

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

**Е. М. БЕРЕЗОВСКАЯ
М. И. ЖАДАН**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ:
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ
УРАВНЕНИЯ**

Практическое пособие

для специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2021

УДК 519.6(076)
ББК 22.192.3я73
Б15

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук С. П. Новиков;
кандидат физико-математических наук В. И. Мироненко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Березовская, Е. М.

Б15 Численные методы математической физики : эллиптические и гиперболические уравнения : практическое пособие / Е. М. Березовская, М. И. Жадан ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – 47 с.
ISBN 978-985-577-701-5

В практическом пособии содержатся основные понятия по методам решения задач математической физики: эллиптические и гиперболические уравнения, лабораторные работы и вопросы для самостоятельной подготовки к выполнению лабораторных работ.

Издание адресовано студентам специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)» и призвано оказать помощь в приобретении практических навыков в области вычислительной математики и в дальнейшем совершенствовании умений программирования на алгоритмических языках.

УДК 519.6(076)
ББК 22.192.3я73

ISBN 978-985-577-701-5

© Березовская Е. М., Жадан М. И., 2021
© Учреждение образования «Гомельский
государственный университет
имени Франциска Скорины», 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Тема 1. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	5
1.1 Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	5
1.2 Аппроксимация граничных условий.....	10
1.3 Разностная схема для задачи Дирихле.....	13
1.4 Метод итерации для решения задачи Дирихле	18
1.5 Метод Рунге для решения задачи Дирихле.....	21
Задания для уравнения эллиптического типа	26
Тема 2. Разностные схемы для уравнений гиперболического типа	31
2.1 Метод сеток для уравнений гиперболического типа	31
2.2 Метод сеток для решения смешанной задачи	36
Задания для уравнения гиперболического типа.....	43
Литература	48

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое практическое пособие по дисциплине «Численные методы математической физики» соответствует программе образовательного стандарта РД РБ 02100.5.046-98 по специальности «Прикладная математика» для студентов факультета математики и технологий программирования Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины.

Издание призвано облегчить изучение теоретических сведений студентами и способствовать эффективному применению практических навыков в области вычислительной математики.

В работе рассматриваются классические методы численного решения задачи Коши, задачи Дирихле, численные методы решения краевых задач, методы построения и основные понятия теории разностных схем, разностные схемы для основных уравнений эллиптического и гиперболического типов математической физики, их численная реализация. Изложены вопросы устойчивости и сходимости полученных разностных схем. В практическом пособии приводятся примеры, поясняющие теоретический материал. Для самостоятельного решения даны постановки краевых задач для уравнений эллиптического и гиперболического типа.

Практическое может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий и студентами при самостоятельной работе над предметом.

ТЕМА 1. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

1.1 Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

1.1.1 Постановка краевых задач

Исследование стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность и др.) часто приводят к уравнениям эллиптического типа

$$L[u] \equiv \Delta u + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \quad (1.1)$$

где a, b, c, f – непрерывные функции от переменных x, y .

Для этих уравнений обычно ставятся лишь краевые задачи, так как задача Коши для них может быть некорректной.

Ниже приведены наиболее часто встречающиеся краевые задачи.

Первая краевая задача. Найти функцию $u(P)$, удовлетворяющую внутри области Ω уравнению (1.1) и принимающую на границе $\partial\Omega$ области значение $\varphi(P)$:

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ u(P) &= \varphi(P), \quad P \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Вторая краевая задача. Найти функцию $u(P)$, удовлетворяющую внутри области Ω уравнению (1.1), нормальная производная которой на границе $\partial\Omega$ области принимает заданное значение $\psi(P)$:

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \psi(P), \quad P \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Третья краевая задача. Найти функцию $u(P)$ такую, чтобы

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ \alpha u(P) + \beta \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \chi(P), \quad P \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

Если область Ω ограниченная и $P \in \Omega$, то соответствующая краевая задача называется внутренней, в противном случае – внешней.

Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ первая краевая задача называется *задачей Дирихле*, вторая – *задачей Неймана* и третья – *смешанной краевой задачей*.

1.1.2 Единственность решения задачи Дирихле

Определение. Функция $u(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка в области Ω и удовлетворяющая внутри области уравнению Лапласа, называется *гармонической* функцией.

Задачу Дирихле можно сформулировать и так: найти функцию, непрерывную в данной замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, гармоническую в области Ω и принимающую на ее границе $\partial\Omega$ непрерывные заданные значения.

Единственность решения задачи Дирихле и ее непрерывная зависимость от краевых условий (корректность краевой задачи) вытекают из следующих свойств гармонических функций.

Свойство 1 (принцип максимума). Гармоническая в ограниченной области функция, непрерывная в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, не может принимать внутри этой области значений больших, чем максимум ее значений на границе $\partial\Omega$, и меньших, чем минимум ее значений на $\partial\Omega$.

Свойство 2 (единственность). Задача Дирихле для замкнутой и ограниченной области может иметь лишь единственное решение.

Доказательство. Допустим, что две функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, гармонические в области Ω , совпадают всюду на ее границе. Рассмотрим функцию $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$. Очевидно, что $u(x, y)$ – гармоническая функция, обращающаяся в нуль на границе. По свойству 1 эта функция не может принимать внутри Ω значений больше или меньше нуля, следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ внутри Ω и $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$.

Замечание. Из свойства 2 не следует, что задача Дирихле для ограниченной и замкнутой области Ω имеет решение; это свойство лишь утверждает, что если существует решение задачи Дирихле для области Ω , то оно единственно.

Свойство 3 (корректность задачи Дирихле). Решение задачи Дирихле для ограниченной и замкнутой области непрерывно зависит от граничных данных.

Доказательство. Допустим, что функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ являются решениями задачи Дирихле, соответственно принимающие на границе значения $\phi_1(x, y)$ и $\phi_2(x, y)$.

Пусть всюду на границе $\partial\Omega$ выполнено неравенство

$$|\phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)| < \varepsilon,$$

где ε – произвольное малое положительное число.

Рассмотрим гармоническую функцию $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$. На границе $\partial\Omega$ эта функция принимает значение $\phi(x, y) = \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)$. Так как $-\varepsilon < \phi(x, y) < \varepsilon$ на $\partial\Omega$, то по свойству 1 имеем $-\varepsilon < u(x, y) < \varepsilon$ при $(x, y) \in \Omega$, т. е. $-\varepsilon < u_1(x, y) - u_2(x, y) < \varepsilon$ или $|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon$.

Таким образом, требование корректности для задачи Дирихле выполнено.

1.1.3 Построение разностных аппроксимаций для уравнений

Пусть область Ω ограничена простой кусочно-гладкой линией $\partial\Omega$. Построим разностную аппроксимацию для уравнения Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (1.2)$$

Выберем прямоугольную сетку, в которой координаты узла (x_m, y_n) определяются $x_m = mh$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $y_n = nl$, $n = 0, \pm 1, \dots$, $h > 0$, $l > 0$.

К сеточной области Ω_h отнесем все узлы, принадлежащие $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$. Возьмем пятиточечный шаблон, изображенный на рисунке 1.1.

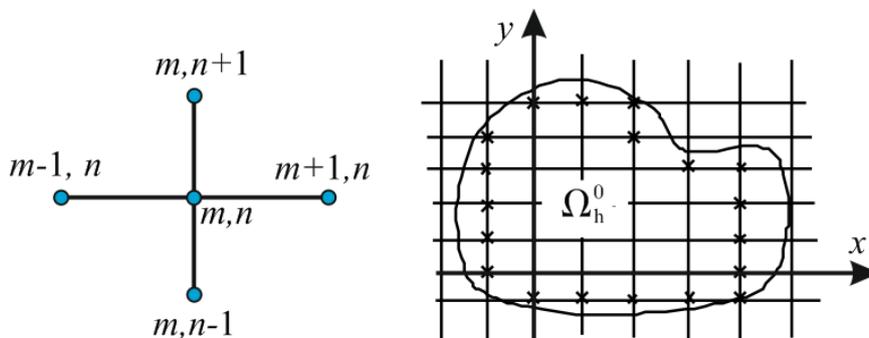


Рисунок 1.1 – Пятиточечный шаблон и сетка

Пользуясь расположением точек в этом шаблоне, разобьем узлы области на две категории: **внутренние** и **граничные**.

Узел (m, n) будем считать внутренним, если он сам и четыре соседних точки шаблона принадлежат области Ω_h . Множество таких узлов обозначим через Ω_h^0 . Остальные узлы назовем граничными и их множество обозначим через $\partial\Omega_h$. Таким образом, $\Omega_h = \Omega_h^0 + \partial\Omega_h$.

Пусть узел $(m, n) \in \Omega_h^0$. Замену дифференциального уравнения (1.2) разностным будем осуществлять только во внутренних узлах. Имеем

$$u''_{xx} \Big|_{(x_m, y_n)} + u''_{yy} \Big|_{(x_m, y_n)} = f(x_m, y_n).$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, после некоторых преобразований, получим

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \\ & + \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1}))}{l^2} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})} = f(x_m, y_n) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $(m, n) \in \Omega_h^0$, $x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}$, $y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}$.

Пусть функции $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}$ ограничены по абсолютной величине в области $\bar{\Omega}$, тогда при достаточно малых h и l , пренебрегая членами, содержащими h^2 и l^2 , получим искомое разностное уравнение

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} L_h u^{(h)} & \equiv \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0, \\ f^{(h)} & = f(x_m, y_n). \end{aligned}$$

Здесь через $u_{m,n}$ обозначено приближенное сеточное значение решения $u(x, y)$ уравнения (1.2), то есть $u_{m,n} = u(x_m, y_n)$.

В силу определения аппроксимации из (1.3) и (1.4) получаем

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}, \quad (1.5)$$

где

$$\delta f^{(h)} \equiv \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0.$$

Следовательно, при сделанных выше предположениях относительно четвертых производных по x и y , имеет место оценка

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq Mh^2, \quad (1.6)$$

где норма понимается, как и ранее, M – постоянная не зависящая от h , и считаем, что $l = \alpha h$, $\alpha > 0$.

Оценка (1.6) означает, что разностное уравнение (1.4) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1.2) на решении $u(x, y)$ с погрешностью порядка $O(h^2)$.

Замечание. Для уравнения Лапласа при $h = l$ разностное уравнение (1.4) принимает вид

$$u_{m,n} = \frac{1}{4}(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}),$$

где $(x_{m\pm 1}, y_{n\pm 1})$ – расчетные точки из области Ω_h^0 .

Рассмотрим случай, когда эллиптическое уравнение имеет вид

$$au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} = f(x, y), \quad (1.7)$$

причем a, b, c – постоянные величины и $b^2 - ac < 0$.

