Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 512.542

О классе конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами

В.И. Мурашко

В работе для заданной формации F исследуется класс vF (v^*F) всех конечных групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа F-субнормальна (соответственно F-достижима). Установлена связь между классами v^*F и vF. Доказано, что если F – насыщенная наследственная формация, то vF (v^*F) – насыщенная наследственная формация. Описаны все насыщенные наследственные формации F, для которых выполняется F = vF.
Ключевые слова: конечная группа, циклическая примарная группа, насыщенная наследственная формация, F-субнормальная подгруппа, F-достижимая подгруппа.

In the paper for a given formation F a class vF (v^*F) of all finite groups whose cyclic primary subgroups are F-subnormal (F-acceptable respectively) is studied. The connections between v^*F and vF were found. It is shown that if F is a hereditary saturated formation then so is vF. All hereditary saturated formations F = vF are described.
Keywords: finite group, cyclic primary subgroup, hereditary saturated formation, F-subnormal subgroup, F-acceptable subgroup.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Одной из центральных концепций теории групп является понятие субнормальной подгруппы. В 1969 году Хоукс [1] обобщил это понятие в классе разрешимых групп, предложив определение F-субнормальной подгруппы для насыщенной формации F. В монографии [2] Л.А. Шеметков распространил понятие F-субнормальности на произвольные группы.

Пусть F – формация. Подгруппа H группы G называется F-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H=H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathrm{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1,\ldots, n$.

Пусть N – формация всех нильпотентных групп. Всякая N-субнормальная подгруппа является субнормальной. Обратное утверждение не верно. Например, единичная подгруппа в знакопеременной группе степени 5 является субнормальной, но не N-субнормальной. В разрешимом случае субнормальность подгруппы эквивалентна ее N-субнормальности.

В работе А.Ф. Васильева [3] было начато изучение строения конечных групп, у которых каждая силовская подгруппа является F-субнормальной, где F – насыщенная формация. Изучение класса всех таких групп, обозначенного через wF, было продолжено в работе [4]. В частности, было установлено, что если F – насыщенная наследственная формация, то и wF – насыщенная наследственная формация.

В 1978 году О. Кегель [5] предложил ещё одно обобщение субнормальности.

Пусть F – формация. Подгруппа H группы G называется F-достижимой (K-F-субнормальной [6], с.236), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что H_{i-1} нормальна в H_i или $H_i^{\mathrm{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1,\ldots, n$.

Понятие F-достижимой подгруппы эквивалентно понятию субнормальной подгруппы в случае, когда F = N.

Исследованию конечных групп, у которых силовские подгруппы F-достижимы, посвящены работы Т.И. Васильевой и А.И. Прокопенко [7]–[8], В.Н. Семенчука и С.Н. Шевчука [9], А.С. Вегеры [10].

Отметим ещё одно обобщение субнормальности, предложенное А.Ф. Васильевым, Т.И. Васильевой и В.Н. Тютяновым [11].

Подгруппа H группы G называется **P**-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1,\ldots, n$.

Известно, что всякая U-субнормальная подгруппа, где U – формация всех сверхразрешимых групп, является **P**-субнормальной. В классе разрешимых групп верно обратное утверждение.

В работе [11] был исследован класс wU всех групп, у которых всякая силовская подгруппа является **P**-субнормальной.

В.Н. Княгина и В.С. Монахов [12] ввели и изучили класс X всех групп, у которых всякая циклическая примарная подгруппа является **P**-субнормальной. Ими было показано, что X является насыщенной наследственной разрешимой формацией и U $\subset$ wU $\subset$ X. Заметим, что класс X совпадает с классом всех групп, у которых всякая циклическая примарная подгруппа является U-субнормальной.

В развитие отмеченных выше исследований введём следующие определение.

Определение 1. *Пусть* F *– формация.*

1. *Определим через* vF *класс групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа, в том числе и единичная подгруппа, является* F*-субнормальной.*

2. *Определим через* v*F *класс групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа* F*-достижима.*

Если F – пустая формация, то vF совпадает с классом единичных групп, а v*F – с классом нильпотентных групп. В дальнейшем все рассматриваемые формации не пусты. Целью данной работы является изучение свойств классов vF и v*F, а также нахождения условий, при которых F = vF**.**

1 Предварительные результаты. В работе используются стандартные определения и обозначения, которые могут быть найдены в [2] и [13]. Напомним некоторые из них.

