

Отражение плоской электромагнитной волны от периодической планарной биизотропной структуры

В.Н. КАПШАЙ, А.А. ШАМЫНА

Решена задача об отражении плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны от периодической планарной биизотропной структуры. Получено выражение для коэффициента отражения через коэффициенты прохождения и отражения на границах участвующих в задаче сред. Рассмотрен общий случай произвольного количества чередующихся биизотропных слоёв. Численно исследована зависимость вещественных энергетических и комплексных амплитудных коэффициентов отражения от периода структуры при разных значениях количества слоёв. Установлена зависимость количества локальных максимумов от количества слоёв в структуре.

Ключевые слова: биизотропная среда, материальные уравнения, циркулярная поляризация, планарная периодическая структура, рекуррентные соотношения, метод производящей функции, коэффициент отражения, вектор Умова-Пойнтинга.

The problem of reflection of the plane monochromatic circular polarized electromagnetic wave of the periodic plane biisotropic structure has been solved. The expression for the reflection coefficient in terms of reflection and transmission coefficients for interfaces which were used in the problem has been obtained. A general case for the arbitrary number of alternating biisotropic layers has been considered. The dependence of the real energetic and complex amplitude coefficients on the period of the structure for different values of the number of layers has been analyzed numerically. The dependence of the number of local maxima on the number of layers in the structure has been determined.

Keywords: biisotropic medium, constitutive equations, circular polarization, periodic structure, recurrence relations, generating function method, reflection coefficient, pointing vector.

Введение. В электродинамике хорошо изучены свойства различных сплошных сред. На современном этапе развития производственных технологий стало возможно и создание сложных сред, таких как киральные среды, среды Теллегена и других. Наиболее общим случаем, объединяющим свойства таких сред, являются биизотропные среды, для которых материальные уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \quad \vec{B} = (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H}. \quad (1)$$

В таких средах возможно лишь распространение циркулярно поляризованных волн или их линейных комбинаций с показателями преломления $n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \pm \alpha$.

Следует отметить, что их свойства стали предметом дискуссий о «распознаваемом существовании» биизотропных сред, которые ведутся с середины 90-х годов прошлого века до настоящего времени [7]–[13]. Эффекты, явно выделяющие биизотропные среды среди других, можно наблюдать в задачах о преломлении и отражении электромагнитных волн на границах раздела с такими средами. Ранее были решены задачи для плоских и сферических границ раздела [14]–[18]. Задачи о прохождении через слоистые среды рассмотрены в статьях [19]–[20]. Целью данной статьи является получение явных формул для коэффициента отражения от периодической планарной биизотропной структуры с произвольным количеством слоёв в случае нормального падения плоской циркулярно поляризованной волны.

1. Постановка задачи. Обозначим количество биизотропных сред выражением $2N + 1$ (где $N \geq 2$ - целое число). Тогда области $z < 0$ и $z \geq \sum_{p=1}^{2N-1} d_p$ заполнены соответственно биизотропными средами 0 и $2N$, а области $\sum_{s=1}^{p-1} d_s \leq z < \sum_{s=1}^p d_s$ биизотропной средой с порядковым номером p , где d_s - толщина s -го слоя ($1 \leq s \leq 2N - 1$). Параметры среды с номером p рав-

ны $\varepsilon_p, \mu_p, \chi_p, \alpha_p$, где $0 \leq p \leq 2N$. Чтобы биизотропная структура была периодической обозначим $d_s = d_1$, если s - нечётное, и $d_s = d_2$, если s - чётное.

Направим плоскую монохроматическую циркулярно поляризованную волну вдоль оси Oz . Уравнения падающей волны запишем в виде

$$\vec{E}_v^{\uparrow 0} = \vec{e}_v E_v^{\uparrow 0} \exp(ik_v^0 z - i\omega t); \quad \vec{H}_v^{\uparrow 0} = -b_v^0 \vec{E}_v^{\uparrow 0}. \quad (2)$$

