Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

Краткие сообщения

УДК 517.9:530.182

Об интегрируемости уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка для квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы, подверженных воздействию экспоненциально-коррелированного случайного процесса

С.И. Жогаль, С.П. Жогаль, Р.И. Коржик

Получены достаточные условия потенциальности усредненного уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка для совместной плотности вероятностей стационарных амплитуды и фазы колебаний автоколебательной системы, подверженной аддитивному и мультипликативному полигармоническому воздействию и внешнему шумовому воздействию в виде экспоненциально-коррелированного случайного процесса.
Ключевые слова: квазилинейные колебательные системы, полигармоническое воздействие, внешнее шумовое воздействие, уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка.

The sufficient conditions of potentiality of averaged Kolmogorov–Fokker–Plank equations for joint probability density of amplitude and phase for dynamical system, subjected to additive and multiplicative polyharmonic effects and external noisy influence in the form of exponentially correlated stochastic process are obtained.
Keywords: quasylinear oscillations systems, polyharmonic effects, external noisy influence, Kolmogorov – Fokker – Plank equations

Пусть исходная система описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x, \dot{x}) + \varepsilon \sum\nolimits_{s=0}^{S} P_s \cos(\Omega_s \omega\, t) x^s + \varepsilon \sum\nolimits_{k=1}^{K} R_k \cos(\zeta_k \omega\, t) \dot{x}^k + q(t), \qquad (1)$$

$$K_q(\tau) = \sigma_0^2 e^{-a|\tau|},\ S_q(\omega) = \frac{\sigma_0^2}{\pi} \frac{a}{a^2 + \omega^2}, \qquad (2)$$

где $a = const > 0.$

Рассмотрим процедуру замены экспоненциально-коррелированного случайного процесса $q(t)$ белым шумом. Для этого процесса составим формирующий линейный фильтр

$$Lq(t) = \dot{q} + \alpha q = \sqrt{\varepsilon} m \sqrt{2\alpha}\, \dot{\xi}(t), \qquad (3)$$

где параметр корреляции a удовлетворяет условию $a << \varepsilon,$ а $\dot{\xi}(t)$ – белый шум с интенсивностью 1. Характеристическое управление фильтра (3) имеет один действительный отрицательный корень $\lambda_1 = -a.$ При таких условиях действие экспоненциально-коррелированного процесса $q(t)$ на механическую систему с одной степенью свободы (1) можно приближенно заменить белым шумом с интенсивностью

$$\sqrt{2\pi S_q(\omega\,)} = \sigma_0 \sqrt{\frac{2a}{a^2 + \omega^2}} = \sqrt{\varepsilon} h \sqrt{\frac{2a}{a^2 + \omega^2}}. \qquad (4)$$

Таким образом, вместо уравнения (1) будем рассматривать эквивалентное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x, \dot{x}) + \varepsilon \sum\nolimits_{s=0}^{S} P_s \cos(\Omega_s \omega\, t) x^s + \varepsilon \sum\nolimits_{k=1}^{K} R_k \cos(\zeta_k \omega\, t) \dot{x}^k + \sqrt{\varepsilon} h \sqrt{\frac{2a}{a^2 + \omega^2}}\, \dot{\xi}(t). \qquad (5)$$

Таким образом, исследование уравнения (5) сводится к исследованию системы, подверженной белому шуму.

Теорема. *Пусть для системы (5) выполняются следующие условия:*

$$1)\ \frac{\partial}{\partial a}\left\{a \underset{t}{M}\left[h(a\cos\psi, -a\sin\psi)\cos\psi\right]\right\} = 0;$$

$$2)\ \Omega_S \neq s-(2n-1), n = 1,2,\ldots,\left[\frac{s}{2}\right],\ \text{где}\ \left[\frac{s}{2}\right] - \text{целая часть числа}\ \frac{s}{2}.$$

Тогда соответствующее усредненное уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка (КФП) будет удовлетворять условию потенциальности, и его решение $W(a,\varphi)$ *– совместная плотность вероятностей амплитуды и фазы стационарных колебаний, может быть найдена в квадратурах.*

Доказательство.