Для замены дифференциального уравнения разностным уравнением, выберем следующий девятиточечный шаблон (рисунок 1.2).

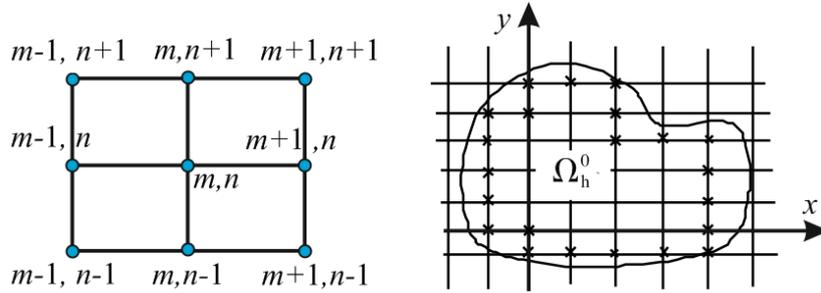


Рисунок 1.2 – Девятиточечный шаблон и сетка

Используя этот шаблон, выделим в области Ω_h множество внутренних узлов Ω_h^0 и множество граничных узлов $\partial\Omega_h$. Будем считать узел (m, n) внутренним, если этот узел и восемь соседних с ним узлов, содержащихся в шаблоне, принадлежат Ω_h . Оставшиеся узлы области Ω_h отнесем к граничным и их множество обозначим через $\partial\Omega_h$.

Запишем разностные выражения для замены смешанной производной u''_{xy} через центральные разности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_m, y_n)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{(x_m, y_n)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_{m+1}, y_n)} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_{m-1}, y_n)}}{2h} + O(h^2) = \\ &= \frac{1}{2h} \left[\frac{u(x_{m+1}, y_{n+1}) - u(x_{m+1}, y_{n-1})}{2l} + O(l^2) - \frac{u(x_{m-1}, y_{n+1}) - u(x_{m-1}, y_{n-1})}{2l} \right] + O(l^2) = \\ &= \frac{u(x_{m+1}, y_{n+1}) - u(x_{m+1}, y_{n-1}) - u(x_{m-1}, y_{n+1}) + u(x_{m-1}, y_{n-1})}{4hl} + O(h^2 + l^2). \end{aligned}$$

Будем полагать, что $\frac{l}{h} = \text{const}$. Теперь, аналогично тому, как было построено разностное уравнение (1.4), построим для уравнения (1.7) разностное уравнение, обладающее аппроксимацией порядка $O(h^2 + l^2)$. Имеем

$$a \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + 2b \frac{u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n-1} - u_{m-1,n+1} + u_{m-1,n-1}}{4hl} +$$

$$+ c \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2} = f(x_m, y_n), \quad (m,n) \in \Omega_h^0.$$

1.2 Аппроксимация граничных условий

1.2.1 Виды граничных условий

Для уравнений эллиптического типа могут ставиться на границе $\partial\Omega$ области Ω следующие граничные условия:

1) первого рода: $u|_{\partial\Omega} = \phi(y), \quad y \in \partial\Omega; \quad (1.8)$

2) второго рода: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \psi(y), \quad y \in \partial\Omega, \quad (1.9)$

здесь n – внешняя нормаль;

3) третьего рода: $\left[\alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y) u \right]|_{\partial\Omega} = \chi(y), \quad (1.10)$

где α, β, ϕ – известные функции.

Рассмотрим замену граничных условий (1.8), (1.9) разностными условиями на множестве граничных узлов $\partial\Omega_h$.

Пусть (m, n) – некоторый узел из $\partial\Omega_h$ – узел B . $(m+1, n)$ – внутренний узел, ближайший к B по направлению x – узел A . Буквой M обозначим точку контура $\partial\Omega$, ближайшую к B по направлению оси x . Аналогично можно поступать и в том случае, когда ближайшая к B точка будет лежать в направлении оси y (рисунок 1.3).

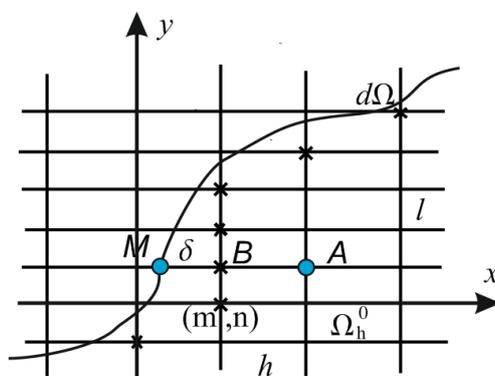


Рисунок 1.3 – Внутренние и граничные узлы для (1.8)

Координаты этих точек таковы: $M(x_m - \delta, y_n)$ ($0 < \delta < h$), $B(x_m, y_n)$, $A(x_{m+1}, y_n)$. Тогда согласно (1.8) для узлов $(m, n) \in \partial\Omega_h$ можно положить

$$u_{mn} = \phi(M). \quad (1.11)$$

1.2.2 Точность вычислений

Определим погрешность этой формулы:

$$\phi(M) = u(x_m - \delta, y_n) = u(x_m, y_n) - \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)}, \quad x_m - \delta < x_m^{(1)} < x_m.$$

Откуда

$$u(x_m, y_n) - \phi(M) = u(x_m, y_n) - u_{mn} = \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)}.$$

Теперь видно, что погрешность формулы (1.11) будет иметь первый порядок относительно h , если предположить, что $\delta = kh$, $k > 0$ – постоянная величина. Если точки M и B совпадают, то формула (1.11) будет точной.

1.2.3 Процесс усреднения Либмана

Точность вычисления u_{mn} при $(m, n) \in \partial\Omega_h$ можно повысить, если воспользоваться еще значением $u(x, y)$ в точке A (процесс Либмана). Имеем

$$u(M) = u(x_m - \delta, y_n) = u(B) - \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(B)} + \frac{\delta^2}{2!} u''_{xx} \Big|_{(\tilde{B})}, \quad (1.12)$$

где точка \tilde{B} лежит между точками M и B ,

$$u(A) = u(x_m + h, y_n) = u(B) + \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(B)} + \frac{\delta^2}{2!} u''_{xx} \Big|_{(\tilde{A})}, \quad (1.13)$$

где точка \tilde{A} лежит между точками A и B . Исключив из (1.12) $u'_x \Big|_{(B)}$ с помощью формулы (1.13), получим

$$u(B) = \frac{h\phi(M) + \delta u(A)}{h + \delta} + O(h^2).$$

Отбросив величину $O(h^2)$, получим разностное граничное условие, аппроксимирующее граничное условие (1.8) в узле $(m, n) \in \partial\Omega_h$ с погрешностью порядка $O(h^2)$

$$u(B) = \frac{h\phi(M) + \delta u(A)}{h + \delta}. \quad (1.14)$$

Формулы вида (1.11), (1.14) могут быть записаны для любого узла $(m, n) \in \partial\Omega_h$.

Обратимся теперь к задаче (1.9). Рассмотрим граничный узел B с координатами (x_m, y_n) , M – ближайшая к B точка контура $\partial\Omega$, A – внутренний узел с координатами (x_{m-1}, y_n) , C – граничный узел с координатами (x_m, y_{n-1}) и \vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке M . Далее $\alpha = \angle(Ox, \vec{n})$, $\beta = \angle(\vec{n}, Oy)$. Легко видеть, что $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (рисунок 1.4).

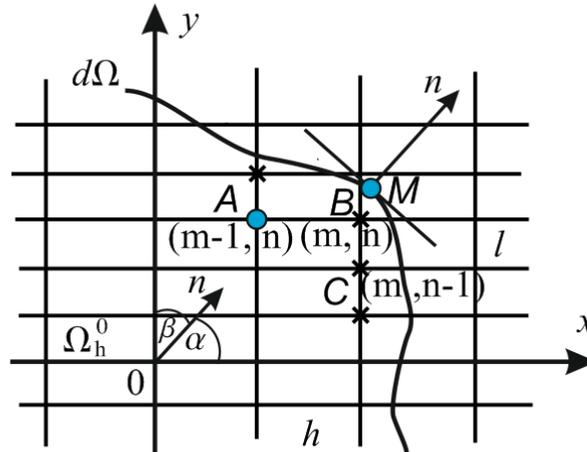


Рисунок 1.4 – Внутренние и граничные узлы для (1.9)

Заменим граничное условие (1.9) разностным в граничном узле B . По определению, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha.$$

Предположим, что в точке B направление нормали \vec{n} сохраняется таким же, как в точке M . Поскольку расстояние между точками M и B есть величина порядка $O(h)$, то это предположение связано с внесением погрешности того же порядка $O(h)$. Значит

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(M)} \approx \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(B)}.$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{u(x_m, y_n) - u(x_{m-1}, y_n)}{h} \cos \alpha + \frac{u(x_m, y_n) - u(x_m, y_{n-1})}{l} \sin \alpha + O(h + l) = \phi(M).$$

Отбрасывая погрешность, получим сеточное уравнение

$$\frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{h} \cos \alpha + \frac{u_{mn} - u_{m,n-1}}{l} \sin \alpha = \phi(M). \quad (1.15)$$

Формула (1.15) есть искомое разностное уравнение, аппроксимирующее в узле $(m, n) \in \partial\Omega_h$ граничное условие (1.9) с погрешностью порядка

$O(h+l)$. Выражения (1.15) должны быть записаны для всех граничных узлов $(m, n) \in \partial\Omega_h$, после чего будут получены разностные граничные условия, аппроксимирующие граничное условие (1.9).

Как видим, процесс замены граничных условий разностными может оказаться громоздкой и сложной задачей, особенно если контур $\partial\Omega$ имеет непростую форму. Замена граничных условий вида (1.10) может быть осуществлена с помощью формул вида (1.11), (1.14), (1.15).

1.3 Разностная схема для задачи Дирихле

1.3.1 Построение разностной схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Пусть в области $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1.16)$$

а на границе $\partial\Omega$ этой области – условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = \phi(M). \quad (1.17)$$

Здесь ϕ – известная функция и точка $M \in \partial\Omega$. Будем считать, что задача (1.16), (1.17) имеет единственное решение $u(x, y)$ в области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ и это решение имеет непрерывные производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$.

Введем в области Ω прямоугольную сетку. К множеству внутренних узлов Ω_h относятся все узлы, лежащие в Ω , а к множеству граничных узлов $\partial\Omega_h$ относятся все узлы, лежащие на границе $\partial\Omega$ области $\bar{\Omega}$.

Для аппроксимации уравнения (1.16) выберем пятиточечный шаблон – «крест» (рисунок 1.5).

