О возбуждении акустических колебаний в ядерном реакторе с циркулирующим газообразным горючим

ДЕНИСОВ В. А.

УДК 621.039.51.514

Вопрос о возбуждении акустических колебаний в активной зоне ядерного реактора с циркулирующим газообразным горючим рассматривался в работах [1, 2] с помощью численных методов. При таком рассмотрении для получения качественной картины явления необходимо провести большое число расчетов на ЭВМ, каждый из которых требует значительных затрат машинного времени. В связи с этим определенный смысл приобретает аналитическое рассмотрение указанной задачи, которое и проведено в настоящей работе с помощью метода теории возмущений.

Математическая модель активной зоны ядерного реактора малых размеров с циркулирующим газообразным горючим описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{dN}{dt}=\frac{k-\beta}{l}N+\sum_i \lambda_i C_i;\; C_i=\mathrm{const};$$

$$k=k_0+\alpha\int_0^H[\rho(x,t)-\rho_0(x)]\,\Phi(x)\,dx; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho w)=0;$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho w\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=0;$$

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+w\frac{\partial T}{\partial x}\right)+P\frac{\partial w}{\partial x}=AN\rho F(x);$$

$$P=R\rho T$$

с граничными условиями

$$T(t,\ x=0)=T_{\text{вх}}=\mathrm{const};$$
$$P(t,\ x=0)=P_{\text{вх}}=\mathrm{const}; \tag{2}$$
$$P(t,\ x=H)=P_{\text{вых}}=\mathrm{const}.$$

Здесь, в отличие от работы [1], в уравнении движения горючего не учитываются гидравлические потери на трение, которые стабилизируют систему [1, 2], и более строго записано уравнение энергии. Линеаризуем уравнения (1), (2) в окрестности стационарного решения, применим преобразование Лапласа по времени t и исключим температуру и плотность нейтронов. Полученную систему запишем в виде матричного уравнения

$$A\frac{du}{dy}+MB\frac{du}{dy}+Cu+MDu+Ksu-$$
$$-M\varphi(s)\,RF(y)\int_0^1 u\Phi(y)\,dy=0 \tag{3}$$

с граничными условиями

$$u_2(s,\ y=0)=0;\; u_3(s,\ y=0)=0;$$
$$u_3(s,\ y=1)=0. \tag{4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix};\; A=\begin{pmatrix}\frac{1}{m}&0&0\\0&0&m\\\varkappa n&0&0\end{pmatrix};\; B=\begin{pmatrix}0&m&0\\m&0&0\\0&0&m\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{m}\right)&0&0\\0&0&0\\\frac{dn}{dy}&0&0\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}0&\frac{dm}{dy}&0\\\frac{dm}{dy}&0&0\\0&-\alpha_1F(y)&\varkappa\frac{dm}{dy}\end{pmatrix};$$

$$K=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};\qquad R=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix};$$

$$\varphi(s)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{1+\alpha_3 s};$$

$$u_1=\frac{\Delta w}{C_{\text{вх}}};\; u_2=\frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{вх}}};\; u_3=\frac{\Delta P}{P_{\text{вх}}};\; m=\frac{w_0(y)}{w_{\text{вх}}};$$

$$n=\frac{P_0(y)}{P_{\text{вх}}};$$

$$\alpha_1=\frac{AN_0\rho_{\text{вх}}H(\varkappa-1)}{P_{\text{вх}}w_{\text{вх}}};\quad \alpha_2=\frac{\alpha\rho_{\text{вх}}H}{\beta_{\text{эф}}};$$

$$\alpha_3=\frac{lc_{\text{вх}}}{\beta_{\text{эф}}H};\; \xi=\frac{\beta-K_0}{\beta};\; \beta_{\text{эф}}=\beta\xi;$$

$$\varkappa=\frac{c_p}{c_v};\quad M=\frac{W_{\text{вх}}}{c_{\text{вх}}};\quad y=\frac{x}{H}.$$

Параметры α_1, α_2, α_3, ξ характеризуют соответственно стационарную мощность реактора, плотностной коэффициент реактивности, отношение постоянной времени изменения плотности нейтронов к периоду акустических колебаний и ценность запаздывающих нейтронов [3]. Индекс «ноль» означает переменную в стационарном режиме; s — параметр преобразования Лапласа. Переменные m и n определяются из стационарных уравнений, которые можно преобразовать к системе

$$\frac{dm}{dy}=\frac{\alpha_1F(y)}{m(\varkappa n-M^2m)};\; \frac{dn}{dy}=-M^2\frac{dm}{dy} \tag{5}$$

с начальными условиями

$$m(y=0)=1;\quad n(y=0)=1. \tag{6}$$

Заметим, что функции $F(y)$ и $\Phi(y)$ положительные и $F(y)\leqslant 1$.