Тогда поле в каждом слое будет представляться в виде суперпозиции волн, распространяющихся вдоль и против оси Oz , описываемых формулами

$$\vec{E}_v^{\uparrow p} = \vec{e}_v E_v^{\uparrow p} \exp\left(ik_v^p \left(z - \sum_{s=1}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right); \quad \vec{H}_v^{\uparrow p} = -b_v^p \vec{E}_v^{\uparrow p}; \quad 1 \leq p \leq 2N; \quad (3)$$

$$\vec{E}_{-v}^{\downarrow p} = \vec{e}_{-v} E_{-v}^{\downarrow p} \exp\left(-ik_{-v}^p \left(z - \sum_{s=1}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right); \quad \vec{H}_{-v}^{\downarrow p} = -b_{-v}^p \vec{E}_{-v}^{\downarrow p}; \quad 0 \leq p \leq 2N-1. \quad (4)$$

Здесь \uparrow/\downarrow обозначает направление движения волны (вдоль/против оси Oz), p - номер среды, в которой распространяется волна, v - циркулярная поляризация волны ($v = \pm 1$). Коэффициенты пропорциональности между напряжённостью электрического и магнитного полей b_σ^p , волновые числа k_σ^p ($\sigma = \pm v$) и единичный вектор \vec{e}_v , отвечающий за циркулярную поляризацию, имеют вид

$$b_\sigma^p = \left(\chi_p + i\sigma \sqrt{\varepsilon_p \mu_p - \chi_p^2}\right) \frac{1}{\mu_p}; \quad k_\sigma^p = \left(\sqrt{\varepsilon_p \mu_p - \chi_p^2} + \sigma \alpha_p\right) \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \vec{e}_v = \frac{(\vec{i} + iv\vec{j})}{\sqrt{2}}, \quad (5)$$

где \vec{i}, \vec{j} - единичные вектора, направленные вдоль осей правой декартовой системы координат Ox, Oy (рис. 1). Вдоль оси Oz будут распространяться только волны поляризации, совпадающей с падающей (v), против оси Oz будут распространяться только волны, поляризации, противоположной падающей ($-v$). Доказательство этого факта рассмотрено в [15]. Схема задачи изображена на рисунке 1.

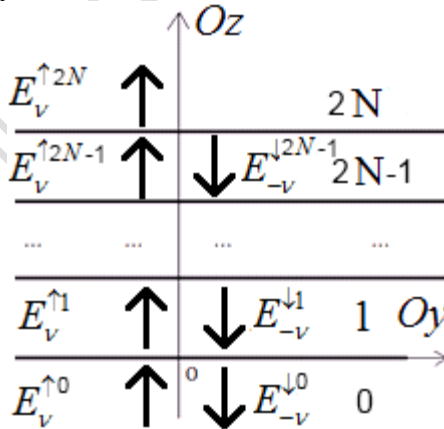


Рисунок 1 – Схематическое изображение плоских волн, распространяющихся в биизотропной планарной структуре.

Для того, чтобы получить рекуррентную процедуру, позволяющую решить общую задачу, рассмотрим вначале случай, когда среды 0 – p одинаковы. Обозначим коэффициенты отражения по амплитуде от системы биизотропных слоёв $R_v^{p(2N)} = E_{-v}^{\downarrow p} / E_v^{\uparrow p}$ для волны, распространяющейся из среды p в среду $2N$. При нахождении коэффициента прохождения $R_v^{p(2N)}$ параметры сред задаются условиями (6):

$$\begin{cases} \varepsilon_s = \varepsilon_e; \mu_s = \mu_e; \chi_s = \chi_e; \alpha_s = \alpha_e, & \text{если } s \geq p - \text{чётное;} \\ \varepsilon_s = \varepsilon_o; \mu_s = \mu_o; \chi_s = \chi_o; \alpha_s = \alpha_o, & \text{если } s \geq p - \text{нечётное;} \\ \varepsilon_s = \varepsilon_p; \mu_s = \mu_p; \chi_s = \chi_p; \alpha_s = \alpha_p, & \text{если } s < p. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда получим периодическую структуру, чередование слоёв в которой начинается со слоя номер p (схема изображена на рисунке 2). Задача состоит в том, чтобы найти $R_v^{0(2N)}$.

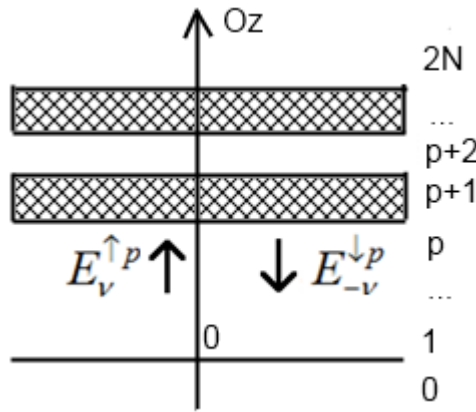


Рисунок 2 – Схема периодической планарной структуры.