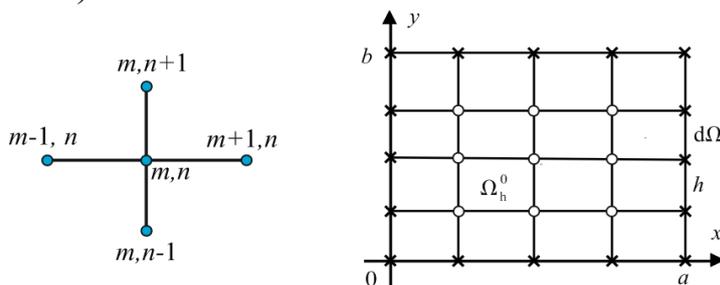


Рисунок 1.5 – Шаблон «крест» и прямоугольная область

Замену дифференциального уравнения разностным уравнением будем осуществлять только во внутренних узлах сетки. В результате получим

$$u''_{xx} \Big|_{(x_m, y_n)} + u''_{yy} \Big|_{(x_m, y_n)} = f(x_m, y_n).$$

По формуле Тейлора, после некоторых преобразований, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \\ & + \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1}))}{l^2} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})} = f(x_m, y_n), \end{aligned}$$

где $(m, n) \in \Omega_h^0$, $x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}$, $y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}$.

Пусть функции $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}$ ограничены по абсолютной величине в области $\bar{\Omega}$. Тогда при достаточно малых h и l пренебрегаем членами, содержащими h^2 и l^2 . В результате получаем разностное уравнение

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}, \quad (1.18)$$

где

$$\delta f^{(h)} \equiv \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0.$$

Условие на границе (1.17) аппроксимируется точно:

$$u_{mn} = \phi(x_m, y_n), \quad (mh, nl) \in \partial\Omega_h.$$

В результате получаем разностную схему, аппроксимирующую задачу (1.16), (1.17) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (1.19)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \frac{u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}}{h^2} + \frac{u_{m, n+1} - 2u_{m, n} + u_{m, n-1}}{l^2}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0,$$

$$f^{(h)} \equiv f(x_m, y_n).$$

Разностная схема (1.19) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, причем число уравнений и число неизвестных u_{mn} равно $(M-1) \times (N-1)$.

1.3.2 Об устойчивости разностной схемы

Доказательство устойчивости разностной схемы (1.19) сводится к доказательству следующих двух свойств:

1. Разностная схема

$$L_h z^{(h)} = g^{(h)},$$

где $g^{(h)} \equiv \begin{cases} \alpha_{mn} \\ \beta_{mn} \end{cases}$ – произвольный элемент из F_h , однозначно

разрешима.

2. Имеет место оценка

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|g^{(h)}\|_{F_h},$$

где C – постоянная, не зависящая от h и $g^{(h)}$.

Нормы в пространствах имеют вид

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |z_{mn}|, \quad \|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\alpha_{mn}| + \max_{m,n} |\beta_{mn}|.$$

Обозначим

$$\Lambda_h u^{(h)} \equiv \Lambda_{xx} u^{(h)} + \Lambda_{yy} u^{(h)}.$$

Лемма 1. Пусть $v^{(h)} = \{v_{mn}\}$, (v_{mn} – не тождественная константа) некоторая сеточная функция, определенная на $\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \partial\Omega_h$. Если выполняется условие $\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} \geq 0$, где $(x_m, y_n) \in \Omega_h^0$, то $v^{(h)}$ достигает своего наибольшего значения на Ω_h в граничных точках, то есть на $\partial\Omega_h$.

Лемма 2. Пусть $v^{(h)} = \{v_{mn}\}$, (v_{mn} – не тождественная константа) некоторая сеточная функция, определенная на $\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \partial\Omega_h$. Если выполняется условие $\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} \leq 0$, где $(x_m, y_n) \in \Omega_h^0$, то $v^{(h)}$ достигает своего наименьшего значения на Ω_h в граничных точках, то есть на $\partial\Omega_h$.

Теорема (принцип максимума). Каждое решение разностного уравнения

$$\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} = 0, \quad (x_m, y_n) \in \Omega_h^0$$

принимает свое наибольшее и наименьшее значение в некоторых точках границы $\partial\Omega_h$.

Эта теорема применяется к доказательству однозначной разрешимости разностной схемы $L_h z^{(h)} = g^{(h)}$ для любого $g^{(h)} \in F_h$. С этой целью рассматривается однородная разностная схема $L_h z^{(h)} = 0$ и показывается, что она имеет только нулевое решение $z^{(h)} = 0$. Отсюда и будет следовать однозначная разрешимость разностной схемы (1.19).

1.3.3 Метод матричной прогонки

Для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при аппроксимации задачи (1.16), (1.17) разностной схемой (1.19), используется метод матричной прогонки.

Перепишем разностную схему (1.19)

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, & m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ u_{mh}, & (mh, nl) \in \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n) \\ \phi(x_m, y_n) \end{cases}. \quad (1.20)$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n} + \alpha(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) &= h^2 f(x_m, y_n) \\ & \quad (m = 1, 2, \dots, M-1, n = 1, 2, \dots, N-1), \\ u_{0n} = \phi(0, y_n), \quad u_{Mn} = \phi(a, y_n) \quad & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_{m0} = \phi(x_m, 0), \quad u_{mN} = \phi(x_m, b) \quad & m = 1, 2, \dots, M-1, \quad \alpha^2 = \frac{h^2}{l^2} > 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Пусть $M \gg N$. Введем обозначение

$$u_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ \vdots \\ u_{mN-1} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (1.22)$$

Положим в формулах (1.21) $n = 1, 2, \dots, N-1$, и, учитывая (1.22), запишем систему уравнений (1.21) в векторной форме:

$$\begin{cases} u_{m+1} + Au_m + u_{m-1} = f_m, & m = 1, 2, \dots, M-1 \\ u_0 = \phi_0, \quad u_M = \phi_a \end{cases}, \quad (1.23)$$

где A – трехдиагональная матрица порядка $N-1$ вида

$$A = \begin{pmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{pmatrix},$$

$$f_m = \begin{pmatrix} h^2 f(x_m, y_1) - \alpha \phi(x_m, 0) \\ h^2 f(x_m, y_2) \\ \dots \\ h^2 f(x_m, y_{N-2}) \\ h^2 f(x_m, y_{N-1}) - \alpha \phi(x_m, b) \end{pmatrix}, \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} \phi(0, y_1) \\ \phi(0, y_2) \\ \dots \\ \phi(0, y_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \phi_a = \begin{pmatrix} \phi(a, y_1) \\ \phi(a, y_2) \\ \dots \\ \phi(a, y_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Метод матричной прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений (1.23) можно описать следующим образом:

1) по формуле $R_{m+1} = -(A + R_m)^{-1}$, $m = 1, 2, \dots, M-1$, полагая $R_1 = 0$, вычисляем матрицы

$$R_m = \left(R_{ij}^{(m)} \right)_1^{N-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Затем по формуле $S_{m+1} = R_{m+1}(S_m - f_m)$, $m = 1, 2, \dots, M-1$, полагая $S_1 = \phi_0$, вычисляем векторы $S_m = (S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \dots, S_{N-1}^{(m)})^T$, $m = 1, 2, \dots, M$;

2) по формуле $u_{m-1} = R_m u_m + S_m$, $m = M, M-1, \dots, 1$, полагая $u_M = \phi_a$, последовательно определяются искомые значения решения задачи (1.23): $u_M, u_{M-1}, \dots, u_1, u_0$.

Указанный алгоритм устойчив к ошибкам округления, если для любого m выполняется условие $\|R_m\|_{III} \leq 1$ (здесь норма матрицы есть корень квадратный из наибольшего собственного значения матрицы $R_m^* R_m$, где * означает переход к комплексно сопряженной и транспонированной матрице).

В описанном выше методе направление прогонки выбирается совпадающим с направлением оси Ox . Такое направление особенно выгодно брать при условии $M \gg N$, так как основной объем вычислений в методе прогонки приходится на определение матриц $R_{m+1} = -(A + R_m)^{-1}$. Этот объем вычислений будет тем меньше, чем меньше порядок матриц $A + R_m$.

Если задача (1.23) такая, что $N \gg M$, то алгоритм метода прогонки следует видоизменить, взяв за направление прогонки ось Oy .

1.4 Метод итерации для решения задачи Дирихле

1.4.1 Правило Рунге

Это правило позволяет на основе вычислений судить о том, с какой точностью получены приближенные сеточные значения решения.

Пусть $u(x, y)$ – точное решение некоторой граничной задачи, а $u_h(x, y)$ – приближенное решение этой задачи, полученное по методу сеток с шагами h и l , $\frac{l}{h} = \text{const}$. В методе сеток часто известен порядок погрешности относительно h

$$\varepsilon_h(x, y) = u(x, y) - u_h(x, y).$$

Предположим, что для $\varepsilon_h(x, y)$ имеет место представление $\varepsilon_h(x, y) = K(x, y) \cdot h^p$, верное с точностью до величин порядка $O(h^{p+1})$, где $K(x, y)$ – некоторая положительная, ограниченная в области Ω функция, p – положительное число.

При шаге, в два раза большем чем h , получим:

$$\varepsilon_{2h}(x, y) = u(x, y) - u_{2h}(x, y),$$

$$\varepsilon_{2h}(x, y) = K(x, y) \cdot (2h)^p = 2^p \varepsilon_h(x, y).$$

Из последних формул получается следующее правило для определения $\varepsilon_h(x, y)$ через сеточные значения $u_h(x, y)$ и $u_{2h}(x, y)$:

$$\varepsilon_h(x, y) = \frac{\varepsilon_h(x, y) - \varepsilon_{2h}(x, y)}{2^p - 1}.$$

Эта формула является приближенной, но ее достоинство состоит в том, что $\varepsilon_h(x, y)$ можно реально вычислить.

Учитывая погрешность $\varepsilon_h(x, y)$, получаем, что значение

$$\tilde{u}_h(x, y) = u_h(x, y) + \varepsilon_h(x, y)$$

будет более точное, чем $u_h(x, y)$. В этом и состоит смысл правила Рунге для уточнения сеточных значений $u_h(x, y)$.

Обычно в действительных вычислениях поступают следующим образом. Находят решение при шаге h , потом вычисляют решение при шаге $2h$ и сравнивают значения $u_h(x, y)$ и $u_{2h}(x, y)$ в одинаковых узлах. Если значения совпадают при заданном числе знаков, то решение $u_h(x, y)$ является искомым, в противном случае шаг h делят пополам и вычисляют решение $u_{h/2}(x, y)$. И так далее.