Обозначим $\sigma = h\sqrt{\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}}$. Для усредненного уравнения КПФ имеем:

$$K_1(a,\theta) = M_t[-\frac{1}{\omega}\{h(a\cos\psi, -a\sin\psi) + \sum_{s=0}^{S} P_s\cos(\Omega_s\omega t)a^s\cos^s\psi +$$

$$+\sum_{k=1}^{K} R_k\cos(\zeta_s\omega t)a^k(-\omega)^k\sin^k\psi\}\sin\psi + \frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\cos 2\psi];$$

$$K_2(a,\theta) = M_t[-\frac{1}{a\omega}\{h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \sum_{s=0}^{S} P_s\cos(\Omega_s\omega t)a^s\cos^s\psi +$$

$$+\sum_{k=1}^{K} R_k\cos(\zeta_s\omega t)a^k(-\omega)^k\sin^k\psi\}\cos\psi + \frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\sin 2\psi];$$

$$K_{11}(a,\theta) = M_t\left[\frac{1}{\omega^2}\sigma^2\sin^2\psi\right] = \frac{\sigma^2}{2\omega^2};$$

$$K_{12}(a,\theta) = M_t\left[\frac{1}{2a\omega^2}\sigma^2\sin 2\psi\right] = 0;$$

$$K_{22}(a,\theta) = M_t\left[\frac{1}{a^2\omega^2}\sigma^2\cos^2\psi\right] = \frac{\sigma^2}{2\omega^2 a^2}.$$

Тогда условие потенциальности для системы (5) будет выполняться, если найдутся такие $\Omega_s, s = 0,1,\ldots S$ и $\zeta_k, k = 1,2,\ldots K$, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sum_{s=0}^{S} P_s a^s M_t(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t)) + \sum_{k=1}^{K} R_k a^k(-\omega)^k M_t(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{s=0}^{S} P_s a^{s+1} M_t(\cos^{s+1}\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t)) + \sum_{k=1}^{K} R_k a^{k+1}(-\omega)^k M_t(\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t))\right]. \quad (6)$$

Исходя из уравнения (6), необходимо выяснить, при каких Ω_s и ζ_k будут справедливы следующие условия:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[M_t(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t))\right] = (s+1)M_t(\cos^{s+1}\psi\cos(\Omega_s\omega t));$$
$$\frac{\partial}{\partial a}\left[M_t(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_{ks}\omega t))\right] = (k+1)M_t(\sin^k\psi\cos\psi\cos(\zeta_s\omega t)); \quad (7)$$
$$(\forall s = \overline{0,S}, \forall k = \overline{1,K}).$$

Рассмотрим первое из соотношений (7). Пусть s – нечетное. Тогда, воспользовавшись известными формулами для представления $\sin^k\psi, \cos^s\psi$ через тригонометрические функции кратных аргументов, получаем:

$$M_t(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t)) = \frac{1}{2^{s+1}}M_t(\sin((s+1)\psi - \Omega_s\omega t) + \left[\binom{s}{1} - \binom{s}{0}\right]\times$$

$$\times\sin((s-1)\psi - \Omega_s\omega t) + \left[\binom{s}{2} - \binom{s}{1}\right]\sin((s-3)\psi - \Omega_s\omega t) + \ldots +$$

$$+\left[\binom{s}{\frac{s-1}{2}}-\binom{s}{\frac{s-3}{2}}\right]\sin(2\psi-\Omega_s\omega t))=$$

$$=\frac{1}{2^{s+1}}M_t(\sin((s+1)\psi-\Omega_s\omega t)+\sum_{c=1}^{\frac{s-1}{2}}\left[\binom{s}{c}-\binom{s}{c-1}\right]\sin((s-2c-1)\psi-\Omega_s\omega t)),$$

где $\binom{s}{n}=\frac{s!}{n!(s-n)!}$.

