

УДК 517.977

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВОМ ПРОЦЕССОМ В СТЕРЖНЕ

Д.С. Кузьменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

PARALLELIZATION OF THE CALCULATIONS AT THE SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF A THERMAL PROCESS IN THE ROD

D.S. Kuzmenkov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В статье рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на правом конце, которая сводится к задаче оптимального управления специальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Последняя решается методом квазидекомпозиции. Описывается алгоритм работы оптимального регулятора, формирующего в режиме реального времени текущие значения оптимальной обратной связи. Приводится численный пример, иллюстрирующий работу метода квазидекомпозиции.

Ключевые слова: тепловой процесс, задача оптимального управления, метод квазидекомпозиции, оптимальная обратная связь, оптимальный регулятор.

The optimal control problem of a thermal process in the rod with the heat exchange on one of its ends is considered in the article. It's reduced to the optimal control problem of the special large-scale differential equations system. This problem is solved by a method of quasidecomposition. The algorithm of the operation of the optimal regulator which forms current values of the optimal feedback in real time is described. The numerical example illustrating the use of the quasidecomposition method is brought.

Keywords: thermal process, optimal control problem, method of quasidecomposition, optimal feedback, optimal regulator.

Введение

Задачи оптимального управления системами, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, довольно часто встречаются на практике [1]–[4], изучаются и в настоящее время. В статье предлагается метод приближенного решения одной из таких задач (задачи оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на правом конце) путем сведения к задаче оптимального управления большой динамической системой, поведение которой описывается большим числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Синтезировать оптимальные обратные связи для таких систем очень сложно, несмотря на применение принципа максимума и динамического программирования. Поэтому в работе для оптимального управления большой динамической системой применяется принцип управления в реальном времени [5], согласно которому оптимальная обратная связь не строится, а ее текущие значения вычисляются по ходу процесса управления в режиме реального времени.

С возрастанием размерности динамических систем увеличивается трудоемкость операций, следовательно, необходимо использовать вычислительные устройства большей мощности. Но

всегда найдется такая размерность системы, при которой имеющиеся в наличии вычислительные устройства не справятся с необходимыми вычислениями в режиме реального времени. Цель работы – описать метод квазидекомпозиции, позволяющий распараллеливать вычисления, что играет важную роль при оптимальном управлении тепловым процессом в стержне. Эффективность предложенного метода подтверждается вычислительными экспериментами (один из которых приведен в разделе 4).

1 Постановка задачи

Пусть $t_*, t^* > t_*, l > 0, a^2, \mu > 0, u^* > 0$ – заданные константы; $\Omega = S \times T, S = [0, l], T = [t_*, t^*]; T_h = \{t_*, t_* + h_t, \dots, t^* - h_t\}, h_t = (t^* - t_*)/N, I = \{1, 2, \dots, m\}, m, N$ – натуральные числа; $c(t) > 0, t \in T, x_0(s), y(s) \in R, \varphi(s) \in R^m, s \in S, -$ непрерывные функции; $g_*, g^* \in R^m$ – заданные векторы.

Определение 1.1. Функцию $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$ назовем *дискретной* (с периодом квантования h_t), если $u(t) \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h_t], \tau \in T_h$.

В классе дискретных управляющих воздействий рассмотрим задачу оптимального управления тепловым процессом в стержне:

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_{t_*}^{t^*} c(t)|u(t)|dt \rightarrow \min, \\
 x_t &= a^2 x_{ss}, \quad (s, t) \in \Omega; \\
 x_s(0, t) &= 0, \quad x_s(l, t) = \mu[u(t) - x(l, t)], \quad t \in T; \\
 x(s, t_*) &= x_0(s), \quad s \in S; \\
 g_* &\leq \int_0^l [x(s, t^*) - y(s)]\varphi(s)ds \leq g^*; \quad (1.1) \\
 u(t) \in U &= \{u \in R : |u(t)| \leq u^*\}, \quad t \in T,
 \end{aligned}$$

где $x = x(s, t) \in R$ – температура в точке $s \in S$ в момент времени $t \in T$, $u = u(t) \in R$ – температура внешней среды в момент времени $t \in T$.