2. Получение выражения для коэффициента отражения. Свяжем между собой значения коэффициентов $R_v^{0(2N)}$ и $R_v^{2(2N)}$. Для этого достаточно свести задачу к уже рассмотренной в статье [19]. Чтобы заметить сходство, перерисуем схему задачи в более компактном виде (рисунок 3).

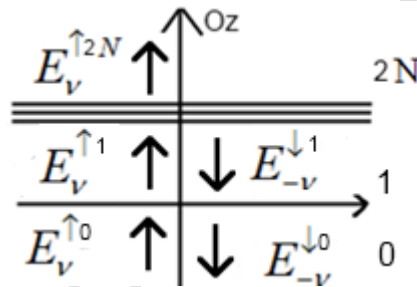


Рисунок 3 – Сокращённая схема задачи.

Пользуясь методом статьи [15], получим выражения для коэффициентов отражения:

$$R_v^{0(2N)} = \rho_v^{01} \frac{1 - \eta_{-v}^1 \eta_v^1 \frac{R_v^{1(2N)}}{\rho_v^{10}}}{1 - R_v^{1(2N)} \rho_{-v}^{10} \eta_{-v}^1 \eta_v^1}; \quad R_v^{1(2N)} = \rho_v^{12} \frac{1 - \eta_{-v}^2 \eta_v^2 \frac{R_v^{2(2N)}}{\rho_v^{21}}}{1 - R_v^{2(2N)} \rho_{-v}^{21} \eta_{-v}^2 \eta_v^2}; \quad \rho_v^{sp} = \frac{b_v^s - b_v^p}{b_v^s - b_{-v}^s}; \quad \tau_v^{sp} = \frac{b_v^s - b_{-v}^s}{b_v^p - b_{-v}^s}. \quad (7)$$

Здесь ρ_v^{sp}, τ_v^{sp} – коэффициенты отражения и прохождения, соответственно, при распространении из среды s в среду p ($|s - p| = 1$), а коэффициент $\eta_v^p = \exp(k_v^p d_p)$ характеризует изменение фазы волны при распространении в толще слоя. Комбинируя формулы (7) и учитывая (6), получаем выражение $R_v^{0(2N)}$ через $R_v^{2(2N)}$ в виде

$$R_v^{0(2N)} = \frac{A + BR_v^{2(2N)}}{C + DR_v^{2(2N)}}, \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\begin{cases} A = \rho_v^{01} \rho_v^{01} (1 - \eta_v^1 \eta_{-v}^1); & B = \rho_v^{01} \eta_v^2 \eta_{-v}^2 (\eta_v^1 \eta_{-v}^1 - \rho_{-v}^{01} \rho_v^{01}); \\ C = \rho_v^{01} (1 - \rho_{-v}^{10} \rho_v^{10} \eta_v^1 \eta_{-v}^1); & D = \eta_v^2 \eta_{-v}^2 (\rho_{-v}^{10} \rho_v^{10} \eta_v^1 \eta_{-v}^1 - \tau_{-v}^{01} \rho_v^{01}). \end{cases} \quad (9)$$

Выражая затем $R_v^{0(2N)}$ через $R_v^{4(2N)}$ с использованием формулы (8), можно заметить, что зависимость $R_v^{0(2N)}$ от $R_v^{4(2N)}$ также оказывается дробно-линейной, изменяются только коэффициенты. Введём последовательности коэффициентов A_p, B_p, C_p, D_p . Тогда зависимость $R_v^{0(2N)}$ от $R_v^{4(2N)}$ примет вид

$$R_v^{0(2N)} = \frac{A_1 + B_1 R_v^{(2 \cdot 1)(2N)}}{C_1 + D_1 R_v^{(2 \cdot 1)(2N)}} = \frac{(A_1 C + A B_1) + (B B_1 + D A_1) R_v^{(2 \cdot 2)(2N)}}{(C_1 C + D_1 A) + (D C_1 + B D_1) R_v^{(2 \cdot 2)(2N)}} = \frac{A_2 + B_2 R_v^{(2 \cdot 2)(2N)}}{C_2 + D_2 R_v^{(2 \cdot 2)(2N)}}. \quad (10)$$