1.4.2 Идея метода итерации

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\} \\ u|_{\partial\Omega} = \phi(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}. \quad (1.24)$$

Запишем для задачи (1.24) разностную схему в виде:

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx}(u_{mn}) + \Lambda_{yy}(u_{mn}) &= f(x_m, y_n), \quad m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ u_{mn} &= \phi(x_m, y_n), \quad (x_m = mh, y_n = nl) \in \partial\Omega_h \end{aligned}. \quad (1.25)$$

Здесь

$$\Lambda_{xx}(u_{mn}) = \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2}, \quad \Lambda_{yy}(u_{mn}) = \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}.$$

Сопоставим задачу (1.24) с родственной ей нестационарной задачей о распространении тепла

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - f(x, y), & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ v|_{\partial\Omega} = \phi(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \\ v(x, y, 0) = \psi(x, y), & (x, y) \in \Omega \end{cases}, \quad (1.26)$$

где $\psi(x, y)$ – произвольная функция, которая выбирается таким образом, чтобы она как можно меньше отличалась от решения задачи (1.24).

В задаче (1.26) источник тепла $f(x, y)$ и температура на границе $\phi(x, y)$ не зависят от времени t . Поэтому естественно ожидать, что при $t \rightarrow \infty$ будет выполняться соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t; x, y) = u(x, y),$$

а, значит, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t; x, y) = u(x, y)$, так как в этом случае задачи (1.24) и (1.26) совпадают. Таким образом, можно предполагать, что для достаточно больших значений с необходимой точностью будет верно приближенное равенство

$$v(t; x, y) \approx u(x, y).$$

На этой закономерности основана идея метода решения стационарных задач, состоящая в замене их подходящими нестационарными задачами. Этот метод называется *методом установления*.

1.4.3 Различные итерационные схемы

Запишем разностную схему, реализующую метод установления. Используем шеститочечный шаблон, представленный на рисунке 1.6.

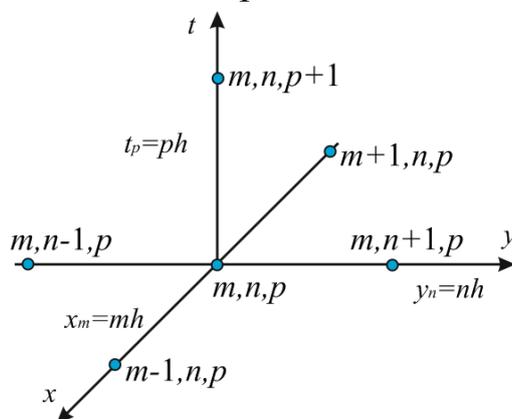


Рисунок 1.6 – Явный шеститочечный шаблон

Теперь для задачи (1.26) простейшая явная двухслойная разностная схема будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{v_{mn}^{p+1} - v_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{xx}(v_{mn}^p) + \Lambda_{yy}(v_{mn}^p) - f(x_m, y_n) \\ v_{mn}^{p+1} = \phi(x_m, y_n), \quad (mh, nl) \in \partial\Omega_h, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \\ v_{mn}^0 = \psi(x_m, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.27)$$

Доопределим функцию $\psi(x, y)$ так, чтобы при $(mh, nl) \in \partial\Omega_h$ выполнялось условие $\psi(x_m, y_n) = \phi(x_m, y_n)$.

Разностная схема (1.27) имеет преимущества по сравнению со схемой (1.25). Схема (1.25) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных $(M-1) \times (N-1)$. При больших M и N решение таких систем на ЭВМ представляет собой достаточно трудную задачу. В то же время вычисления по формуле (1.27) довольно просты и носят итерационный характер. Разностная схема (1.27) представляет собой простейший *явный метод установления*.

Кроме схемы (1.27) для решения задачи Дирихле можно использовать еще и следующую схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{mn} - v_{mn}^p}{\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_{xx}(w_{mn}) + \Lambda_{yy}(v_{mn}^p) - f(x_m, y_n)) \\ \frac{v_{mn}^{p+1} - w_{mn}}{\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_{xx}(w_{mn}) + \Lambda_{yy}(v_{mn}^{p+1}) - f(x_m, y_n)) \\ v_{mn}^{p+1} = w_{mn} = \phi(x_m, y_n), \quad (mh, nl) \in \partial\Omega_h, \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \\ v_{mn}^0 = \psi(x_m, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Вычисления по схеме (1.28) сложнее, чем вычисления по схеме (1.27), но гораздо проще, чем по схеме (1.25). Это особенно видно, когда при решении задачи (1.28) воспользоваться методом разностной прогонки по направлению переменной x для вычисления значений $\{w_{mn}\}$ и методом разностной прогонки по направлению переменной y для вычисления значений $\{v_{mn}^p\}$. Разностную схему (1.28) называют **методом переменных направлений**.

1.5 Метод Рунца для решения задачи Дирихле

1.5.1 Метод Рунца

Будем искать решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.29)$$

с граничными значениями

$$u|_{\partial\Omega} = f(x, y), \quad (1.30)$$

где $\partial\Omega$ – простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область Ω , а функция $f(x, y)$ непрерывная на границе $\partial\Omega$.

Согласно методу Рунца, эта краевая задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (1.31)$$

в классе функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $\Omega + \partial\Omega$ и удовлетворяющих на границе $\partial\Omega$ краевому условию (1.30). Построим конечную систему линейно независимых функций

$$u_0(x, y), u_1(x, y), \dots, u_n(x, y) \in C^{(2)}(\Omega + \partial\Omega),$$

таких, что

$$u_0(x, y)|_{\partial\Omega} = f(x, y), \quad u_i(x, y)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Метод прямых можно рассматривать как предельный случай метода сеток, когда при применении прямоугольной сетки один из ее линейных размеров стремится к нулю, а множество узлов в пределе заполняет некоторую систему прямолинейных параллельных отрезков. Если коэффициенты в исходном уравнении не зависят от переменной x , то система метода прямых состоит из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение последних не вызывает трудностей.

Этот метод применим для уравнения Пуассона. Пусть в прямоугольной области $R\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1.36)$$

и требуется найти решение $u = u(x, y)$ этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} u(x, c) = \phi_0(x), & u(x, d) = \phi_1(x) \\ u(a, y) = \psi_0(y), & u(b, y) = \psi_1(y) \end{cases} \quad (1.37)$$

Здесь функции f, ψ_k ($k = 0, 1$) непрерывны и $\phi_k \in C^{(2)}[a, b]$ ($k = 0, 1$).

Краевую задачу (1.36)–(1.37) будем решать *методом прямых*. Для этого выберем шаг $h = \frac{d-c}{n}$ и через точки деления $y_j = y_0 + hj$ ($j = 0, 1, \dots, n; y_0 = c, y_n = d$) проведем параллели $y = y_j$. Пусть $u_j(x) = u(x, y_j)$. Предполагая, что функция $u(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по y до шестого порядка включительно, разложим функции $u_{j+1}(x) = u(x, y_j + h)$ и $u_{j-1}(x) = u(x, y_j - h)$ по формуле Тейлора с точностью до $O(h^6)$. Имеем

$$\begin{aligned} u_{j+1}(x) = u_j(x) &+ \frac{\partial u(x, y_j)}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x, y_j)}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \\ &+ \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^5 u(x, y_j)}{\partial y^5} \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 u(x, y_j + \theta_1 h)}{\partial y^6} \frac{h^6}{6!}, \quad 0 < \theta_1 < 1 \end{aligned} \quad (1.38)$$

и

$$\begin{aligned} u_{j-1}(x) = u_j(x) &- \frac{\partial u(x, y_j)}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 u(x, y_j)}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \\ &+ \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^5 u(x, y_j)}{\partial y^5} \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 u(x, y_j - \theta_2 h)}{\partial y^6} \frac{h^6}{6!}, \quad 0 < \theta_2 < 1 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Сложив равенства (1.38) и (1.39), получим

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^6). \quad (1.40)$$

Заменяя в формуле (1.40) функции

$$u_k(x) = u(x, y_k), \quad k = j+1, j, j-1$$

соответствующими вторыми производными $\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2}$ и ограничиваясь членами порядка h^2 , будем иметь

$$\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} h^2 + O(h^4). \quad (1.41)$$

Исключая из формул (1.40) и (1.41), производную четвертого порядка и отбрасывая члены порядка h^6 , получаем приближенную формулу

$$\begin{aligned} u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) &= \\ &= h^2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} \right], \end{aligned}$$

которая после приведения подобных членов принимает вид

$$\begin{aligned} u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) &= \\ &= \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} + 10 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Формула (1.42), имеющая точность $O(h^6)$, может быть использована для решения краевой задачи (1.36)–(1.37). Действительно, из уравнения (1.36), при $y = y_k$ и $f_k(x) = f(x, y_k)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, имеем

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f_k(x) - u_k''(x), \quad (1.43)$$

Отсюда, заменяя в формуле (1.42) вторые частные производные по y их значениями из формулы (1.43), для определения решений $u_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_{i+1}''(x) + 10u_i''(x) + u_{i-1}''(x) + \frac{12}{h^2} [u_{i+1}(x) - 2u_i(x) + u_{i-1}(x)] &= \\ &= f_{i+1}(x) + 10f_i(x) + f_{i-1}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Эта усовершенствованная система (1.44) метода прямых была предложена М. Г. Слободянским и аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до $\frac{12}{h^2} O(h^6) = O(h^4)$.

На основании краевых условий (1.37) дополнительно получаем

$$u_0(x) = \phi_0(x), \quad u_n(x) = \phi_1(x); \quad u_j(a) = \psi_0(y_j), \quad u_j(b) = \psi_1(y_j) \quad (1.45)$$

$(j = 1, 2, \dots, n-1)$.

Отсюда

$$u_0''(x) = \phi_0''(x), \quad u_n''(x) = \phi_1''(x).$$

Общее решение системы (1.44), как известно, складывается из частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы

$$v_{i+1}''(x) + 10v_i''(x) + v_{i-1}''(x) + \frac{12}{h^2}[v_{i+1}(x) - 2v_i(x) + v_{i-1}(x)] = 0. \quad (1.46)$$

Очевидно, что общее решение системы (1.46) не зависит от области R и краевых условий (1.37) и для данного уравнения (1.36) может быть получено раз и навсегда. Приведем без вывода формулы общего решения системы (1.46):

$$v_i(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k (y_i - y_0)}{l} (A_k e^{\sigma_i x} + B_k e^{-\sigma_i x}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $l = d - c$, A_k , B_k – произвольные постоянные и

$$\sigma_i^2 = \frac{24}{h^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi (y_i - y_0)}{2l}}{5 + \cos \frac{\pi (y_i - y_0)}{l}}.$$

Частное решение неоднородной системы (1.44) находится обычным путем, в крайнем случае, можно применить метод вариации произвольных постоянных. Для отыскания постоянных A_k , B_k на основании условий (1.45) получается алгебраическая система $2n - 2$ уравнений.