Аппроксимируя уравнение объекта управления методом прямых [6], заменим задачу (1.1) на следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_{t_*}^{t^*} c(t)|u(t)|dt \rightarrow \min, \quad (1.2) \\
 \left\{ \begin{aligned}
 x_i(s_1, t) &= \bar{a}^2 [x(s_2, t) - x(s_1, t)], \\
 x_i(s_i, t) &= \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], \\
 & \quad i = \overline{2, n-1}; \\
 x_i(s_n, t) &= \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \mu)x(s_n, t)] + \\
 & \quad + h_s \bar{a}^2 \mu u(t); \\
 x(s_i, t_*) &= x_0(s_i), \quad i = \overline{1, n};
 \end{aligned} \right. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

$$g_* \leq \sum_{i=1}^n [x(s_i, t^*) - y(s_i)]\phi(s_i) \leq g^*; \quad (1.4)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (1.5)$$

где $h_s = l / (n-1)$, n – натуральное число;

$$\begin{aligned}
 \bar{a}^2 &= a^2 / h_s^2; \quad s_i = ih_s, \quad \phi(s_i) \in R^m, \quad i = \overline{1, n}; \\
 \phi(s_i) &= h_s \varphi(s_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad \phi(s_1) = h_s \varphi(s_1) / 2, \\
 \phi(s_n) &= h_s \varphi(s_n) / 2.
 \end{aligned}$$

Пусть $(f_{1j} \ f_{2j} \ \dots \ f_{nj})$, $j = \overline{1, n}$, – столбцы фундаментальной матрицы системы (1.3). Они удовлетворяют системе из n обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{f}_{1j} &= \bar{a}^2 (f_{2j} - f_{1j}), \\
 \dot{f}_{ij} &= \bar{a}^2 (f_{i-1j} - 2f_{ij} + f_{i+1j}), \quad i = \overline{2, n-1}; \\
 \dot{f}_{nj} &= \bar{a}^2 (f_{n-1j} - (1 + h_s \mu)f_{nj}), \\
 f_{ij}(t_*) &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 f_{nj}(t_*) &= 1, \quad j = \overline{1, n},
 \end{aligned}$$

где $f_{ij} = f(s_i, t; s_j, \theta)$, $t, \theta \in T_h$, $i, j = \overline{1, n}$.

Используя формулу Коши, показывается, что задача (1.2)–(1.5) эквивалентна интервальной задаче линейного программирования:

$$J(u) = \sum_{t \in T_h} c_h(t)|u(t)| \rightarrow \min,$$

$$\tilde{g}_* \leq \sum_{t \in T_h} d_h(t)u(t) \leq \tilde{g}^*, \quad u(t) \in U, \quad t \in T_h, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned}
 c_h(t) &= \int_t^{t+h_t} c(\tau)d\tau, \\
 \tilde{g}_{*k} &= g_{*k} - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*)x_0(s_j) - y(s_i) \right) \phi_k(s_i), \\
 \tilde{g}_k^* &= g_k^* - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*)x_0(s_j) - y(s_i) \right) \phi_k(s_i), \\
 d_{hk}(t) &= \sum_{i=1}^n f_h(s_i, t^*; s_n, t)\phi_k(s_i), \quad (1.7) \\
 t \in T_h, \quad k &= \overline{1, m}, \\
 f_h(s_i, t; s_n, \tau) &= h_s \bar{a}^2 \mu \int_{\tau}^{\tau+h_t} f(s_i, t; s_n, \xi)d\xi.
 \end{aligned}$$

2 Квазидекомпозиция фундаментальной матрицы решений

Для построения решения задачи (1.6) (соответственно и решения задачи (1.2)–(1.5)) используются прямой и двойственный методы [7], основанные на соответствующих методах ЛП [8] и процедуре квазидекомпозиции $\tilde{F}(t)$, $t \in T$, фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \in T$, решений системы (1.3). Квазидекомпозиция учитывает структуру специальной системы дифференциальных уравнений (1.3) и позволяет быстро находить значения функции $d_h(t)$, $t \in T$, что играет важную роль при оптимальном управлении в реальном времени.