Эту формулу можно обобщить и получить выражения для связи $R_v^{0(2N)}$ и $R_v^{(2p)(2N)}$:

$$R_v^{0(2N)} = \frac{A_{p-1} + B_{p-1} R_v^{(2p-1)(2N)}}{C_{p-1} + D_{p-1} R_v^{(2p-1)(2N)}} = \frac{(A_{p-1} C + A B_{p-1}) + (B B_{p-1} + D A_{p-1}) R_v^{(2 \cdot p)(2N)}}{(C_{p-1} C + D_{p-1} A) + (D C_{p-1} + B D_{p-1}) R_v^{(2 \cdot p)(2N)}} = \frac{A_p + B_p R_v^{(2p)(2N)}}{C_p + D_p R_v^{(2p)(2N)}}. \quad (11)$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов A_p, B_p, C_p, D_p из (11) имеют вид

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n C + B_n A; & A_0 = 0; & A_1 = A; \\ B_{n+1} = B_n B + A_n D; & B_0 = 1; & B_1 = B; \\ C_{n+1} = C_n C + D_n A; & C_0 = 1; & C_1 = C; \\ D_{n+1} = C_n D + D_n B; & D_0 = 0; & D_1 = D. \end{cases} \quad (12)$$

Комбинируя формулы (12), можно получить рекуррентное соотношение для A_n :

$$A_n = A_{n-1} (B + C) + A_{n-2} (AD - BC). \quad (13)$$

Нетрудно показать, что аналогичное соотношение верно и для B_n, C_n, D_n . Методом производящей функции находятся явные выражения для A_n , записываемые в виде (14):

$$A_n = \frac{(A_0 (B + C) - A_1 - A_0 / z_-) (z_+)^n - (A_0 (B + C) - A_1 - A_0 / z_+) (z_-)^n}{(AD - BC) (z_- z_+)^n (z_+ - z_-)}, \quad (14)$$

где z_{\pm} задаются формулой

$$z_{\pm} = \frac{-(B + C) \pm \sqrt{(B + C)^2 + 4(AD - BC)}}{2(AD - BC)}. \quad (15)$$

Аналогично выглядят и выражения для коэффициентов B_n, C_n, D_n . Выражая $R_v^{0(2N)}$ через $R_v^{(2p)(2N)}$ и учитывая, что отражение на границе раздела двух одинаковых сред отсутствует (т.е. $R_v^{(2p)(2N)} = 0$), приходим к результату:

$$R_v^{0(2N)} = \frac{A_N + B_N R_v^{(2 \cdot N)(2N)}}{C_N + D_N R_v^{(2 \cdot N)(2N)}} = \frac{A_N + B_N \cdot 0}{C_N + D_N \cdot 0} = \frac{A_N}{C_N}. \quad (16)$$

Подставляя выражения для A_N и C_N из (14) в (16), получаем окончательное выражение для коэффициента отражения $R_v^{0(2N)}$:

$$R_v^{0(2N)} = \frac{-A(z_+^N - z_-^N)}{(B - 1/z_-) z_+^N - (B - 1/z_+) z_-^N} \quad (17)$$

Согласно условию (6) выражение (17) описывает коэффициент отражения от планарной периодической структуры из N слоёв биизотропной среды 1 толщиной d_1 , находящихся в биизотропной среде 0 на расстоянии d_2 друг от друга.

3. Численный анализ. Введём энергетический коэффициент отражения, определяемый как отношение модулей векторов Умова-Пойнтинга падающей и отражённой волны:

$$R_v^N = \frac{|S_v^{\uparrow 0(2N)}|}{|S_v^{\downarrow 0(2N)}|} = |R_v^{0(2N)}|^2. \quad (18)$$

Исследуем зависимость R_v^N от расстояния d_2 при разных значениях N (рисунок 3). Здесь значения $\rho_v^{sp}, \tau_v^{sp}, b_v^p, k_v^p$ взяты для сред с параметрами (в качестве примера)

$\varepsilon_e = 1.3, \mu_e = 1.2, \chi_e = 0.2, \alpha_e = 0.1; \varepsilon_o = 3.2, \mu_o = 1.3, \chi_o = 0.4, \alpha_o = 0.4, d_1 = 1.2\lambda$ и могут быть вычислены по формулам (7).