Символ **P** обозначает множество простых чисел; $\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G; π(F) – множество всех простых делителей порядков групп из F; через π' обозначается дополнение подмножества простых чисел π в **P**; Z_p – циклическая группа порядка p; $F^*(G)$ – квазинильпотентный радикал группы G; через M(H) обозначается класс минимальных не H-групп, то есть групп, не принадлежащих классу H, у которых всякая собственная подгруппа принадлежит H; N – класс нильпотентных групп; G_π (N_π) – класс (нильпотентных) π-групп, где π – подмножество **P**.

Напомним определение обобщённой подгруппы Фиттинга $\tilde{F}(G)$ [2, с.79]:

1) $\Phi(G) \subseteq \tilde{F}(G)$;

2) $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$.

Известно, что $\tilde{F}(G/\Phi(G)) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$.

Гомоморфом называется класс групп F, для которого выполняется: если $G \in$ F, то и $G/N \in$ F для любой нормальной подгруппы N в G.

Гомоморф F называется формацией, если $G/N_i \in$ F для i =1, 2, то $G/(N_1 \cap N_2) \in$ F.

Пусть F и H – формации. Через G^{F} обозначается F-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G факторгруппа по которой принадлежит F. Класс FH = (G| $G^{\mathrm{H}} \in$ F), называемый произведением формаций F и H, является формацией. Формация F называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in$ F следует, что $G \in$ F.

Нам потребуются следующие известные свойства F-субнормальных и F-достижимых подгрупп.

Лемма 1.1 [13]. *Пусть* F, H *– формации, H, K и N – подгруппы группы G, причём N нормальна в G. Тогда*:

1) *если H* F*-субнормальна* (F*-достижима*) *в G, то HN/N* F*-субнормальна* (F*-достижима) в G/N*;

2) *если H/N* F*-субнормальна* (F*-достижима*) *в G/N, то H* F*-субнормальна* (F*-достижима*) *в G*;

3) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в K, а K $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G*;

4) *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то всякая $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа является $\mathfrak{H}$-субнормальной ($\mathfrak{H}$-достижимой)*.

Лемма 1.2 [13]**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, H и K – подгруппы группы G. Тогда*:

1) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в K*;

2) *если H и K $\mathfrak{F}$-субнормальны ($\mathfrak{F}$-достижимы) в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G*;

3) *если все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то всякая субнормальная подгруппа G $\mathfrak{F}$-субнормальна*;

4) *если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G.*

Лемма 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, p – простое число и G – p-группа. Если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то всякая подгруппа из G является $\mathfrak{F}$-субнормальной.*

Доказательство. Следует из 4) леммы 1.2. □

Лемма 1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация такая, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Если единичная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в группе G, то G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Для единичной группы лемма верна. Предположим, что в общем случае лемма не верна, и выберем группу G такую, что существует максимальная цепь подгрупп $1 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1,\ldots, n$, G не принадлежит $\mathfrak{F}$. По предположению индукции $H_{n-1} \in \mathfrak{F}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ нормальна в H_{n-1}, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

2 Свойства классов $v\mathfrak{F}$ и $v^*\mathfrak{F}$. Для получения основных результатов нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и p – простое число, не принадлежащее $\pi(\mathfrak{F})$. Если подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в группе G, то $O_p(H) \subseteq O_p(G)$.*

Доказательство. Если $H = G$, то лемма верна. Предположим, что в общем случае лемма не верна. Пусть группа G является контрпримером наименьшего порядка. Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в группе G, то существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ или H_{i-1} нормальна в H_i для $i = 1,\ldots, n$

По предположению индукции $O_p(H) \le O_p(H_{n-1})$. Рассмотрим 2 случая.

1) Подгруппа H_{n-1} нормальна в G. Тогда $O_p(H_{n-1})$ нормальна в G и $O_p(H_{n-1}) \le O_p(G)$. Значит, $O_p(H) \le O_p(G)$.