Из (1.7) следует, что для нахождения $d_h(t)$, $t \in T$, нужен только последний столбец фундаментальной матрицы

$$f(t) = (f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)), \quad t \in T,$$

элементы которого удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
 \dot{f}_1 &= \bar{a}^2 (f_2 - f_1), \\
 \dot{f}_i &= \bar{a}^2 (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}), \quad i = \overline{2, n-1}; \quad (2.1) \\
 \dot{f}_n &= \bar{a}^2 (f_{n-1} - (1 + h_s \mu)f_n), \\
 f_i(t_*) &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 f_n(t_*) &= 1.
 \end{aligned}$$

Запишем функцию $f(t)$, $t \in T$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (\alpha_0(t) \in R, f^1(t) \in R^m, \alpha_1(t) \in R, \\
 f^2(t) \in R^m, \dots, \alpha_{r-1}(t) \in R, f^r(t) \in R^m, \alpha_r(t) \in R), \\
 & \quad t \in T,
 \end{aligned}$$

где $f^q(t) = (f_i^q(t), i = \overline{1, m}) = (f_{p+i}(t), i = \overline{1, m})$, $q = \overline{1, r}$; $\alpha_q(t) = f_{q(m+1)+1}(t)$, $q = \overline{0, r}$; $t \in T$; m – натуральное число, $p = (q-1)(m+1) + 1$,

$r = (n-1)/(m+1)$. Из структуры матрицы коэффициентов уравнений (2.1) следует, что, зная значения функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T$, интегрирование системы порядка n можно заменить на параллельное интегрирование r систем порядка m :

$$\begin{aligned} \dot{f}_1^q &= \bar{a}^2(\alpha_{q-1}(t) - 2f_1^q + f_2^q), \\ \dot{f}_i^q &= \bar{a}^2(f_{i-1}^q - 2f_i^q + f_{i+1}^q), \quad i = \overline{2, m-1}; \\ \dot{f}_m^q &= \bar{a}^2(f_{m-1}^q - 2f_m^q + \alpha_q(t)), \\ f_i^q(t_*) &= f_{p+i}(t_*), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in T, \quad q = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аппроксимируем функции

$$\alpha_q(t), \quad q = \overline{0, r}, \quad t \in T,$$

конечно-параметрическими функциями

$$\tilde{\alpha}_q(t), \quad q = \overline{0, r}, \quad t \in T.$$

Через $\tilde{f}_i^q(t)$, $i = \overline{1, m}$; $q = \overline{1, r}$; $t \in T$, обозначим решения систем (2.2), в которых функции

$$\alpha_q(t), \quad q = \overline{0, r}; \quad t \in T,$$

заменены на функции

$$\tilde{\alpha}_q(t), \quad q = \overline{0, r}; \quad t \in T.$$

Определение 2.1. Функцию

$$\tilde{f}(t) = (\tilde{\alpha}_0(t), \tilde{f}^1(t), \tilde{\alpha}_1(t), \tilde{f}^2(t), \dots, \tilde{\alpha}_{r-1}(t), \tilde{f}^r(t), \tilde{\alpha}_r(t)), \quad t \in T,$$

назовем квазидекпозицией функции $f(t)$, $t \in T$.

Определение 2.2. Матрицу $\tilde{F}(t)$, получающуюся из $F(t)$ заменой столбца $f(t)$ на столбец $\tilde{f}(t)$, назовем квазидекпозицией фундаментальной матрицы в момент времени $t \in T$.

Утверждение 2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такие аппроксимации функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$; $t \in T$, что выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} |\alpha_q(t) - \tilde{\alpha}_q(t)| &\leq \varepsilon, \quad q = \overline{0, r}; \\ |f_i^q(t) - \tilde{f}_i^q(t)| &\leq \varepsilon, \quad q = \overline{1, r}; \quad i = \overline{1, m}; \quad t \in T. \end{aligned}$$

В прямом и двойственном методах вместо фундаментальной матрицы будем использовать ее квазидекпозицию, позволяющую получить необходимую точность вычисления решения.

Описанный выше алгоритм можно применять для квазидекпозиции всей фундаментальной матрицы, а не только ее последнего столбца, тогда все функции

$$f_{q(m+1)+1, j}, \quad q = \overline{0, r}, \quad j = \overline{1, n},$$

будут аппроксимироваться конечно-параметрическими функциями.