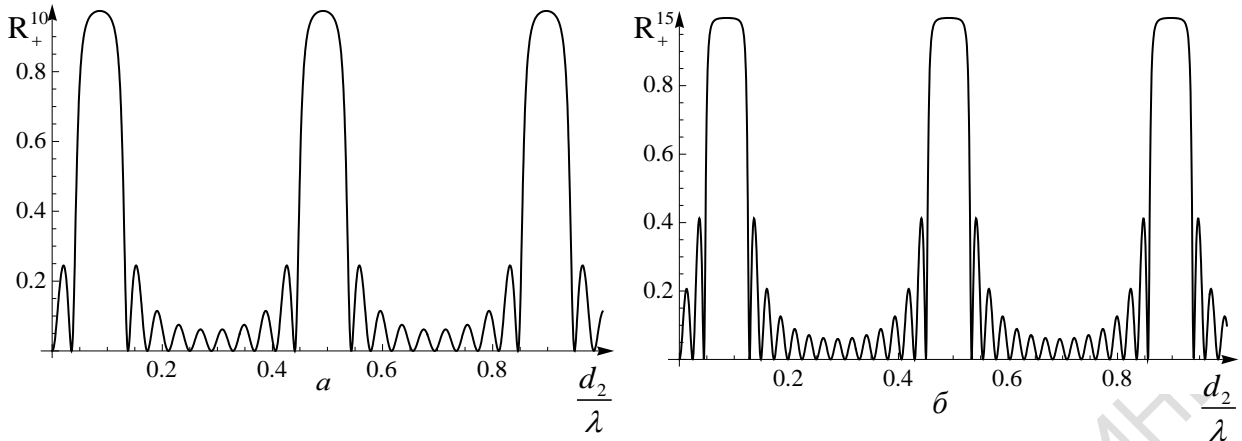


Рисунок 3 – Графики зависимости модуля коэффициента отражения R_+^N от d_2 для количества слоёв биизотропной среды 1, равного: а – 10, б – 15.

График зависимости имеет периодическую структуру: повторяющиеся глобальные максимумы, между которыми находится ряд локальных максимумов. Значение коэффициента отражения в глобальном максимуме растёт с увеличением N . Причём разность между количеством локальных максимумов и количеством слоёв биизотропной среды 1 равна двум. При увеличении количества таких слоёв на графике выделяются области с большой концентрацией осцилляций. Эти области при большом количестве слоёв являются «разрешёнными» зонами, в которых может находиться модуль коэффициента отражения. При некоторых значениях расстояния d_2 и больших N наблюдается максимальное приближение R_+^N к единице, что свидетельствует об эффекте, близком к полному отражению. В таких областях структура пропускает незначительное количество мощности падающей электромагнитной волны.

Исследуем изменение этого же коэффициента от толщины биизотропных слоёв 1. Значения коэффициентов ρ_v^{sp} , τ_v^{sp} , b_v^p , k_v^p оставим теми же, расстояние $d_2 = 1.2\lambda$. Результат изображён на рисунке 4.