2) Пусть $G^{\mathfrak{F}} \le H_{n-1}$. Так как p не принадлежит $\pi(\mathfrak{F})$, то $O_p(H_{n-1}) \le G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \le H_{n-1}$, то $O_p(H)$ субнормальна в $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, она субнормальна в G. Значит, $O_p(H) \subseteq O_p(G)$. Противоречие. □

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Пусть группа $G = AB$, где A – $\mathfrak{F}$-достижимая π-подгруппа, а B – π'-подгруппа группы G. Тогда A нормальна в G.*

Доказательство. Если $A = G$, то лемма верна. Далее считаем, что $A \ne G$. Пусть $A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$ – произвольная цепь подгрупп от A до G. Так как $|A_i : A_{i-1}|$ является π'-числом для $i = 1,\ldots, n$, то A_{i-1} не содержит $A_i^{\mathfrak{F}}$ для любого $i = 1,\ldots, n$. Тогда из $\mathfrak{F}$-достижимости A в G следует субнормальность A в G. Значит, A – субнормальная холлова подгруппа в G. Следовательно, A нормальна в G. □

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $v\mathfrak{F}$ и $v^*\mathfrak{F}$ – гомоморфы.*

Доказательство. Покажем, что $v\mathfrak{F}$ – гомоморф. Пусть группа $G \in v\mathfrak{F}$ и N нормальна в G. Покажем, что $G/N \in v\mathfrak{F}$. Пусть A/N – циклическая примарная p-подгруппа G/N для некоторого простого p. Тогда $A/N = \langle xN \rangle$. Пусть P – силовская p-подгруппа $\langle x \rangle$. Тогда $A = PN$ и P – циклическая примарная подгруппа G. Так как P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то по 1) леммы 1.1 $PN/N = A/N$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N. Значит, $v\mathfrak{F}$ – гомоморф. Аналогично доказывается, что и $v^*\mathfrak{F}$ – гомоморф. □

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация. Тогда* $v\mathfrak{F}$ *и* $v^*\mathfrak{F}$ *являются наследственными гомоморфами.*

Доказательство. Прямо следует из лемм 1.2 и 2.3. □

Лемма 2.5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация и группа* $G \in v^*\mathfrak{F}$. *Если* $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, *то всякий композиционный фактор* G *принадлежит* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Очевидно, что всякий абелевый композиционный фактор G принадлежит $\mathfrak{F}$. Из леммы 2.4 следует, что всякий неабелевый композиционный фактор G принадлежит $v\mathfrak{F}$. Так как всякий неабелевый композиционный фактор изоморфен простой неабелевой группе K, то в K есть собственная циклическая примарная $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа $H \neq 1$. Так как H $\mathfrak{F}$-достижима в K, то H содержится в некоторой собственной подгруппе K, содержащей $K^{\mathfrak{F}}$. Так как $K^{\mathfrak{F}} < K$ и K – простая группа, то $K^{\mathfrak{F}} = 1$ и $K \in \mathfrak{F}$. □

Из предыдущей леммы следует, что в случае, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, верно $v\mathfrak{F} = v^*\mathfrak{F}$. В общем же случае верна следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация и* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Всякая* $v^*\mathfrak{F}$*-группа* G *есть прямое произведение нильпотентной* π'*-группы* A *и* $v\mathfrak{F}$*-группы* B.

Доказательство. Пусть $G \in v^*\mathfrak{F}$ и $p \in \pi'$. Тогда по лемме 2.1 всякая циклическая примарная p-подгруппа субнормальна в G. Так как порождение субнормальных p-подгрупп является субнормальной p-подгруппой, то любая силовская p-подгруппа субнормальна в G. Значит, для любого $p \in \pi'$ любая силовская p-подгруппа G нормальна в G. Обозначим произведение таких силовских подгрупп через A. Очевидно, что A – нормальная нильпотентная π'-холлова подгруппа G.

По теореме Шура-Цассенхауза существует дополнение B к подгруппе A в G. Заметим, что B – π-холлова подгруппа G. Пусть H – циклическая примарная подгруппа из B. Рассмотрим HA. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то по 1) леммы 1.2 H $\mathfrak{F}$-достижима в HA. По лемме 2.2 $A \subseteq N_G(H)$. Так как B порождается своими циклическими подгруппами, то $A \subseteq N_G(B)$, т.е. B нормальна в G. Значит, $G = A \times B$.

Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $B \in v^*\mathfrak{F}$ по лемме 2.4. Из леммы 2.5 и наследственности класса $v^*\mathfrak{F}$ следует, что композиционные факторы каждой подгруппы из B принадлежат $\mathfrak{F}$. Это означает, что всякая $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа в B является $\mathfrak{F}$-субнормальной в B. Значит, $B \in v\mathfrak{F}$. Что и требовалось доказать. □

Перейдём к доказательству того, что $v\mathfrak{F}$ и $v^*\mathfrak{F}$ – наследственные формации для любой наследственной формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация. Тогда* $v\mathfrak{F}$ *также является наследственной формацией.*

Доказательство. По лемме 2.4 $v\mathfrak{F}$ является наследственным гомоморфом.