3 Алгоритм работы оптимального регулятора

Определения программы, траектории, оптимальной программы

$$u^0(t), \quad t \in T,$$

оптимальной траектории $x^0(t)$, $t \in T$, вводятся традиционно [7].

Замкнем физическую систему оптимальной обратной связью и запишем поведение замкнутой системы в точках s_i , $i = \overline{1, n}$:

$$\left\{ \begin{aligned} x_i(s_1, t) &= \bar{a}^2 [x(s_2, t) - x(s_1, t)] + w, \\ x_i(s_i, t) &= \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)] + w, \\ & \quad i = \overline{2, n-1}, \\ x_i(s_n, t) &= \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1+h_s \mu)x(s_n, t)] + \\ & \quad + h_s \bar{a}^2 \mu u^0(t, x(t)) + w, \\ x(s_i, t_*) &= x_0(s_i), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (3.1)$$

где $u^0(t, x(t)) = u^0(\tau, x(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + h_s]$, $\tau \in T_h$;

w – совокупность членов, отражающих неточность реализации оптимальной обратной связи, неточности математического моделирования и возмущение, действующее на физический объект в процессе управления (для краткости в дальнейшем w будем называть возмущением).

Рассмотрим конкретный процесс управления с реализовавшимися возмущениями $w^*(t)$, $t \in T$.

Они порождают траекторию $x^*(s_i, t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in T$. В конкретном процессе управления оптимальная обратная связь не используется полностью [5], [7], нужны лишь ее значения

$$u^*(t) \equiv u^0(t, x^*(t, \cdot)) = u^0(\tau, x^*(\tau, \cdot)), \quad (3.2)$$

$$t \in [\tau, \tau + h_s], \quad \tau \in T_h,$$

вдоль одной траектории $x^*(s_i, t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in T$.

Определение 3.1. Функцию (3.2) назовем реализацией оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления.

Опишем метод оптимального управления в реальном времени, в котором оптимальная обратная связь не строится, а текущие значения $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, ее реализации вычисляются в процессе управления в режиме реального времени, т. е. за время, не превосходящее h_s . Устройство, выполняющее эту работу, назовем *оптимальным регулятором*.

Оптимальный регулятор работает следующим образом. Перед началом процесса управления регулятор решает задачу (1.2)–(1.5) для начальной позиции $(t_*, x_0(\cdot))$ и на промежутке $[t_*, t_* + h_s]$ подает на вход физического объекта управляющее воздействие

$$\begin{aligned} u^*(t) &\equiv u^*(t_*) = u^0(t_* | t_*, x_0(\cdot)), \\ t &\in [t_*, t_* + h_s + \mathcal{G}(t_* + h_s)], \end{aligned}$$

где $\mathcal{G}(\theta)$, $\theta \in T_h$, – время, затрачиваемое на вычисление значения $u^*(\theta)$ реализации оптимальной обратной связи (3.2). Допустим, что процесс управления проведен на промежутке $[t_*, \theta]$. Тогда под

действием выработанного управляющего воздействия

$$u^*(t) \equiv u^*(\theta - h_t) = u^0(\theta - h_t | \theta - h_t, x^*(\theta - h_t, \cdot)),$$

$$t \in [\theta - h_t + \mathcal{G}(\theta - h_t), \theta + \mathcal{G}(\theta)],$$

и возмущения $w^*(t)$, $t \in [t_*, \theta[$ физический объект переходит в состояние $x^*(\theta, \cdot)$, которое становится известным оптимальному регулятору. Для текущей позиции $(\theta, x^*(\theta, \cdot))$ оптимальный регулятор двойственным методом [8] находит оптимальную опору, используя в качестве начальной оптимальную опору, полученную для предыдущей позиции. На промежутке $[\theta, \theta + h_t[$ оптимальный регулятор подает на вход физического объекта управляющее воздействие

$$u^*(t) \equiv u^*(\theta) = u^0(\theta | \theta, x^*(\theta, \cdot)),$$

$$t \in [\theta + \mathcal{G}(\theta), \theta + h_t + \mathcal{G}(\theta + h_t)].$$