Вопросы для самоконтроля

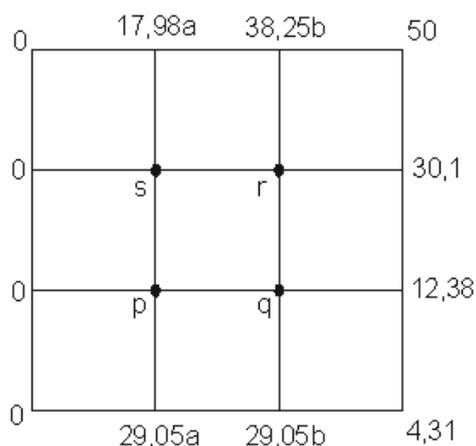
- 1 Какие краевые задачи вы знаете для уравнений эллиптического типа?
- 2 Что понимается под единственностью решения задачи Дирихле?
- 3 Как строятся разностные аппроксимации для уравнений.
- 4 В чем смысл процесса усреднения Либмана?

- 5 Как строится разностная схема задачи Дирихле для уравнения Пуассона?
- 6 О чем гласит принцип максимума для разностной схемы?
- 7 В чем смысл метода матричной прогонки?
- 8 О чем говорит правило Рунге?
- 9 В чем состоит идея метода итерации?
- 10 Какие итерационные схемы вы знаете?
- 11 В чем смысл метода Ритца?
- 12 Какова схема метода прямых для уравнения Пуассона?

Задания для уравнения эллиптического типа

Задание 1.1. Вариант 1–9. Применяя метод сеток, найти приближенное решение уравнения Лапласа в точках p, q, r, s квадрата при краевых условиях, указанных на рисунке 1.7, для $a = 0,9 + 0,1k$, $b = 1,01 + 0,01n$, где k, n взять из таблицы 1.1.

Таблица 1.1 – Варианты



Вариант	k	n
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	1
5	2	2
6	2	3
7	3	1
8	3	2
9	3	3

Рисунок 1.7

Задание 1.1. Вариант 10–21. Применяя метод сеток с шагом $h = 1/4$, найти приближенное решение уравнения Лапласа в квадрате с вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$. Краевые условия приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Граничные условия

Вариант	$u _{AB}$	$u _{BC}$	$u _{CD}$	$u _{AD}$
10	$32y$	$32 \cos(\pi x / 2)$	$32 \cos(\pi y / 2)$	0
11	$35y(1 - y^2)$	0	0	$35 \sin(\pi x)$

12	$21y$	21	$21y^2$	$23x(1-x)$
13	0	$25x(1-x)$	$25y(1-y^2)$	$25x(1-x)$
14	$30\sin(\pi y)$	$25x$	$25y$	$30x(1-x)$
15	$33(1-y)$	$22\sqrt{x}$	$22y$	$33(1-x)$
16	$35\sin(\pi y)$	$35\sqrt{x}$	$35y^2$	$35\sin(\pi x)$
17	$28y$	$28\cos(\pi x / 2)$	$28\cos(\pi y / 2)$	$28x$
18	$40y$	$10(1-x)$	$10(1-y)$	$40x(1-x)$
19	$40\sin(\pi y)$	$25\sqrt{x}$	$25y^2$	$40\sin(\pi x)$
20	$23y$	$23(1-x^2)$	0	0
21	$36(1-y)$	$22\sqrt{x}$	$22y$	$36(1-x)$

Задание 1.2. Вариант 1–9. Применяя метод усреднения Либмана, найти приближенное решение уравнения Лапласа с шагом $h = 1/8$ в квадрате с вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$. Краевые условия приведены в таблице 1.3. Итерации проводить с точностью до 10^{-3} .

Таблица 1.3 – Граничные условия

Вариант	$u _{AB}$	$u _{BC}$	$u _{CD}$	$u _{AD}$
1	$23y$	$23(1-x^2)$	0	0
2	$28y$	$28\cos(\pi x / 2)$	$28\cos(\pi y / 2)$	0
3	$40y(1-y^2)$	0	0	$40\sin(\pi x)$
4	$20y$	20	$20y^2$	$20x(1-x)$
5	0	$35x(1-x)$	$35y(1-y^2)$	$35x(1-x)$
6	$32\sin(\pi y)$	$20x$	$20y$	$32x(1-x)$
7	$36(1-y)$	$22\sqrt{x}$	$22y$	$36(1-x)$
8	$45\sin(\pi y)$	$33\sqrt{x}$	$33y^2$	$45\sin(\pi x)$
9	$32y$	$32\cos(\pi x / 2)$	$32\cos(\pi y / 2)$	0

Задание 1.2. Вариант 10–21. Применяя метод усреднения Либмана, найти приближенное решение уравнения Лапласа в квадрате $ABCD$ для краевых условий, указанных в таблице 1.4, с шагом $h = 1/6$ при следующих значениях параметров: $\alpha = 0,9 + 0,1k$, $\beta = 1,01 + 0,02n$, где k , n взять из таблицы 1.4. Итерации проводить с точностью до 10^{-3} .

Таблица 1.4 – Граничные условия

Вариант	$u _{AB}$	$u _{BC}$	$u _{CD}$	$u _{AD}$	k	n
10	0	$3,8\alpha$	$4,31\beta$	0	1	1

11	0	9,81 α	6,98 β	17,28	2	2
12	0	17,98 α	12,38 β	29,05 α	1	1
13	0	29,12	19,14 β	40	2	2
14	0	38,25 β	30,10 α	24,05 β	1	1
15	0	42,31	40,16 β	16,28	1	2
16	0	50 α	50	4,31 β	2	1
17	0	15,98 α	10,38 β	26,05 α	2	2
18	0	28,42 α	24,45	30,26 β	3	2
19	0	8,81 α	7,98 β	15,28	2	2
20	0	14,98 α	11,38 β	19,05 α	1	1
21	0	23,12	18,14 β	30	2	2

Задание 1.3*. Разностным методом с шагом h найти решение уравнения Лапласа в криволинейной области G при указанных в таблице 1.5 краевых условиях. Решение конечно-разностной системы получить методом Либмана с уточнением граничных значений.

Таблица 1.5 – Область и краевые условия

Вариант	Шаг h	Область G	Краевые условия
1	2	3	4
1	0,1	$2y \leq 1 - 4x^2,$ $y \geq 0, \quad x \geq 0$	$u _{x=0} = 0, \quad u _{y=0} = (1 - 4x^2)x$ $u _{2y=1-4x^2} = 12xy^2$
2	0,2	$x^2 + (y + 3)^2 \leq 16,$ $y \geq 0$	$u _{y=0} = 0, \quad u _C = 2y(2x^2 + 3y),$ $C: x^2 + (y + 3)^2 = 16$
3	1	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$	$u _C = x + y , \quad C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
4	1	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1$	$u _C = 2 x + y , \quad C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$
5	1	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1$	$u _C = x + 2 y , \quad C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
6	1	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} \leq 1$	$u _C = x \cdot y , \quad C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$
7	1	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$	$u _C = 2 x \cdot y , \quad C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

8	1	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1$	$u _C = x + 0,5 y , C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
9	1	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} \leq 1$	$u _C = 0,5 x + y , C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$
10	1	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1$	$u _C = x + y , C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
11	1	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1$	$u _C = 0,5 x + 2 y , C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Продолжение таблицы 1.5

1	2	3	4
12	1	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1$	$u _C = 2 x + 0,5 y , C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
13	1	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$	$u _C = 0,5 x \cdot y , C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
14	1	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1$	$u _C = 0,5 x + y , C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
15	1	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$	$u _C = 2 x + y , C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
16	0,2	$x^2 + (y+3)^2 \leq 16,$ $y \geq 0$	$u _{y=0} = x(7-x^2), u _C = 4xy^2,$ $C: x^2 + (y+3)^2 = 16$
17	0,1	$2y \leq 1 - 4x^2,$ $y \geq 0, x \geq 0$	$u _{x=0} = 0, u _{y=0} = (1+4x^2)x$ $u _{2y=1-4x^2} = 12xy^2$
18	0,2	$x^2 + (y-3)^2 \leq 16,$ $y \geq 0$	$u _{y=0} = x(7-x^2), u _C = 4xy^2,$ $C: x^2 + (y-3)^2 = 16$
19	1	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$	$u _C = x + y , C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
20	1	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1$	$u _C = 0,5 x + y , C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

21	0,5	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1$	$u _C = 2 x + y , C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$
----	-----	---	--

Примеры и способы решения поставленных краевых задач можно также найти в [7, 10, 12].

Рассмотрим метод Либмана на примере решения уравнения Лапласа.
Пример. Найти приближённое решение уравнения,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющего на окружности $x^2 + y^2 = 16$ условию

$$u(x, y)|_{\Gamma} = x^2 y^2.$$

Решение. Область Γ , симметричная относительно осей координат (граничные условия также симметричны), поэтому рассмотрим I-ю четверть круга. Для применения конечно-разностных методов необходимы начальные приближения.

Полагаем, значения искомой функции в узлах сетки, близких к границе (приграничные узлы) равным значениям этой функции на границе. Рассмотрим сетку с шагом $h = 2$ (рисунок 1.8 а). Для узла A при $h = 2$ из уравнения окружности найдём $A(4;2)$. Ближайшей к узлу A точкой границы является точка $M(\sqrt{12};2)$. Из граничного условия находим $u(A) \approx (M) = 12 * 2^2 = 48$.

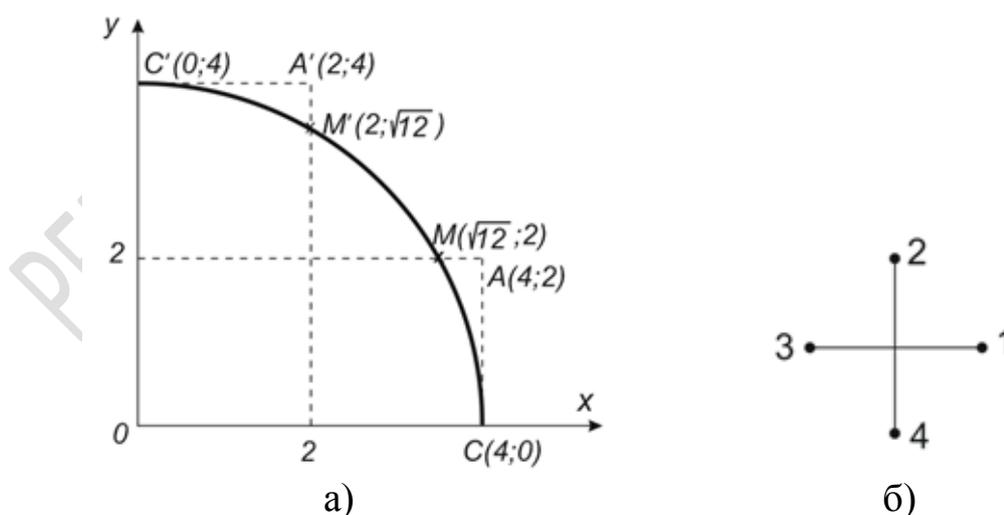


Рисунок 1.8 – Схема решения задачи

Аналогично для узлов C и C' при $x = 0$ и $y = 0$ значения функции на границе обращаются в нуль, поэтому в узлах $C(4;0)$ и $C'(0;4)$, $u(C) = u(C') = 0$.