Пусть параметр α_1 порядка единицы. Тогда все коэффициенты уравнения (3) порядка единицы, а параметр M — число Маха на входе в активную зону 10^{-2}, т. е. $M \ll 1$. Тогда решение и собственные числа краевой задачи (3), (4) будем искать, используя теорию возмущений, в виде рядов по степеням малого параметра M:

$$u = u_0 + Mu_1 + M^2u_2 + \ldots; \quad s = s_0 + Ms_1 + M^2s_2 + \ldots$$

В нулевом приближении ($M = 0$) матричное уравнение (3) сводится к одному самосопряженному уравнению второго порядка:

$$\frac{d}{dy}\left[my\frac{du_{30}}{dy}\right] - \frac{s_0^2}{\varkappa}u_{30} = 0 \tag{7}$$

с граничными условиями

$$u_{30}(y=0) = u_{30}(y=1) = 0. \tag{8}$$

Согласно [4], собственные числа s_0 краевой задачи (7), (8) чисто мнимые ($s_0 = j\omega_0$), т. е. система находится на границе устойчивости. Вопрос о возбуждении колебаний при $M \ll 1$ решается по первому приближению: если $\operatorname{Re} s_1 > 0$, то в системе возбуждаются акустические колебания.

Ограничимся первым приближением, пренебрежем членами с M^2 и в уравнении (3) примем

$$\frac{dn}{dy} = 0; \quad n \equiv 1; \quad \frac{dm}{dy} = \frac{\alpha_1 F(y)}{\varkappa m}; \quad m(y=0) = 1.$$

Применив процедуру метода теории возмущений [5][1], получим

$$s_1 = \frac{v^*Au_0\Big|_0^1 + \int\limits_0^1\left[v^*B\frac{du_0}{dy} + v^*Du_0\right]dy - \varphi(s_0)\int\limits_0^1 v^*RF(y)\int\limits_0^1\Phi(y)\,u_0\,dy\,dy}{\int\limits_0^1 v^*ku_0\,dy}, \tag{9}$$

где v^* определяется из условия

$$-\frac{d}{dy}(v^*A) + vC + v^*Ks_0 = 0. \tag{10}$$

Решая уравнение (10) с граничными условиями $v_3^*(0) = v_3^*(1) = 0$; $v_1^*(0) = 0$, получаем $v_1^* = 0$; $v_2^* = \dfrac{\varkappa du_{30}/dy}{s_0}$; $v_3^* = u_{30}$. Очевидно, что $\int\limits_0^1 v^*ku_0\,dy = \int\limits_0^1\left[-\dfrac{\varkappa m}{s_0^2}\left(\dfrac{du_{30}}{dy}\right)^2 + u_{30}^2\right]dy > 0$, и знак $\operatorname{Re} s_1$ определяется числителем в формуле (9). Подставим в него $s_0 = j\omega_0$ и вычислим его реальную часть. После преобразований, использующих уравнение (7), получим, что знак $\operatorname{Re} s_1$ определяется знаком выражения

$$Q = -\int\limits_0^1\left[\frac{\varkappa m\dfrac{dm}{dy}}{\omega_0^2}\left(\frac{du_{30}}{dy}\right)^2 - \frac{\varkappa\left(\dfrac{dm}{dy}\right)^2}{\omega_0^2}u_{30}\frac{du_{30}}{dy} + (\varkappa-1)\frac{dm}{dy}u_{30}^2\right]du - \frac{\alpha_1\alpha_2}{(1+\alpha_3^2\omega_0^2)\,\omega_0^2}\int\limits_0^1 Fu_{30}\,dy\int\limits_0^1\Phi\frac{d^2u_{30}}{dy^2}\,du. \tag{11}$$

Из анализа выражения (11) можно сделать некоторые выводы о возбуждении акустических колебаний.

Рассмотрим частный случай, когда реактор работает на постоянной мощности [$N(t) = \mathrm{const}$], т. е. обратная связь от мощности к реактивности разорвана. Тогда в выражении (11) второй член отсутствует. Если распределение плотности нейтронов по высоте активной зоны постоянно, т. е. $F(y) = \mathrm{const}$, то

$$Q = -\int\limits_0^1\varkappa\frac{dm}{dy}u_{30}^2\,dy < 0.$$

В случае $F(y) \neq \mathrm{const}$ трудно точно оценить Q, но можно получить достаточное условие того, что $Q < 0$. Подынтегральная функция — квадратичная форма относительно переменных u_{30} и $\dfrac{du_{30}}{dy}$. Очевидно, что $Q < 0$, если

$$\left(\frac{dm^2}{dy}\right) < 4m\omega_0^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}. \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что при α_1 порядка единицы это неравенство выполняется, т. е. акустические колебания в реакторе на постоянной мощности не возбуждаются.