4 Численный пример

Рассмотрим задачу управления тепловым процессом в стержне:

$$J(u) = \int_0^{10} |u(t)| dt \rightarrow \min,$$

$$x_t = 0.125x_{ss}, (s, t) \in \Omega;$$

$$x_s(0, t) = 0, x_s(1, t) = 0.1[u(t) - x(1, t)], t \in T;$$

$$x(s, 0) = 18, s \in S;$$

$$g_{*k} \leq \int_0^1 [x(s, 10) - 20] \varphi_k(s) ds \leq g_k^*, k = \overline{1, 3}; \quad (4.1)$$

$$|u(t)| \leq 50, t \in T,$$

где $\Omega = S \times T$, $S = [0, 1]$, $T = [0, 10]$;

$$T_h = \{0, h_t, \dots, 10 - h_t\}, h_t = 10 / 500 = 0.02;$$

$$\varphi_k(s) = \sin\left(\frac{\pi k}{s}\right), g_{*k} = -20\varepsilon \int_0^1 \varphi_k(s) ds,$$

$$g_k^* = 20\varepsilon \int_0^1 \varphi_k(s) ds, k = \overline{1, 3}, \varepsilon = 10^{-6}.$$

Задача (4.1) является частным случаем задачи (1.1) со следующими параметрами: $t_* = 0$, $t^* = 10$, $l = 1$, $a^2 = 0.125$, $\mu = 0.1$, $u^* = 50$, $m = 3$; $c(t) = 1$, $t \in T$, $x_0(s) = 18$, $y(s) = 20$, $\varphi(s) \in R^3$, $s \in S$; $g_*, g^* \in R^3$.

Аппроксимируя уравнение объекта управления методом прямых [6], заменим задачу (4.1) на следующую задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^{10} |u(t)| dt \rightarrow \min, \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} x_t(s_1, t) = \bar{a}^2 [x(s_2, t) - x(s_1, t)], \\ x_t(s_i, t) = \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], \\ \quad \quad \quad i = \overline{2, n-1}; \\ x_t(s_n, t) = \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1 + 0.1h_s)x(s_n, t)] + \\ \quad \quad \quad + 0.1h_s \bar{a}^2 u(t), \\ x(s_i, t_*) = 18, i = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$g_{*k} \leq \sum_{i=1}^n [x(s_i, 10) - 20] \phi_k(s_i) \leq g_k^*, k = \overline{1, 3}; \quad (4.4)$$

$$|u(t)| \leq 50, t \in T. \quad (4.5)$$

Здесь $n = 11$, $h_s = 0.1$, $s_i = ih_s$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{a}^2 = 0.125/h_s^2$; $\phi(s_i) = h_s \varphi(s_i)$, $i = \overline{2, n-1}$, $\phi(s_1) = h_s \varphi(s_1) / 2$, $\phi(s_n) = h_s \varphi(s_n) / 2$.

Задача (4.2)–(4.5) была решена двойственным методом в классе дискретных управляющих воздействий с периодом квантования $h_t = 0.02$. Для построения квазидекомпозиции последнего столбца фундаментальной матрицы решений системы (4.3) его значения $f_{q(m+1)+1}(t)$, $q = \overline{0, q^*}$, были представлены интерполяционными многочленами Лагранжа $p(t)$, $t \in T$, степени P на интервалах

$$[t_* + (\tau - 1)h_\tau, t_* + \tau h_\tau], \tau = \overline{1, \tau^*},$$

$$h_\tau = (t^* - t_*) / \tau^*.$$

На интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) при $n = 11$ потребовалось 0.097 секунды (расчеты в данном примере проводились на персональном компьютере с процессором Atlon 2600+ с частотой 1,91 ГГц, 1 ГБ ОЗУ в математической среде Matlab), а на интегрирование системы (2.2) – 0.006 секунды ($q^* = 2$, $\tau^* = 5$, $P = 4$).

На рисунке 4.1 изображен график оптимальной программы $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (4.1), а на рисунке 4.2 – график ее оптимальной траектории $x^0(t)$, $t \in T$.

