tag{1}$$

Параметр разложения a удовлетворяет неравенству $0 \le a < 1$ для любого значения константы связи $\lambda \ge 0$ из (1). Весь произвол сосредоточен в коэффициенте C, который играет роль вариационного параметра и может быть определен на основе одной из процедур оптимизации. Первоначальная величина, для которой мы строим ВТВ-разложение, не зависит от вспомогательного параметра C, однако аппроксимация той же величины конечным числом слагаемых ряда ВТВ зависит от него. В соответствии с механизмом индуцированной сходимости вариационные параметры C подстраиваются в каждом порядке аппроксимации в соответствии с некоторым вариационным принципом, при этом появляется возможность влиять на свойства сходимости ряда ВТВ.

Во-первых, значения параметра C можно найти исходя из условия, что ренормгрупповая $\beta(\lambda)$- функция ведет себя при больших значениях константы связи следующим образом: $\beta(\lambda) \simeq -\lambda$. Такое поведение соответствует сингулярному инфракрасному поведению инвариантного заряда $\lambda(Q^2) \sim Q^{-2}$ и обеспечивает линейный рост кварк-антикваркового потенциала на больших расстояниях.

Во-вторых, значения вариационного параметра C можно зафиксировать при исследовании аналитических свойств малого параметра разложения $a(Q^2)$ как функции импульса Q^2 и определении комплексных ветвей многозначной функции $a(Q^2)$ [4]. Следует отметить, что значения вариационного параметра C, вычисленные различными способами, мало отличаются друг от друга, и их совпадение может свидетельствовать о внутренней согласованности подхода ВТВ.

Бегущий параметр разложения a как функция импульса Q^2 определяется из ренормгруппового уравнения:

$$Q^2 = Q_0^2 \exp\left[\frac{C}{2\beta_0}\left(f(a) - f(a_0)\right)\right], \tag{2}$$

где $f(a) = \dfrac{2\beta_0}{C}\displaystyle\int^{\lambda} \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)}$. Применяя размерную регуляризацию и проводя вычисления в ковариантной калибровке, а также зная константу перенормировки заряда, можно найти непертурбативную β-функцию, соответствующую различным уровням аппроксимации $O(a^i)$:

$$\beta_{VPT}(a) = -\frac{1}{C^2}\frac{2\beta_0 a^4}{(2+a)(1-a)^2}\varphi_{i-2}(a), \tag{3}$$

где

$$\varphi_{i-2}(a) = \sum_{m=0}^{i-2} k_m a^m,$$

$$k_0 = 1, \qquad k_1 = \frac{9}{2}, \qquad k_2 = 12 + \frac{\beta_1}{\beta_0 C}, \qquad k_3 = 25 + \frac{15}{2}\frac{\beta_1}{\beta_0 C},$$

$$k_4 = 45 + \frac{63}{2}\frac{\beta_1}{\beta_0 C} + \frac{\beta_2}{\beta_0 C^2}, \qquad k_5 = \frac{147}{2} + 98\frac{\beta_1}{\beta_0 C} + \frac{21}{2}\frac{\beta_2}{\beta_0 C^2},$$

$$k_6 = 112 + 252\frac{\beta_1}{\beta_0 C} + 60\frac{\beta_2}{\beta_0 C^2} + \frac{\beta_3}{\beta_0 C^3}, \qquad k_7 = 162 + 567\frac{\beta_1}{\beta_0 C} + \frac{495}{2}\frac{\beta_2}{\beta_0 C^2} + \frac{27}{2}\frac{\beta_3}{\beta_0 C^3}.$$

Здесь мы ограничились коэффициентами k_i, соответствующими четырехпетлевому приближению. Коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ и β_3 являются стандартными коэффициентами β-функции в ТВ [5]:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}f, \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3}f, \quad \beta_2^{\overline{MS}} = \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}f + \frac{325}{54}f^2,$$

$$\beta_3^{\overline{MS}} = \left(\frac{149753}{6} + 3564\zeta_3\right) - \left(\frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta_3\right)f + \left(\frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta_3\right)f^2 + \frac{1093}{729}f^3,$$

где ζ – зета-функция Римана, ($\zeta_3 = 1.202056903...$) и f – число активных кварков. Подчеркнем, что коэффициенты β_2 и β_3 соответственно для трехпетлевой и четырехпетлевой β-функции зависят от выбора схемы перенормировки (пертурбативные коэффициенты β-функции приведены в $\overline{MS}$-схеме).