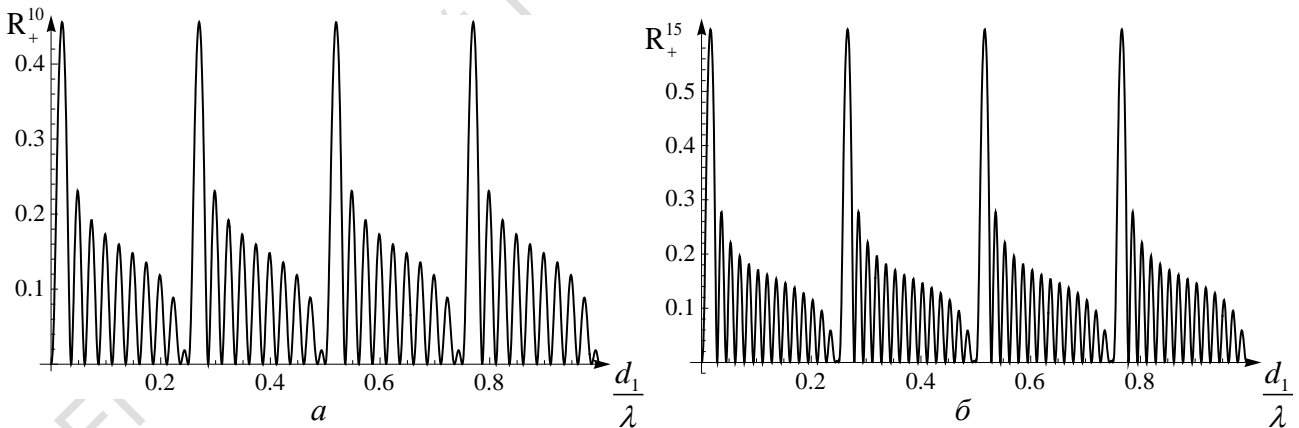


Рисунок 4 – Зависимость коэффициента отражения R_+^N от d_1 для количества слоёв, равного: а – 10, б – 15.

Отличие этих графиков от приведенных на рисунке 3 состоит в уменьшении амплитуды коэффициента и изменении формы разрешённой зоны с симметричной на антисимметричную. Остальные закономерности сохраняются.

Исследуем изменение амплитудного коэффициента $R_+^{0(2N)}$ на комплексной плоскости при изменении d_2 . Результаты приведены на рисунке 5.

Аналогично рисунку 3 получаем симметричные графики. Количество внутренних витков в каждой симметричной части равно $N - 2$ и совпадает с количеством максимумов в разрешенной зоне на графиках рисунка 3.

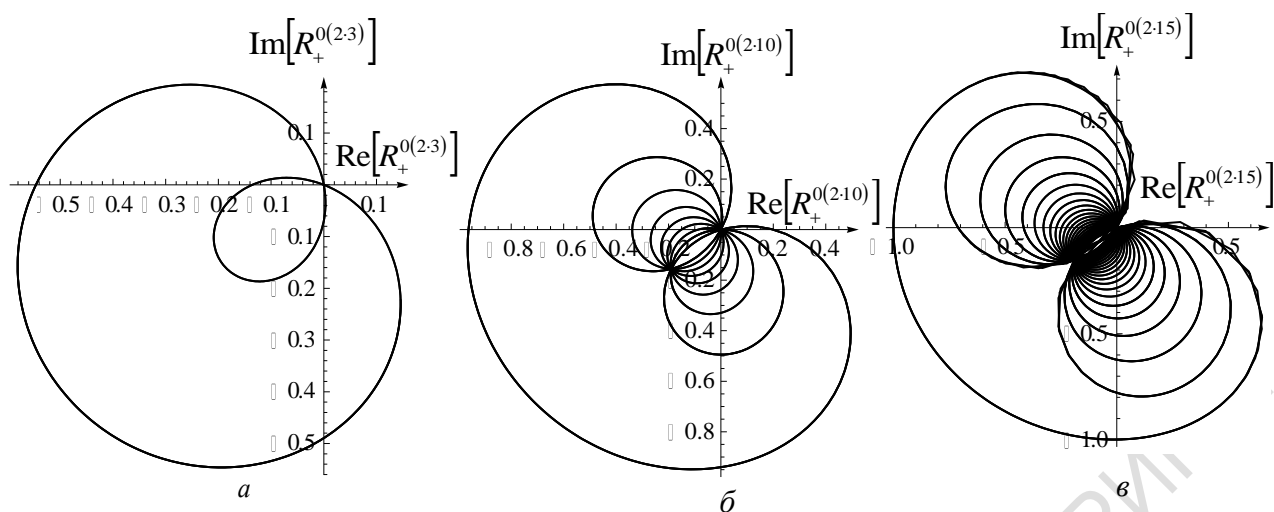


Рисунок 5 – Изменение $R_+^{0(2N)}$ на комплексной плоскости с изменением d_2 для значений N :
а – 3, б – 10, в – 15.

Заключение. Численное исследование периодических структур с помощью рекуррентных формул [20] осложняется необходимостью использования циклов, что может привести к неприемлемо длительным расчётам. Формула (17) позволяет с любой точностью получить значения коэффициентов отражения от периодической планарной структуры с любым количеством биизотропных слоёв. Более того, все полученные формулы используют коэффициенты отражения, прохождения и фазы ρ_v^{sp} , τ_v^{sp} , η_v^p , которые могут быть измерены экспериментально без определения параметров сред ε_p , μ_p , χ_p , α_p . Поскольку энергетический коэффициент прохождения в сумме с коэффициентом отражения даёт 1, то не составляет труда на основе проведенных рассуждений получить формулы для характеристик прохождения.