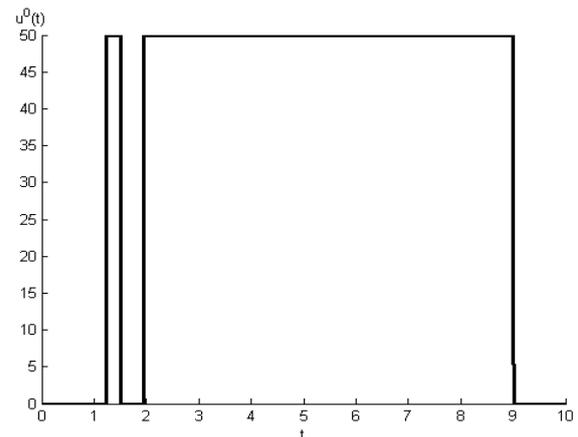


Рисунок 4.1 – Программное решение

На рисунке 4.3 приведены графики оптимального распределения температуры в стержне в терминальный момент $x^0(t^*)$:

1) полученного при подстановке оптимальной программы $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (4.1) в исследуемое уравнение в частных производных из (1.1) (пунктирная линия);

2) полученного при подстановке оптимальной программы $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (4.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3) (сплошная линия).

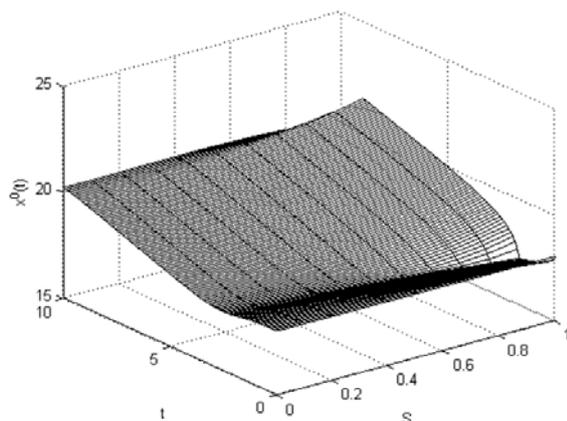


Рисунок 4.2 – Оптимальная траектория

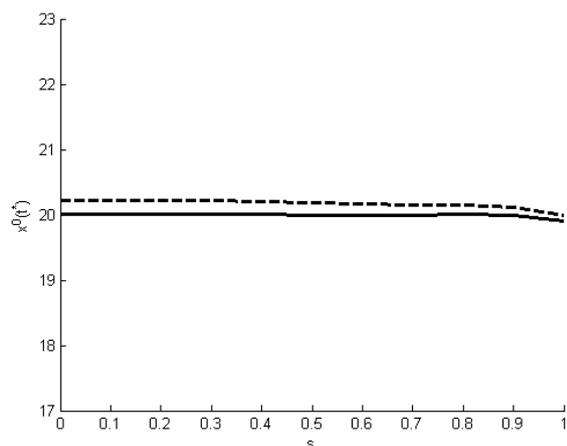


Рисунок 4.3 – Оптимальное распределение температуры $x^0(t^*)$ в стержне

Чтобы оценить эффективность метода квазиразложения, в таблице 4.1 для различных значений параметров аппроксимации P , τ^* приведены результаты программного решения: оптимальное значение критерия качества и отклонения по моментам терминального состояния системы (4.1) от заданного распределения температуры

Таблица 4.1 – Программное решение

τ^*	P	λ_1^0	λ_2^0	λ_3^0	$J(u^0)$
5	4	-0.00038259	-0.00376210	-0.00195284	369.347374
	5	-0.00047094	-0.00376119	-0.00175492	369.545261
10	3	-0.00050690	-0.00378802	-0.00162672	369.757173
	4	-0.00064516	-0.00357485	-0.00242805	370.120398
	5	-0.00053070	-0.00362590	-0.00196052	370.208254
Без квазиразложения		-0.00044701	-0.00365396	-0.00211055	370.252170

$$\lambda_i^0 = \int_0^1 [x^0(s, 10) - 20] \varphi_i(s) ds, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Из таблицы 4.1 следует, что использование квазиразложения при соответствующем выборе параметров τ^* , P позволяет построить приближенное программное решение задачи (4.1), достаточно близкое к «точному» решению; с увеличением значений параметров τ^* , P увеличивается точность получаемых приближенных решений.