Малый параметр разложения ВТВ $a(Q^2)$ определяем как решение уравнения (2). Функции $f_i(a)$, соответствующие порядку разложения $O(a^i)$, имеют вид:

$$f_i(a)=\ln\left[a^{A_1}(1-a)^{A_2}\prod_{k=1}^{i-2}(a-a_k)^{B_k}\right]-\frac{6}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{A_3}{1-a}. \tag{4}$$

При этом следует учесть зависимость функций $f_i(a)$ и $\varphi_i(a)$ из (3) от числа активных кварков f и вариационного параметра C_i, изменяющегося от порядка к порядку:

$$f_i(a)=f_i(a,f,C_i), \qquad \varphi_{i-2}(a)=\varphi_{i-2}(a,f,C_i).$$

Коэффициенты A_1, A_2, A_3 и B_k в выражении (4) вычисляем по формулам:

$$A_1=-48+4k_2, \qquad A_2=\frac{21}{\varphi_{i-2}(1,f,C_i)}-9\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi_{i-2}(a,f,C_i)}\right)\Bigg|_{a=1},$$

$$A_3=-\frac{9}{\varphi_{i-2}(1,f,C_i)}, \qquad B_k=-\frac{(a+2)^2}{a^3(1-a)^2\dfrac{d}{da}\varphi_{i-2}(a,f,C_i)}\Bigg|_{a=a_k}, \qquad k=1,\ldots,i-2,$$

где числа a_k являются корнями уравнения $\varphi_{i-2}(a,f,C_i)=0$. Формула (4) позволяет определить основные непертурбативные ренормгрупповые функции ВТВ-разложения в КХД в пространственноподобной области, отвечающие различным уровням аппроксимации $O(a^i)$.

Значения вариационного параметра C фиксируем, учитывая аналитические свойства бегущего параметра разложения $a(Q^2)$. При определении ветвей многозначной функции $a=a(Q^2)$ необходимо установить взаимно однозначное соответствие между разрезами комплексной плоскости бегущего параметра разложения a и плоскости Q^2. Это дает возможность вычислить значения вариационных параметров C_i, которые изменяются от порядка к порядку в соответствии с принципом индуцированной сходимости. Получено уравнение, позволяющее определить вариационные параметры C_i в любом порядке разложения ВТВ:

$$C_i\left[\frac{21}{\varphi_{i-2}(1,f,C_i)}-9\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi_{i-2}(a,f,C_i)}\right)\Bigg|_{a=1}\right]=2\beta_0. \tag{5}$$

Например, для $f=3$ эти параметры равны $C_3=3.5$, $C_4=9.2$, $C_5=19.1$, $C_6=34.1$, $C_7=55.6$. Следует также отметить, что изменение значений схемно-зависимых коэффициентов β-функции β_2 и β_3 для широкого диапазона схем не оказывает влияния на параметры C_i, что является одной из причин схемной независимости результатов ВТВ.

В соответствии с методом ренормализационной группы инвариантный заряд определяется в пространственноподобной, евклидовой области. Тогда для параметризации квантово-хромодинамических процессов, для которых характерными являются времениподобные импульсы (например, процесса e^+e^--аннигиляции), требуется специальная процедура «аналитического продолжения». Для ее самосогласованного выполнения важны аналитические свойства бегущей константы связи в комплексной Q^2-плоскости. При обычном пертурбативном рассмотрении не удается самосогласованным образом определить константу связи во времениподобной области.

Исследуем, как определяется инвариантный заряд во времениподобной области в методе ВТВ. Инвариантный заряд находим как решение ренормгруппового уравнения (2). При этом взаимосвязь между t- и s-канальными константами связи имеет вид:

$$\lambda^{\mathrm{eff}}(q^2) = -q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s-q^2)^2} \lambda_s^{\mathrm{eff}}(s) \quad \text{и} \quad \lambda_s^{\mathrm{eff}}(s) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\epsilon}^{s+\mathrm{i}\epsilon} \frac{dz}{z} \lambda_t^{\mathrm{eff}}(z).$$