Тогда в резонансном случае при $\Omega_s=s-2n+1$, где n – один из элементов множества $\left\{0,1,...,\left[\frac{s}{2}\right]\right\}$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[M_t(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t))\right]=\frac{1}{2^{s+1}}\cos((s-(2n-1))\theta)\times$$

$$\times\left\{(s-(2n-1))\left[\binom{s}{n}-\binom{s}{n-1}\right]\right\}.$$

С другой стороны,

$$M_t(\cos^{s+1}\psi\cos(\Omega_s\omega t))=\frac{1}{2^{s+1}}M_t\{\cos((s+1)\psi-\Omega_s\omega t)+$$

$$+\binom{s+1}{1}\cos((s-1)\psi-\Omega_s\omega t)+\binom{s+1}{2}\cos((s-3)\psi-\Omega_s\omega t)+...+\binom{s+1}{\frac{s-1}{2}}\times$$

$$\times\cos(2\psi-\Omega_s\omega t)=\frac{1}{2^{s+1}}\cos(s-(2n-1))\theta)\binom{s+1}{n}\}.$$

После проведения аналогичных выкладок для первого из соотношений (7) при четном s, а также для второго соотношения при условии наличия в системе резонансов вида $\zeta_k=k-2n+1, n=0,1...,\left[\frac{k}{2}\right]$ убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[M_t(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t))]=\frac{1}{2^{s+1}}\left[\binom{s}{n}-\binom{s}{n-1}\right]\cos((s-2n+1)\theta)\times(s-2n+1),$$

$$M_t(\cos^{s+1}\psi\cos(\Omega_s\omega t))=\frac{1}{2^{s-1}}\binom{s+1}{n}\cos((s-2n+1)\theta);$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[M_t(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))]=\frac{(-1)^{\frac{k+3+2n}{2}}}{2^{k+1}}\binom{k+1}{n}\times$$

$$\times\sin((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),$$

k – нечетное,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[M_t(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))]=\frac{(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{2^{k+1}}\binom{k+1}{n}\times$$

$$\times\cos((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),$$

k – четное,

$$M_t(\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t))]=\frac{(-1)^{\frac{k+2n-1}{2}}}{2^{k+1}}\left[\binom{k}{n}-\binom{k}{n-1}\right]\sin((k-2n+1)\theta),$$

k – нечетное,

$$M_t(\cos\psi \sin^k \psi \cos(\zeta_k \omega t))] = \frac{(-1)^{\frac{k+2n-1}{2}}}{2^{k+1}}\left[\binom{k}{n} - \binom{k}{n-1}\right]\cos((k-2n+1)\theta),$$

k – четное.

Исходя из приведенных соотношений, несложно установить, что условия потенциальности (7) выполняются при любых резонансных соотношениях вида $\zeta_k = k-2n+1, n = 0,1...,\left[\frac{k}{2}\right], \forall k = 1,2,...,K$ и лишь в одном резонансном случае для $\Omega_s : \Omega_s = s+1, \forall s = 0,1,...,S,$ что соответствует утверждению теоремы. Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условий теоремы соответствующее динамической системе (5) усредненное уравнение КФП будет иметь точное решение $W(a,\varphi)$ – совместную плотность вероятностей амплитуды и фазы стационарных колебаний*

$$W(a,\varphi) = Cae^d,$$

где C – постоянная, удовлетворяющая условию нормировки,

$$d = -\frac{2\omega(a^2+\omega^2)}{m^2 a}\left[M^* + M^{**}\right] - \frac{\omega\ (a^2+\omega^2)}{m^2 a}\sum_{s=0}^{S}\frac{P_s a^{s+1}}{(s+1)2^{s-1}}\sin((s+1)\varphi) +$$

$$+\frac{(a^2+\omega^2)}{m^2 a}\sum_{k=1}^{K}\frac{R_k a^{k+1}(-1)^{\frac{k+2n-1}{2}}}{(k+1)2^{k-1}}\binom{k+1}{n}\cos((k-2n+1)\varphi) -$$

$$-\frac{(a^2+\omega^2)}{m^2 a}\sum_{k=1}^{K}\frac{R_k \omega^{k+1} a^{k+1}(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{(k+1)2^{k-1}}\binom{k+1}{n}\sin((k-2n+1)\varphi),$$

$$M^* = \int M_t\{h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\}da,$$

$$M^{**} = \int M_t\{ah(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\}d\varphi,\quad \psi = \omega t + \varphi.$$

Литература

1. Митропольский, Ю.А. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю.А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. – Киев : Наук. думка, 1992. – 344 с.

2. Жогаль, С.И. Исследование стохастических квазилинейных колебательных систем: Учебное пособие / С.И. Жогаль, С.П. Жогаль. – Гомель : ГГУ, 1997. – 96 с.

Гомельский государственный
университет им.Ф.Скорины

Поступило в редакцию 14.11.2013