Предположим, что на систему (4.1) в процессе управления действовало неизвестное возмущение $w(t)$, $t \in T$. Перед началом процесса управления в классе дискретных управляющих воздействий с периодом квантования $h_t = 0.02$ была построена точная реализация $u^*(t)$, $t \in T$, оптимальной обратной связи задачи (4.1) при реализовавшемся возмущении $w^*(t) = \cos 2t$, $t \in [0, 7[$; $w^*(t) = 0$, $t \in [7, 10]$. На рисунке 4.4 изображен график $u^*(t)$, $t \in T$. Графики, изображенные на рисунках 4.2 и 4.3, для позиционного решения не приводятся, т. к. они мало отличаются от графиков, приведенных для программного решения.

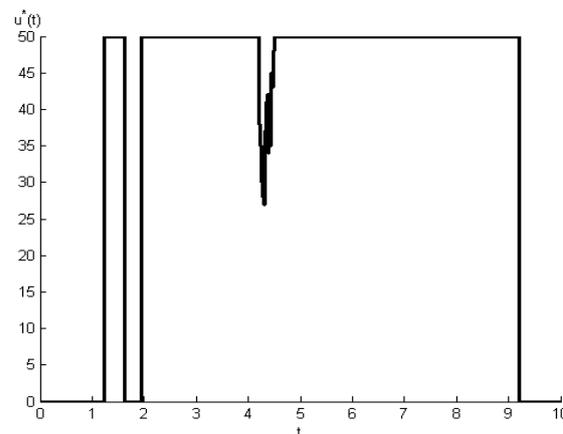


Рисунок 4.4 – Реализация позиционного решения

Следуя описанному в разделе 3 алгоритму, были найдены приближенные реализации оптимальной обратной связи задачи (4.1) с использованием квазиразложения последнего столбца фундаментальной матрицы.

Таблица 4.2 – Позиционное решение

τ^*	P	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	$J(u^*)$
5	4	-0.00025324	-0.00433251	-0.01044327	381.127608
	5	-0.00037432	-0.00431500	-0.00824608	381.501263
10	3	-0.00075123	-0.00429341	-0.00351260	381.851721
	4	-0.00069753	-0.00392253	-0.00394531	382.206530
	5	-0.00062126	-0.00420340	-0.00304326	382.292643
Без квазидекомпозиции		-0.00051131	-0.00412342	-0.00321414	382.313607

Как видно из таблицы 4.2

$$\left(\lambda_i^* = \int_0^1 [x^*(s, 10) - 20] \varphi_i(s) ds, \quad i = \overline{1,3} \right),$$

при увеличении точности аппроксимации фундаментальной матрицы приближенные позиционные решения задачи (4.1) сходятся к «точному» позиционному решению. Следовательно, метод квазидекомпозиции при соответствующем выборе параметров τ^* , P является достаточно эффективным.

Заключение

В статье рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на правом конце, описывается метод квазидекомпозиции, позволяющий быстро вычислять текущие значения оптимальной обратной связи. Предлагается метод решения исследуемой задачи, основанный на процедуре квазидекомпозиции и динамической реализации двойственного метода ЛП [8], приводится численный пример, иллюстрирующий работу предложенных в статье методов. Полученные результаты могут быть обобщены на другие задачи оптимального управления системами параболического типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский, А.Г. Методы оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.

2. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М. : Наука, 1978. – 468 с.

3. Лионс, Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. – М. : Мир, 1972. – 414 с.

4. Bokhari, M.A. Optimal control of parabolic systems with infinite time horizons / M.A. Bokhari, I.S. Sadek, // Appl. Math and Comput. – 2008. – Vol. 206, № 2. – P. 678–684.

5. Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15–18.

6. Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Мн. : Наука и техника, 1986. – 311 с.

7. Габасов, Р. Оптимальное управление тепловым процессом / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Д.С. Кузьменков // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 5–9.

8. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации: В 5 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск : Университетское, 1984–1998. – Ч. 1 : Линейные задачи. – 1984. – 213 с.

Поступила в редакцию 26.02.12.