В методе ВТВ эффективная константа связи в s-канале находится следующим образом:

$$\lambda_s(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\beta_0} \left[\phi(a_+) - \phi(a_-) \right], \qquad \lambda_s(s) = \frac{1}{2\pi\beta_0} Im\,\phi(a_+),$$

где $a_\pm$ подчиняется уравнению $f(a_\pm) = f(a_0) + \dfrac{2\beta_0}{C}\left[ln\dfrac{s}{Q_0^2} \pm i\pi \right]$. Здесь функции $f_i(a)$ определены согласно (4), а соответствующие им в s-канале функции для различных уровней аппроксимации $O(a_i)$ имеют вид:

$$\phi_i(a) = \int \frac{(a+2)^2 \alpha_{i-2}(a)}{a(1-a)^2 \varphi_{i-2}(a)} da = ln\left[a^4 (1-a)^{-K_1} \prod_{k=1}^{i-2} (a-a_k)^{M_k} \right] + \frac{K_2}{1-a}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{i-2}(a) = \alpha_{i-2}(a, f, C_i) = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \ldots + \frac{a^2}{C_i} \frac{d_2}{d_1} (1 + 6a + \ldots)$$

и, согласно [6], в $\overline{MS}$ – схеме

$$d_1 = 1.986 - 0.115f, \quad d_2 = 18.244 - 4.216f + 0.086f^2 - \frac{1.2395}{3} \left(\sum_{f'}^{f} Q_{f'} \right)^2 \Bigg/ \sum_{f'}^{f} Q_{f'}^2 .$$

Коэффициенты K_1, K_2 и M_k в выражении (6) вычисляем по формулам:

$$K_1 = 3\frac{\alpha_{i-2}(1, f, C_i)}{\varphi_{i-2}(1, f, C_i)} - 9\frac{d}{da}\left[\frac{\alpha_{i-2}(a, f, C_i)}{\varphi_{i-2}(a, f, C_i)} \right]\Bigg|_{a=1}, \qquad K_2 = 9\frac{\alpha_{i-2}(1, f, C_i)}{\varphi_{i-2}(1, f, C_i)},$$

$$M_k = \frac{(a+2)^2 \alpha_{i-2}(a, f, C_i)}{a(1-a)^2 \dfrac{d}{da} \varphi_{i-2}(a, f, C_i)} \Bigg|_{a=a_k}, \qquad k = 1, \ldots, i-2,$$

где числа a_k являются корнями уравнения $\varphi_{i-2}(a, f, C_i) = 0$.

В данной работе представлен обзор результатов, полученных в ВТВ-подходе в КХД. Получены формулы для основных непертурбативных ренормгрупповых функций ВТВ-разложения в КХД для пространственноподобной и времениподобной областей, необходимые для проведения вычислений в рамках метода ВТВ. Найдено уравнение, позволяющее определить вариационный параметр C в любом порядке вариационного разложения. Показано, что в ВТВ-подходе вариационный параметр C может быть зафиксирован, используя лишь общие свойства аналитичности.

Литература

1 Solovtsov, I.L. New expansion in QCD / I.L. Solovtsov // Phys. Lett. – 1994. – Vol. B327. – P. 335–340.

2 Solovtsov, I.L. Nonperturbative expansion in QCD / I.L. Solovtsov // Phys. Lett. – 1994. – Vol. B340. – P. 245–249.

3 Jones, H.F. QCD running coupling constant in the timelike region / H.F. Jones, I.L. Solovtsov // Phys. Lett. – 1995. – Vol. B349. – P. 519–524.

4 Korsun, L.D. Analytic properties of the running expansion parameter in variational perturbation theory / L.D. Korsun, I.L. Solovtsov // Proc. of the IX Intern. Seminar "Nonlinear Phenomena in Complex Systems", 16–19 May, 2000, Minsk, Belarus. – 2000. – P. 138–145.

5 Ritbergen, T. The four-loop β-function in quantum chromodynamics / T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin // Phys. Lett. – 1997. – Vol. B400. – P. 379–384.

6 Gorishny, S.G. The O ($\alpha_S{}^3$) corrections to σ_{tot} ($e^+e^- \to$ hadrons) and Γ ($\tau^- \to \nu_\tau$ + hadrons) in QCD / S.G. Gorishny, A.L. Kataev, S.A. Larin // Phys. Lett. – 1991. – Vol. B259. – P. 144–150.

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

Поступило 08.11.11