Для определения значений функции в регулярных узлах имеем систему конечно-разностных уравнений, полученных заменой частных производных в данном уравнении конечно-разностными отношениями и использованием пятиточечного шаблона «крест» (рисунок 1.8 б):

$$u_0 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4).$$

Тогда в примере имеем

$$u_1 = \frac{1}{4}(2u_2 + 2u(M)) = \frac{1}{4}(96 + 2u_2),$$

$$u_2 = \frac{1}{4}(2u_1 + u_0 + 0) = \frac{1}{4}(48 + u_2 + u_0), \quad u_0 = \frac{1}{4}4u_2 = u_2.$$

Откуда $u_0 = 24$; $u_2 = 24$; $u_1 = 36$.

Для повышения точности вычислений уменьшаем шаг в два раза и снова рассматриваем четверть круга, учитывая симметрию решения.

Начальные значения искомой функции определяем, зная значения, полученные в узлах крупной сетки, и принимая значения в приграничных узлах равными значениям функций на границе.

На практике для оценки точности решения используют двойной пересчёт решения с шагом h и $2h$. Если соответствующие результаты совпадают с заданной точностью, то считают, что искомое решение найдено правильно. В противном случае расчёт повторяют с шагом $0,5h$.

ТЕМА 2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1 Метод сеток для уравнений гиперболического типа

2.1.1 Постановка задач для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим волновое уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (2.1)$$

где $f(x, y)$ – известная дважды непрерывно дифференцируемая в области Ω функция.

Будем рассматривать следующие задачи:

Задача Коши. В области $\Omega = \{y > 0; -\infty < x < \infty\}$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$, которая в этой области удовлетворяла бы уравнению (2.1), а на прямой $y = 0$ – начальным условиям

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi(x), \quad (2.2)$$

где $\phi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции.

Смешанная граничная задача. В области $\Omega = \{y > 0; a < x < b\}$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (2.1), а на границе области $\partial\Omega$ при $y = 0$ – начальным условиям (2.2) и при $x = a$ и $x = b$ – одному из граничных условий:

а) первого рода:

$$u(a, y) = \mu_1(y), \quad u(b, y) = \mu_2(y); \quad (2.3)$$

б) второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \sigma_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = \sigma_2(y); \quad (2.4)$$

в) третьего рода:

$$\left[\tau_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_2(y) u \right]_{x=a} = \omega_1(y), \quad (2.5)$$

$$\left[\delta_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y) u \right]_{x=b} = \omega_2(y),$$

где $\mu_i, \sigma_i, \tau_i, \delta_i, \omega_i$ ($i = 1, 2$) – известные функции, причем $|\tau_1(y)| + |\tau_2(y)| > 0, |\delta_1(y)| + |\delta_2(y)| > 0$.

2.1.2 Решение задачи Коши

Для решения задачи Коши (2.1), (2.2) будем использовать метод сеток. Выберем прямоугольную сетку:

$$x_m = mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad y_n = nl, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad h > 0, \quad l > 0.$$

Рассмотрим трехслойный пятиточечный шаблон вида «крест» (рисунок 2.1).

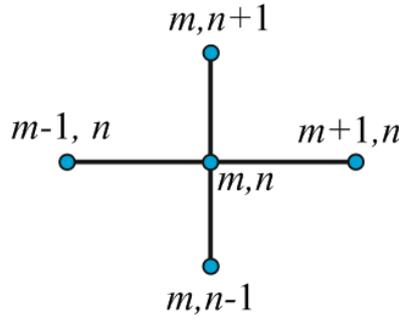


Рисунок 2.1 – Шаблон «крест»

В соответствии с рисунком 2.1 к множеству внутренних узлов относятся узлы $(x_m, y_n) \in \Omega$, а к $\partial\Omega_h$ – узлы, лежащие на прямой $y = 0$.

Используя выбранный шаблон, а также соответствующие формулы для замены вторых производных, получим следующую разностную схему:

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (2.6)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} \\ u_m^0 \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{l} \end{cases}, \quad f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n) \\ \phi(x_m) \\ \psi(x_m) \end{cases}$$

причем $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Эта схема аппроксимирует уравнение (2.1) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$, а начальное условие – с погрешностью $O(l)$. Действительно, по определению погрешности аппроксимации получим

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

где $[u]_h$ – значение точного решения задачи (2.1), (2.2) в узлах сетки Ω_h , а $\delta f^{(h)}$ – погрешность аппроксимации, которая имеет вид

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, & x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}, \\ 0, & y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}, \\ \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, & y_0 < y_0^{(1)} < y_1, m = 0, \pm 1, \dots; n = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

Если предположить, что решение задачи (2.1), (2.2) продолжимо в область $\Omega = \{-l \leq y \leq 0, -\infty < x < +\infty\}$, то порядок аппроксимации началь-

ных условий можно повысить. Используя центральную разностную производную, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_m, 0)} = \frac{u(x_m, y_1) - u(x_m, y_{-1})}{2l} - \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{(x_m, y_0^{(2)})}, \quad y_{-1} = l, -l < y_0^{(2)} < l.$$

Отбрасывая погрешность порядка $O(l^2)$, будем иметь

$$\frac{u_m^1 - u_m^{-1}}{2l} = \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.7)$$

Значение u_m^{-1} исключим из (2.7). Для этого используем само разностное уравнение при $n = 0$

$$\frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{h^2} - \frac{u_m^1 - 2u_m^0 + u_m^{-1}}{l^2} = f(x_m, y_n).$$

В результате равенство (2.7) примет вид

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{l} = \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, y_n),$$

где $\Lambda_{xx}(u_m^0) \equiv \frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{h^2}$.

Таким образом, вместо разностной схемы (2.6) можно рассматривать разностную схему

$$L_n u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (2.8)$$

которая аппроксимирует задачу (2.1), (2.2) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$. Здесь оператор L_n – такой же, как и ранее, а $f^{(h)}$ определяется по формуле

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f(x_m, y_n), & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 1, 2 \\ \phi(x_m) \\ \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, y_n). \end{cases}$$

Представим разностное уравнение в схеме (2.8) в виде

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + l^2 \Lambda_{xx}(u_m^n) - u_m^{n-1} - l^2 f(x_m, y_n), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.9)$$

Тогда **численная реализация** разностной схемы (2.8) проводится следующим образом.

Из (2.8) определяется решение на нулевом и первом слоях

$$u_m^0 = \phi(x_m),$$

$$u_m^1 = \phi(x_m) + l \left[\psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(\phi(x_m)) - \frac{l}{2} f(x_m, y_0) \right], \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (2.10)$$

Так как значения u_m^0 и u_m^1 известны, то по формуле (2.9) при $n = 1$ можно вычислить значение u_m^2 , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Далее по формуле (2.9) определяется решение при $n = 2, 3, 4, \dots$.

Разностная схема (2.8) устойчива при $l \leq h$.

2.1.3 Треугольник определенности

Исследуем вопрос о том, каким может быть $\gamma = \frac{l}{h} > 0$ в случае гиперболического уравнения.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (2.1) с начальными условиями (2.2). Разностная схема (2.8) в этом случае запишется

$$u_m^{n+1} = \gamma^2 u_{m+1}^n + (2 - 2\gamma^2) u_m^n + \gamma^2 u_{m-1}^n - u_m^{n-1}, \quad (2.11)$$

$$u_m^0 = \phi(x_m), \quad u_m^1 = \phi(x_m) + l\psi(x_m).$$

Учитывая шаблон, значения u_i^j в конечном счете могут быть выражены через значения u_m^0 и u_m^1 . Все эти значения находятся внутри ΔSCD , причем $\angle SDC = \arctg(-\gamma)$, а $\angle SCD = \arctg(\gamma)$. Треугольник ΔSCD называют *треугольником определенности* разностной схемы (2.11).

Таким образом, значение u_i^j в точке S определяется разностным уравнением (2.11) и начальными значениями $u_m^0 \in CD$ и $u_m^1 \in EF$.

Точное значение решения $u(x, y)$ этой задачи с начальными условиями (2.2), как известно из математической физики, определяется однородным уравнением и начальными условиями, содержащимися на отрезке, отсекаемом характеристиками, проходящими через точку S , на прямой $y = 0$, то есть, на отрезке AB . Эти характеристики образуют соответственно углы $\angle SAB = \frac{\pi}{4}$ и $\angle SBx = \frac{3\pi}{4}$. Треугольник SAB называется *треугольником определенности* дифференциального уравнения (рисунок 2.2).

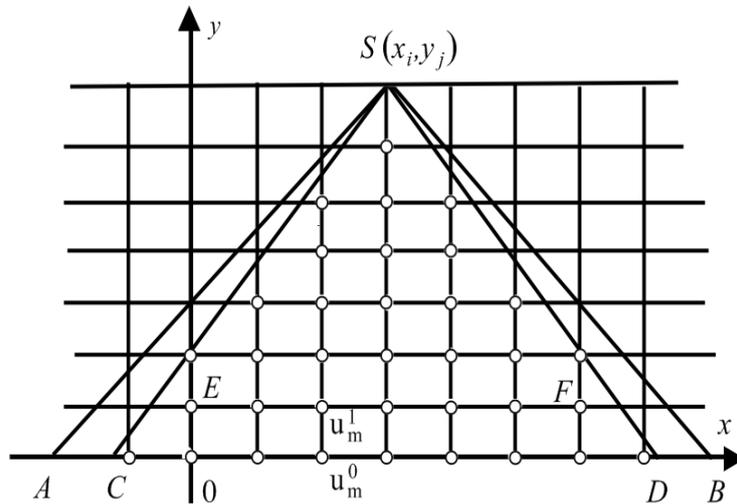


Рисунок 2.2 – Треугольник определенности

В случае, когда $\angle SAB < \angle SCD$ и $\text{tg}(\angle SCD) = \gamma = \frac{l}{h} > 1$, соотношение шагов оказывается неудачным, так как $\Delta CSD \subset \Delta ASB$. И если мы каким-либо образом изменим начальные условия на отрезках AC и DB , то это может изменить и решение исследуемой задачи во всей области Ω , в том числе и в точке S . Однако сеточное значение u_i^j в точке S от таких изменений зависеть не будет и останется прежним. Значит, тогда нельзя надеяться на сходимость решения разностной схемы (2.11), из чего следует, что эта разностная схема не может быть устойчивой. Значит, при $\gamma > 1$ устойчивости нет.