Предположим, что $G/N_1 \in v\mathfrak{F}$, $G/N_2 \in v\mathfrak{F}$, но $G/(N_1 \cap N_2) \notin v\mathfrak{F}$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Из $G_\pi = G_\pi G_\pi$ и леммы 1.4 следует, что $\pi(G) \subseteq \pi(v\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Пусть A – циклическая примарная подгруппа G такая, что A не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Заметим, что AN_i/N_i $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N_i для $i = 1, 2$. По 2) леммы 1.1 AN_i $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для $i = 1, 2$.

Предположим, что $B = AN_1N_2 \neq G$. Заметим, что $B/N_i < G/N_i \in v\mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$. Так как класс $v\mathfrak{F}$ наследственен, то $B/N_i \in v\mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Из $|B| < |G|$ следует, что $B \in v\mathfrak{F}$. А значит, A $\mathfrak{F}$-субнормальна в B. Откуда по лемме 1.2 A $\mathfrak{F}$-субнормальна в AN_1. Следовательно, A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по 3) леммы 1.1, противоречие.

Таким образом, $G = AN_1N_2$. Предположим, что $G = AN_1$. Имеем $N_2 \cong N_2N_1/N_1 \leq AN_1/N_1 \cong A/(A \cap N_1)$. Так как A является циклической примарной подгруппой, то N_2 – циклическая примарная подгруппа. Значит, AN_2 – примарная группа. По лемме 1.3 A $\mathfrak{F}$-субнормальна в AN_2, а, значит, она $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по 3) леммы 1.1, противоречие.

Предположим теперь, что $G = AN_1N_2$ и $AN_i \neq G$ для $i = 1, 2$. Подгруппа $C = N_1 \cap AN_2$ нормальна в AN_2. Получаем, что подгруппа AN_2 содержит две нормальные подгруппы C и N_2. Заметим, что $(C \cap N_2) \leq (N_1 \cap N_2) = 1$. Из $AN_2/N_2 < G/N_2 \in v\mathfrak{F}$ и наследственности класса $v\mathfrak{F}$ следует, что $AN_2/N_2 \in v\mathfrak{F}$. Заметим, что $G/N_1 = (AN_2)N_1/N_1 \cong AN_2/(AN_2 \cap N_1) \in v\mathfrak{F}$. Таким образом, $AN_2 \in v\mathrm{F}$. Значит, A F-субнормальна в AN_2 и AN_2 F-субнормальна в G. То есть A F-субнормальна в G, что является заключительное противоречием. Следовательно, $v\mathrm{F}$ – формация. □

Следствие 2.1. *Пусть* F *– наследственная формация и* $\pi = \pi(\mathrm{F})$. *Тогда* $v^*\mathrm{F}$ *– наследственная формация и* $v^*\mathrm{F} = \mathrm{N}_{\pi'}(v\mathrm{F}) \cap (v\mathrm{F})\mathrm{N}_{\pi'}$.

Доказательство. Следует из теорем 2.1 и 2.2. □

Лемма 2.6. *Пусть* F, H *– наследственные формации. Тогда*

1) $\mathrm{F} \subseteq v\mathrm{F}$;

2) $\mathrm{N}_{\pi(\mathrm{F})} \subseteq v\mathrm{F}$;

3) $\pi(\mathrm{F}) = \pi(v\mathrm{F})$;

4) $v(v\mathrm{F}) = v\mathrm{F}$;

5) $v^*(v^*\mathrm{F}) = v^*\mathrm{F}$;

6) *Если* $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{H}$, *то* $v\mathrm{F} \subseteq v\mathrm{H}$ *и* $v^*\mathrm{F} \subseteq v^*\mathrm{H}$.

Доказательство. 1) следует из леммы 1.2. 2) следует из леммы 1.3. 3) следует из леммы 1.4 и того, что $\mathrm{G}_\pi = \mathrm{G}_\pi\mathrm{G}_\pi$. 6) следует из 4) леммы 1.1.