Анализ коэффициента отражения для периодической структуры коррелирует с результатами, полученными другим методом в статье [20] для коэффициента прохождения. В обоих случаях при изменении расстояния между слоями на графике соответствующего коэффициента наблюдаются локальные максимумы, количество которых зависит от количества слоёв периодической структуры. В зависимости от того, толщину каких слоёв мы изменяем, симметричность графиков может нарушаться. Исследование амплитудного коэффициента отражения на комплексной плоскости показало, что при изменении расстояния между слоями фаза коэффициента пробегает все значения от 0 до 2π . Важным результатом также можно считать подтверждение существования «разрешённых» (коэффициент отражения колеблется вблизи нуля), и «запрещённых» зон (коэффициент отражения близок к единице), описанных в статье [20].

Литература

1. Sihvola, A.H. Bi-isotropic constitutive relations / A.H. Sihvola, I.V. Lindell // *Microwave and Opt. Technol. Lett.*, 1991. – Vol. 4, № 8. – P. 295–297.
2. Sihvola, A.H. Electromagnetic modeling of bi-isotropic media / A.H. Sihvola // *Progress In Electromagnetics Research (PIER)*, 1994. – Vol. 9. – P. 45–86.
3. Semchenko, I.V. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // *Progress in Electromagnetics Research (PIER)*, 1996. – Vol. 12. – P. 335–370.
4. Bolioli, S. *Advances in Complex Electromagnetic Materials* / S. Bolioli. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. – P. 33–51.
5. Lindell, I.V. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. – Boston and London : Artech House, 1994. – 500 p.
6. Serdyukov, A. *Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications* / A. Serdyukov, I. Semchenko, S. Tretyakov, A. Sihvola. – Overseas Publishers Association, 2001. – 400 p.

7. Weiglhofer, W.S. On the non-existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / W.S. Weiglhofer, A.J. Lakhtakia // *J. Phys. A. : Math. Gen.*, 1997. – Vol. 30. – P. 2597–2600.
8. Лакхтакия, А. Замечание о не существовании линейной среды Теллегена / А. Лакхтакия, В.С. Вейгльхофер // *Радиотехника и электроника*, 1998. – Т. 43, № 4. – С. 494–495.
9. Raab, R.E. On the existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / R.E. Raab, A.H. Sihvola // *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 1997. – Vol. 30. – P. 1335–1344.
10. Hehl, F.W. Linear media in classical electrodynamics and the Post constraint / F.W. Hehl, Y.N. Obuhov // *Physics Letters A*, 2005. – Vol. 334. – P. 249–259.
11. Lakhtakia, A. Boundary-value problems and the validity of the Post constraint in modern electromagnetism / A. Lakhtakia // *Optik*, 2006. – Vol. 117. – P. 188–192.
12. Sihvola, A. Comments on boundary problems and electromagnetic constitutive parameters / A. Sihvola, S. Tretyakov // *Optik*, 2008. – Vol. 120. – P. 247–249.
13. Obukhov, Y.N. On the boundary-value problems and the validity of the Post constraint in the modern electromagnetism / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // *Optik*, 2009. – Vol. 120. – P. 418–421.
14. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на границе раздела с биизотропной средой / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины*, 2009. – № 4(55), Ч. 2. – С. 113–122.
15. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела биизотропных сред / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины*, 2009. – № 5(56). – С. 129–133.
16. Капшай, В.Н. Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // *Известия ВУЗов. Физика*. – Томск, 2000. – № 11. – С. 79–84.
17. Капшай, В.Н. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.
18. Капшай В.Н., Резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции в проблеме Ми для биизотропного шара / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, В.В. Кондратюк // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2011. – № 4 (9). С. 28–32.
19. Капшай В.Н., Прохождение плоских электромагнитных волн через биизотропный слой в биизотропной среде / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, А.Н. Годлевская // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины*. – 2011. – № 6 (69). С. 0–87.
20. Капшай В.Н., Прохождение плоских электромагнитных волн через многослойную биизотропную структуру / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2012. – № 4 (13). С. 10–14.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 11.11.13