Но если $\Delta ASB \subset \Delta CSD$, то это означает, что $\frac{l}{h} = \gamma \leq 1$, и можно надеяться на устойчивость. Таким образом, в разностной схеме (2.11) для устойчивости необходимо положить $\gamma \leq 1$.

2.2 Метод сеток для решения смешанной задачи

2.2.1 Решение смешанной задачи

Пусть уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.12)$$

задано в области $\Omega = \{0 < y \leq Y < +\infty, a < x < b\}$ (рисунок 2.3).

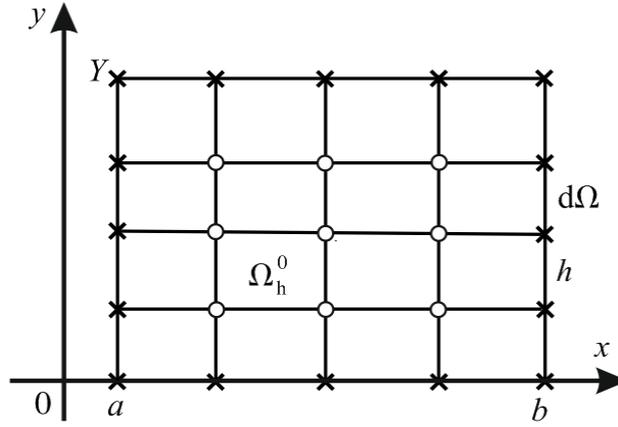


Рисунок 2.3 – Сеточная область задачи

Будем считать, что решение уравнения (2.12) удовлетворяет начальным условиям:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u'_y \Big|_{y=0} = \psi(x), \quad (2.13)$$

при $a \leq x \leq b$, и граничным условиям:

$$\begin{cases} \left[\tau_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_2(y) u \right]_{x=a} = \omega_1(y), \\ \left[\delta_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y) u \right]_{x=b} = \omega_2(y). \end{cases} \quad (2.14)$$

Предположим, что смешанная задача (2.12)–(2.14) имеет единственное решение в области $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ – контур области Ω), непрерывное вместе с четвертыми производными по x и y в области $\bar{\Omega}$.

Выберем в области Ω прямоугольную и равномерную сетку

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad h = \frac{b-a}{M}, \quad y_n = nl, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad l > 0$$

и на этой сетке рассмотрим пятиточечный явный шаблон:

$$\Omega_h = \Omega_h^0 + \partial\Omega_h, \quad \Omega_h^0 = \{(x_m, y_n), \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1}\},$$

$$\partial\Omega_h = \{(x_m, y_n), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0; \quad m = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N\}.$$

На выбранном шаблоне уравнение (2.12) и начальные условия (2.13) аппроксимируются разностной схемой (2.8). Для замены граничных условий на прямых $x = a$ и $x = b$ воспользуемся формулами:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(m,n)} = \frac{u(x_{m+1}, y_n) - u(x_m, y_n)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(x_m^{(1)}, y_n)},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(m,n)} = \frac{u(x_m, y_n) - u(x_{m-1}, y_n)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_m^{(2)}, y_n)}.$$

Таким образом, соответствующие разностные граничные условия будут аппроксимировать (2.14) с порядком $O(h)$.

Окончательно разностная схема, аппроксимирующая граничную задачу (2.12)–(2.14) с погрешностью порядка $O(h + l^2)$, имеет вид

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (2.15)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2}, \quad m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ u_m^0, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{l}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \tau_{1n} \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \tau_{2n} u_0^n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \delta_{1n} \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} + \delta_{2n} u_M^n, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{array} \right. ,$$

$$f^{(h)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} f(x_m, y_n), \quad m = 1, 2, \dots, M-1; n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \phi(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ \omega_{1n}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \omega_{2n}, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{array} \right. .$$

Если $\tau_1(y) = \delta_1(y) = 0$ и $\tau_2(y) = \delta_2(y) = 1$, то разностная схема (2.15) аппроксимирует граничную задачу (2.12)–(2.14) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$.

Численная реализация разностной схемы (2.15) осуществляется следующим образом. Вначале, используя формулы на нулевом и первом слое

$$u_m^0 = \phi(x_m),$$

$$u_m^1 = \phi(x_m) + l \left[\psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(\phi(x_m)) - \frac{l}{2} f(x_m, 0) \right], \quad m = 0, \pm 1, \dots, M,$$

вычисляем значения на нулевом и первом слоях u_m^0 и u_m^1 . Затем по уравнению

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + l^2 \Lambda_{xx}(u_m^n) - u_m^{n-1} - l^2 f(x_m, y_n)$$

при $n=1$ определяются значения $u_1^2, u_2^2, \dots, u_{M-1}^2$. Для вычисления значений u_0^2 и u_M^2 используются разностные граничные условия при $n=2$ вида

$$u_0^2 = \frac{\tau_{12}}{\tau_{12} - h\tau_{22}} u_1^2 - \frac{h\omega_{12}}{\tau_{12} - h\tau_{22}}, \quad u_M^2 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{12} + h\delta_{22}} u_{M-1}^2 - \frac{h\omega_{22}}{\delta_{12} + h\delta_{22}},$$

причем $\tau_{12} - h\tau_{22} \neq 0$ и $\delta_{12} + h\delta_{22} \neq 0$.

Аналогично, по значениям u_m^1, u_m^2 ($m=0, 1, \dots, M$), вычисляются значения u_m^3 и т. д.

2.2.2 Метод прямых для уравнения колебания струны

Рассмотрим метод прямых приближенного решения простейшего уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (2.16)$$

в области $0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \phi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \phi_2(x), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Проведем систему параллельных прямых

$$x = x_k = kh \quad \left(k = 0, 1, \dots, n+1; h = \frac{l}{n+1} \right)$$

и обозначим через $u_k(x)$ значения точного решения $u(x, t)$ задачи (2.16)–(2.17) на прямой $x = x_k$, т. е. $u_k(x) = u(x_k, t)$.

Если $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=x_k}$ заменить разностным отношением

$$\frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t))}{h^2},$$

то получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$\begin{cases} U_k''(t) - \frac{U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)}{h^2} = f_k(t), & k = 1, 2, \dots, n \\ U_0(t) = \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} U_k(0) = \phi_1(x_k) = \phi_{1,k}, \\ U_k'(0) = \phi_2(x_k) = \phi_{2,k} \end{cases}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.19)$$

аппроксимирующую уравнение (2.16) с точностью до h^2 .

Чтобы получить систему уравнений метода прямых, более точно аппроксимирующую уравнение (2.16), воспользуемся равенством, аналогичным равенству (1.40):

$$\begin{aligned} u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t) &= \\ &= \frac{5h^2}{6} \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2} \right] + O(h^6). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из дифференциального уравнения (2.16) получим

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2} - f(x_k, t) = u_k''(t) - f_k(t).$$

Тогда соотношение (2.20) после подстановки значений вместо производных $\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2}$ дает

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} u_k''(t) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(t) + u_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] &= \\ = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)] + O(h^4) \end{aligned}$$

Отбрасывая член $O(h^4)$ и заменяя при этом $u_k(t)$ на $U_k(t)$, получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$\begin{cases} \frac{5}{6} U_k''(t) + \frac{1}{12} [U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = \\ = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)], & (k = 1, 2, \dots, n) \\ U_0(t) = \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

с начальными условиями

$$U_k(0) = \phi_1(x_k) = \phi_{1,k}, \quad U_k'(0) = \phi_2(x_k) = \phi_{2,k}. \quad (2.22)$$

Эта система уже дает аппроксимацию порядка h^4 .

Отметим, что общее решение однородных систем, соответствующих системам дифференциальных уравнений метода прямых (2.18) и (2.21), несложно построить.

Построим для примера общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{5}{6}U_k''(t) + \frac{1}{12}[U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = 0, \\ U_0(t) = U_{n+1}(t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases}, \quad (2.23)$$

соответствующей системе (2.21). Частные решения этой системы будем искать в виде

$$U_k(t) = \gamma(k)v(t).$$

Подставляя эти значения в систему (2.23), получим

$$\begin{aligned} v''(t) \left[\frac{5}{6}\gamma(k) + \frac{1}{12}\gamma(k+1) + \frac{1}{12}\gamma(k-1) \right] - \frac{v(t)}{h^2} [\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)] &= 0, \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{h^2 \left[\frac{5}{6}\gamma(k) + \frac{1}{12}\gamma(k+1) + \frac{1}{12}\gamma(k-1) \right]} = -\delta^2 = \text{const.} \quad (2.24)$$

Для отыскания $\gamma(k)$ получаем разностное уравнение

$$\left[1 + \frac{1}{12}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k+1) - \left[2 - \frac{5}{6}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k) + \left[1 + \frac{1}{12}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k-1) = 0 \quad (2.25)$$

с граничными условиями

$$\gamma(0) = \gamma(n+1) = 0. \quad (2.26)$$

Его общее решение имеет вид

$$\gamma(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k,$$

где λ_1 и λ_2 – корни уравнения

$$\lambda^2 - \frac{2[12 - 5\delta^2 h^2]}{12 + \delta^2 h^2} \lambda + 1 = 0.$$

Из граничных условий имеем

$$\gamma(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad C_2 = -C_1,$$

$$\gamma(n+1) = C_1 \lambda_1^{n+1} + C_2 \lambda_2^{n+1} = C_1 (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = {}^{n+1}\sqrt{1} = e^{\frac{2\pi is}{n+1}}, \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

или, так как $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, то

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = e^{\frac{\pi is}{n+1}}.$$

Далее, согласно теореме Виета

$$\frac{2[12 - 5\delta^2 h^2]}{12 + \delta^2 h^2} = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos \frac{\pi s}{n+1},$$

откуда

$$\delta_s^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{ns}{2(n+1)}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{ns}{2(n+1)} \right]} = \frac{24 \sin^2 \frac{n(y_s - y_0)}{2l}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{n(y_s - y_0)}{2l} \right]} \quad (2.27)$$

$(s = 0, 1, 2, \dots, n),$

а

$$\gamma_s(k) = C_1 (e^{\frac{\pi isk}{n+1}} - e^{-\frac{\pi isk}{n+1}}) = C \sin \frac{\pi isk}{n+1} = C \sin \frac{\pi sx_k}{l} \quad (2.28)$$

(при $s = 0$ получаем тривиальное решение $\gamma_0(k) \equiv 0$).