Докажем 4). Заметим, что $v\mathrm{F} \subseteq v(v\mathrm{F})$ по 1). Предположим, что $v\mathrm{F} \subset v(v\mathrm{F})$, и выберем группу G наименьшего порядка из $v(v\mathrm{F})\backslash v\mathrm{F}$. Из 2) и 3) леммы 2.6 следует, что $|\pi(G)| > 1$. То есть всякая циклическая примарная подгруппа G является собственной. Из определения класса $v\mathrm{F}$ следует, что для любой циклической примарной подгруппы P группы G найдётся максимальная в G подгруппа M такая, что $P \leq M$ и $G^{v\mathrm{F}} \leq M$. Ввиду нашего предположения $M \in v\mathrm{F}$. Так как $G/G^{v\mathrm{F}} \in v\mathrm{F}$, то $PG^{v\mathrm{F}}/G^{v\mathrm{F}}$ F-субнормальна в $G/G^{v\mathrm{F}}$. Ввиду 2) леммы 1.1 $PG^{v\mathrm{F}}$ F-субнормальна в G. Из $M \in v\mathrm{F}$ и леммы 1.2 следует, что P F-субнормальна в $G^{v\mathrm{F}}$. По 3) леммы 1.1 P F-субнормальна в G. Значит, $G \in v\mathrm{F}$, противоречие.

Докажем 5). Ввиду теорем 2.1 и 2.2 нам надо показать, что $v(v^*\mathrm{F}) = v^*\mathrm{F}$. Из 1) леммы 2.6 следует, что $v^*\mathrm{F} \subseteq v(v^*\mathrm{F})$. Предположим, что $v^*\mathrm{F} \subset v(v^*\mathrm{F})$, и выберем группу G наименьшего порядка из $v(v^*\mathrm{F})\backslash v^*\mathrm{F}$. Из 2) и 3) леммы 2.6 следует, что $|\pi(G)| > 1$. То есть всякая циклическая примарная подгруппа G является собственной. Из определения класса $v^*\mathrm{F}$ и лемм 2.4, 2.5 следует, что для любой циклической примарной подгруппы P группы G найдётся максимальная в G подгруппа M такая, что $P \leq M$ и $G^{v^*\mathrm{F}} \leq M$. Ввиду нашего предположения $M \in v^*\mathrm{F}$. Так как $G/G^{v^*\mathrm{F}} \in v^*\mathrm{F}$, то $PG^{v^*\mathrm{F}}/G^{v^*\mathrm{F}}$ F-достижима в $G/G^{v^*\mathrm{F}}$. Ввиду леммы 1.1 $PG^{v^*\mathrm{F}}$ F-достижима в G. Из $M \in v^*\mathrm{F}$ и 1) леммы 1.2 следует, что P F-достижима в $G^{v^*\mathrm{F}}$. По 3) леммы 1.1 P F-достижима в G. Значит, $G \in v^*\mathrm{F}$, противоречие. □

Теорема 2.3. *Пусть* F *– насыщенная наследственная формация. Тогда формации* $v\mathrm{F}$ *и* $v^*\mathrm{F}$ *насыщенны.*

Доказательство. Докажем насыщенность $v\mathrm{F}$. Предположим противное. Пусть группа G – контрпример наименьшего порядка к теореме. То есть $G/\Phi(G) \in v\mathrm{F}$ и G не является $v\mathrm{F}$-группой.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Из $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G) \in v\mathrm{F}$ следует, что $(G/N)/\Phi(G/N) \in v\mathrm{F}$. В силу нашего предположения получаем, что $G/N \in v\mathrm{F}$. Так как $v\mathrm{F}$ – формация, то N является единственной минимальной нормальной подгруппой G и $N \leq \Phi(G)$. Таким образом, N – p-группа для некоторого простого p и $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть Q – циклическая примарная q-подгруппа G для некоторого простого q. Из $G/N \in v\mathrm{F}$ и 2) леммы 1.1 следует, что QN F-субнормальна в G. Пусть $A = Q\tilde{F}(G)$. Заметим, что $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$ – квазинильпотентная нормальная подгруппа в G. В частности, $\tilde{F}(G)/\Phi(G) \subseteq F^*(A/\Phi(G))$. То есть $A/\Phi(G) = (Q\Phi(G)/\Phi(G))F^*(A/\Phi(G))$. По предложению 6.1.11 [6, с. 239] $A/\Phi(G) \in \mathrm{F}$. Тогда A действует F-стабильно на $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$ для максимального внутреннего локального экрана F формации F. Из $O_{p'}(G) = 1$ и теоремы 9.18 [2, с.125], следует, что A действует F-стабильно и на $\Phi(G)$. Таким образом, $A \in \mathfrak{F}$. Значит, Q $\mathfrak{F}$-субнормальна в QN и, по 3) леммы 1.1, в G. То есть $G \in v\mathfrak{F}$, противоречие.

Так как формации $v\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})'}$ насыщены, то и формация $v^*\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})'}(v\mathfrak{F}) \cap (v\mathfrak{F})\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})'}$ насыщена [6, с. 96]. □

3 Случай $v\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая её циклическая примарная подгруппа субнормальна. С другой стороны, существуют примеры несверхразрешимых групп [12], у которых всякая циклическая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна. Будем считать, что единичная подгруппа группы G является циклической примарной подгруппой.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация. Тогда и только тогда* $v\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, *когда* $G/\tilde{F}(G)$ *является циклической примарной группой для любой* $G \in M(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Предположим, что $G \in M(\mathfrak{F})$. Если $\pi(G)\backslash\pi(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$, то G является циклической группой простого порядка в силу наследственности $\mathfrak{F}$. В этом случае $G = \tilde{F}(G)$ и утверждение теоремы верно. Предположим теперь, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F}$ насыщена и $\tilde{F}(G/\Phi(G)) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$, то можно считать, что $\Phi(G) = 1$. Заметим, что $|\pi(G)| > 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Если $N = G$, то группа $G/N = G/\tilde{F}(G) \cong 1$ является циклической. Предположим, что $N \neq G$. Тогда найдётся максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM$. Откуда мы заключаем, что $N = G^{\mathfrak{F}}$. Пусть C – циклическая примарная подгруппа группы G. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ и леммы 1.2 следует, что CN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Если $CN \neq G$, то $CN \in v\mathfrak{F}$ и, следовательно, C $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Значит, если $CN \neq G$ для любой циклической примарной подгруппы группы G, то $G \in v\mathfrak{F}$. Это означает, что $G = CN$ для некоторой циклической примарной подгруппы C группы G. Осталось заметить, что $N \leq \tilde{F}(G)$. То есть $G/\tilde{F}(G)$ – циклическая примарная группа. Что и требовалось доказать.

Предположим, что для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G верно, что $G/\tilde{F}(G)$ – циклическая группа. Предположим, что $\mathfrak{F} \neq v\mathfrak{F}$. По 1) леммы 2.6 имеем $\mathfrak{F} \subseteq v\mathfrak{F}$. Пусть группа G – группа минимального порядка из $v\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{F}$. Так как обе формации $\mathfrak{F}$ и $v\mathfrak{F}$ насыщены, то можно предположить, что $\Phi(G) = 1$. Из наследственности $v\mathfrak{F}$ и выбора группы G заключаем, что $G \in M(\mathfrak{F})$. Заметим, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = G^{\mathfrak{F}} = \tilde{F}(G)$. По условию $G/N = \langle xN\rangle$ – циклическая p-подгруппа для некоторого простого p. Пусть P – силовская p-подгруппа $\langle x\rangle$. Заметим, что P – циклическая подгруппа и $PN = \langle x\rangle N = G$. С другой стороны, так как $G \in v\mathfrak{F}$, то P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. То есть, найдётся максимальная подгруппа M группы G такая, что $P \leq M$ и $G^{\mathfrak{F}} \leq M$. Но, это означает, что $G \leq M < G$. Противоречие. Значит, $v\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, что и требовалось доказать. □

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова, если всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является группой Шмидта или циклической группой простого порядка [13].

Следствие 3.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова. Тогда* $v\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ множество $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешётку решётки подгрупп G [13].

Следствие 3.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная решёточная формация. Тогда* $v\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Следствие 3.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *формация π-нильпотентных групп. Тогда* $v\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Следствие 3.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *формация ϕ-дисперсивных групп. Тогда* $v\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Литература

1. Hawkes, T.O. On formation subgroups of a finite soluble group / T.O. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – V. 4 – P. 243–250.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978 – 272 с.

3. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных F-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

4. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

5. Kegel, O.H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.

6. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – New York : Springer, 2006. – 385 p.

7. Васильева, Т.И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.

8. Васильева, Т.И. Конечные группы с F-достижимыми проекторами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2006. – № 5(38). – С. 14–18.

9. Семенчук, В.Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Мат. заметки. –2011. – Т. 89, № 1. – С. 104–108.

10. Вегера, А.С. О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп / А.С. Вегера // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 154–158.

11. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

12. Monakhov, V.S. Finite groups with **P**-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica, Springer, DOI 10.1007/s11587-013-0153-9.

13. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003 – 254 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 06.10.2013