Из уравнения (2.24) имеем

$$v''(t) + \delta_s^2 v(t) = 0, \quad \text{или} \quad v_s(t) = A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t.$$

Таким образом,

$$U_{k,s} = \sin \frac{\pi sx_k}{l} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t).$$

Общее решение однородной системы (2.23) имеет вид:

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi sx_k}{l} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t), \quad (2.29)$$

где A_s, B_s – произвольные постоянные.

Найдя методом вариации постоянных частное решение неоднородной системы (2.21), получим общее решение ее как сумму частного решения и построенного общего решения (2.29) однородной системы. Постоянные A_s и B_s ($s = 1, 2, \dots, n$) находятся из условий (2.22).

Без вывода приведем общее решение однородной системы, соответствующей системе (2.18)

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi s x_k}{l} (C_s \cos \delta'_s t + D_s \sin \delta'_s t), \quad \delta'_s = \frac{4 \sin^2 \frac{\pi x_s}{2l}}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Сходимость решений, полученных методом прямых, к обобщенному решению задачи (2.16)–(2.17) имеет место в любом прямоугольнике $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, если начальные и граничные условия нулевые, а функция $f(x, t)$ ограничена некоторой положительной константой. Общий случай начальных и граничных условий сводится к этому случаю при выполнении некоторых требований на гладкость функций $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ и условий сопряжения.

Вопросы для самоконтроля

- 1 Какие задачи ставятся для уравнений гиперболического типа?
- 2 Какой шаблон используется для решения задачи Коши?
- 3 Как строится разностная схема для задачи Коши?
- 4 Какая погрешность аппроксимации разностной схемы для задачи Коши?
- 5 Что такое «треугольник определенности»?
- 6 Как определяется смешанная задача?
- 7 Как строится разностная схема для смешанной задачи?
- 8 Как строится аппроксимация граничных условий при решении смешанной задачи?
- 9 Какая погрешность аппроксимации разностной схемы для смешанной задачи?
- 10 В чем смысл метода прямых для уравнения колебания струны?
- 11 В чем состоят условия сходимости разностной задачи для уравнения гиперболического типа?

Задания для уравнения гиперболического типа

Задание 2.1. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям, согласно таблице 2.1,

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi(x),$$

$$u(0, t) = \phi(t), \quad u(1, t) = \psi(t),$$

для значений $0 \leq t \leq 0,5$, $0 \leq x \leq 1$, взяв по аргументу x шаг $h = 0,1$.

Таблица 2.1 – Правые части в постановке задачи

Вариант	$f(x)$	$\Phi(x)$	$\phi(t)$	$\psi(t)$	a	n
1	$(ax^2 + 3, 1) \sin \pi x$	0	0	0	$1,1 + 0,1n$	0
2						1
3						2
4						3
5						4
6	Из таблицы 2.2	0	0	0	$0,95 + 0,025n$	0
7						1
8						2
9						3
10						4
11	Из таблицы 2.3	0	0	0	$1,1 + 0,1n$	0
12						1
13						2
14						3
15						4
16			5			
17			6			
18			7			
19			1			
20			2			
21			3			

Таблица 2.2 – Значение $f(x)$

x	$f(x)$
0	0
0,1	0,0145
0,2	0,0511
0,3	$0,0921 a$
0,4	0,1114
0,5	$0,1825/a$
0,6	$0,1825/a$
0,7	$0,1481 a$
0,8	0,1028
0,9	0,0502
1,0	0

Таблица 2.3 – Значение $f(x)$ и $\Phi(x)$

x	$f(x)$	$\Phi(x)$
0	0	0
0,1	0,1101	0,0420
0,2	$0,1345 a$	0,05
0,3	0,1498	0,051
0,4	0,1531	0,044
0,5	$0,1998 a$	0,038
0,6	0,1402	0,022
0,7	0,1722	0,021
0,8	$0,1438 a$	0,02
0,9	0,1241	0,019
1,0	0,12	0

Задание 2.2. Найти решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа, согласно таблице 2.4, на сетке (x_m, t_n) , где $x_m = 0,1m$, $t_n = 0,1n$, $m, n = 0,1,\dots,10$ с граничными условиями из таблицы 2.5.

Таблица 2.4 – Дифференциальные уравнения

Вариант	Уравнение	Параметры сетки
1–10	$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2(\alpha^2 - 1)}{(x + \alpha t + 1)^3}$	$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$
11–20	$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{[\alpha(x+t) + 2]^2}$	$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$

Таблица 2.5 – Граничные условия

Вариант	$u(0, t)$	$u(1, t)$	$u(x, 0)$	$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$	α	k
1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{1}{\alpha t + 1}$	$\frac{1}{\alpha t + 2}$	$\frac{1}{1 + x}$	$\frac{-\alpha}{(1 + x)^2}$	$0,5 + 0,1k$	0
2						1
3						2
4						3
5						4
6						5
7						6
8						7
9						8
10						9

Продолжение таблицы 2.5

1	2	3	4	5	6	7
11	0	$\frac{1}{\alpha(t + 1) + 2}$	$\frac{x}{\alpha x + 2}$	$\frac{-\alpha x}{(\alpha x + 2)^2}$	$0,2k$	1
12						2
13						3
14						4
15						5
16						6
17						7
18						8
19						9
20						10
21						11

Примеры и способы решения поставленных краевых задач можно также найти в [7, 10, 12].

Применим метод сеток для уравнения гиперболического типа.

Пример. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = (1, 2x^2 + 2, 5) \sin \pi x$, $u_t(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, для значений $0 \leq t \leq 0,5$, $0 \leq x \leq 1$, взяв по аргументу x шаг $h = 0,1$.

Решение. Графическая интерпретация постановки задачи, краевых и начальных условий, и шаблон аппроксимации изображены на рисунке 2.4.

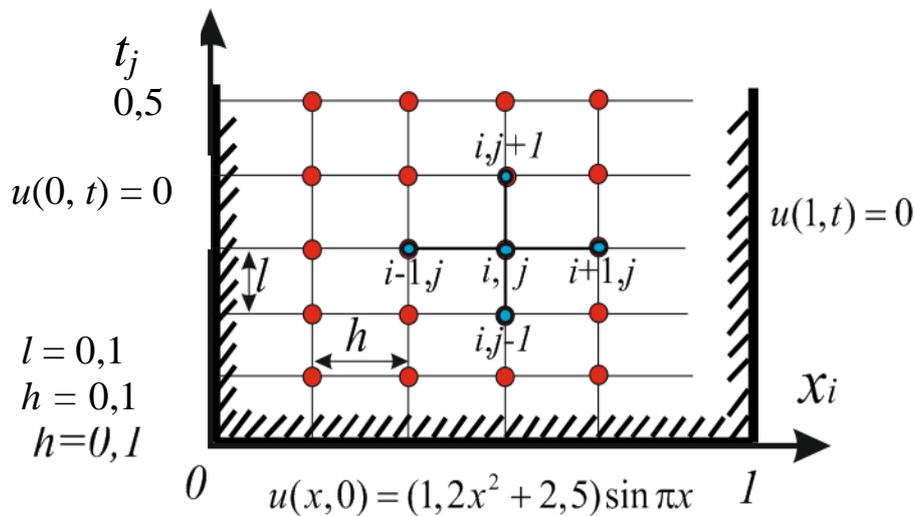


Рисунок 2.4 – Схема и шаблон расчетной области

Для решения поставленной задачи используется разностная схема (2.6):

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)},$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} \\ u_m^0 \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{l} \end{cases}, \quad f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n) \\ \phi(x_m) \\ \psi(x_m) \end{cases},$$

причем $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$.

В примере граничные и начальные условия записываются в виде:
 $u_{0,j} = 0, \quad u_{10,j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 5, \quad u_{i,0} = (1, 2x_i^2 + 2, 5) \sin \pi x_i$ и $u_{i,1} = u_{i,0}$, так
 как, $\Phi(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Учитывая, что $l = h$, то расчетная схема по определению внутренних значений функции упрощается и имеет вид:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}, \quad i = 2, \dots, 9; \quad j = 2, \dots, 4.$$

Таким образом, для нахождения функции на $j + 1$ слое необходимо знать ее значение на двух предыдущих.

Численные расчеты представляются в виде таблицы значений (рисунок 2.5).

t \ x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.0000	0.7763	1.4977	2.1099	2.5602	2.8000	2.7885	2.4982	1.9209	1.0729	0.0000
0.1	0.0000	0.7763	1.4977	2.1099	2.5602	2.8000	2.7885	2.4982	1.9209	1.0729	0.0000
0.2	0.0000	0.7214	1.3885	1.9480	2.3497	2.5487	2.5097	2.2111	1.6503	0.8480	0.0000
0.3	0.0000	0.6122	1.1718	1.6282	1.9365	2.0594	1.9714	1.6618	1.1382	0.5774	0.0000
0.4	0.0000	0.4503	0.8520	1.1603	1.3380	1.3591	1.2114	0.8985	0.5889	0.2903	0.0000
0.5	0.0000	0.2398	0.4388	0.5617	0.5829	0.4900	0.2862	0.1385	0.0505	0.0115	0.0000

Рисунок 2.5 – Численные результаты решения задачи

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Березин, И. С. Методы вычислений : в 2 т. Т.1 / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М. : Наука, 1966. – 630 с.
- 2 Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
- 3 Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 271 с.
- 4 Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973. – 632 с.
- 5 Крылов, В. И. Вычислительные методы : в 2 т. Т.1 / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М. : Наука, 1976. – 304 с.
- 6 Крылов, В. И. Вычислительные методы : в 2 т. Т.2 / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
- 7 Сборник задач по методам вычислений / под ред. П. И. Монастырного. – Минск : БГУ, 1983. – 287 с.
- 8 Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
- 9 Воробьева, Г. Н. Практикум по вычислительной математике / Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. – М. : Высш. школа, 1990. – 208 с.
- 10 Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М. : Высш. школа, 2000. – 230 с.
- 11 Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; под общ. ред. Н. И. Тихонова. – 2-е изд. – М. : Физмалит: Лаб. базовых данных; СПб. : Нев. диалект, 2002. – 630 с.
- 12 Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1986. – 364 с.

Производственно-практическое издание

Березовская Елена Михайловна,
Жадан Михаил Иванович

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ:
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 14.01.2021. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 10.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.