Покажем, что в общем случае, когда $N(t) \neq \mathrm{const}$, в реакторе могут возникнуть акустические колебания. Это возможно только при условии, что второй член в выражении (11) отрицательный. Оценим знак этого члена, когда ω_0 является первой собственной частотой. Тогда собственная функция u_{30} положительна в интервале (0,1) и обращается в нуль только на концах этого интервала. Из уравнения (7) имеем $\dfrac{d}{dy}\left[m(y)\dfrac{du_{30}}{dy}\right] = -\dfrac{\omega_0^2}{\varkappa}u_{30} < 0$ при $0 < y < 1$, т. е. $m(y)\dfrac{du_{30}}{dy}$ — убывающая функция. Из уравнений статики следует, что $m(y)$ — возрастающая функция, тогда $\dfrac{du_{30}}{dy}$ — убывающая функция и, следовательно, $\dfrac{d^2u_{30}}{dy^2} < 0$. Таким образом, первый интеграл во втором члене выражения (11) больше нуля, а второй меньше, т. е. весь второй член меньше нуля и вносит положительный вклад в величину $\operatorname{Re} s_1$. Это может привести к $\operatorname{Re} s_1 > 0$, т. е. к возбуждению первой гармоники акустических колебаний. Следовательно, причиной возбуждения акустических колебаний является наличие обратной связи от мощности к реактивности

[1] В отличие от работы [5] матричное уравнение (3) умножается не на u^*, а на v^*, определяемое уравнением (10).

Величина этой связи определяется параметром α_2, характеризующим плотностной коэффициент реактивности; его увеличение может привести к возбуждению акустических колебаний [увеличивается положительный вклад в $\operatorname{Re} s_1$, см. выражение (11)]. И, наоборот, увеличение параметра α_3 способствует стабилизации системы. Так как параметры α_2 и α_3 входят только во второй член выражения (11), то за счет их выбора в принципе всегда можно добиться, чтобы $\operatorname{Re} s_1 < 0$, т. е. сделать реактор устойчивым по отношению к акустическим колебаниям.

Поступило в Редакцию 14/I 1974 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горяченко В. Д., Сабаев Е. Ф.** «Атомная энергия», 1968, т. 24, вып. 4, с. 375.
2. **Денисов В. А.** В сб.: Вопросы атомной науки и техники. Серия «Динамика ядерных энергетических установок». М., ЦНИИатоминформ, 1973, вып. 4, с. 47.
3. **Горяченко В. Д.** «Атомная энергия», 1966, 21, вып. 1, с. 3.
4. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1, М., Изд. иностр. лит., 1953.
5. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.

Теория возмущений для процессов облучения изотопов

НЕМИРОВСКАЯ С. А., РУДИК А. П.

УДК 621.039.554

Расчеты получения новых изотопов в результате облучения в ядерных реакторах, привлекающие в последнее время заметное внимание [1—4], зависят при относительно длинной цепочке облучаемых изотопов от большого числа физических постоянных. Так как все эти физические постоянные известны в ряде случаев с недостаточной точностью, возникает вопрос о зависимости результатов расчетов от неопределенностей исходных физических постоянных. В настоящей работе эта задача решается на основе математической техники, связанной с введением гамильтониана и сопряженных функций [5], как это показано в работах [6, 7] применительно к процессам облучения изотопов. Для упрощения рассмотрим простейшую цепочку получения ^{238}Pu из ^{237}Np [4]. Описанная методика легко обобщается на цепочки с любым числом изотопов.

Обозначим через x^1, x^2 и x^3 концентрации изотопов ^{237}Np, ^{238}Np и ^{238}Pu соответственно. Тогда процесс получения ^{238}Pu из ^{237}Np при облучении потоком нейтронов с параметром жесткости спектра γ [4] и потоком тепловых нейтронов U описывается следующей обычной системой уравнений [8]:

$$\frac{dx^1}{dt} = -U(\sigma_1+\gamma I_1)\,x^1 \equiv f^1;$$
$$\frac{dx^2}{dt} = U(\sigma_1+\gamma I_1)\,x^1 - [U(\sigma_2+\gamma I_2)+\lambda_2]\,x^2 \equiv f^2; \quad (1)$$
$$\frac{dx^3}{dt} = \lambda_2 x^2 - U(\sigma_3+\gamma I_3)\,x^3 \equiv f^3.$$

Если время облучения T, то количество образовавшегося после достаточной выдержки ^{238}Pu $x^3(\infty) = x^2(T)+x^3(T)$ может быть представлено в виде следующего интеграла:

$$-x^3(\infty) = -\int\limits_0^T [f^2(t)+f^3(t)]\,dt \equiv$$
$$\equiv -\int\limits_0^T f^0(t)\,dt \equiv J. \quad (2)$$

Зависимость $x^3(\infty)$ от изменения какой-либо физической постоянной α, входящей в систему (1), определяется следующим выражением [7]:

$$\Delta_\alpha x^3(\infty) = -\Delta\alpha \int\limits_0^T \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\alpha}\,dt \equiv -\Delta J, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^{i=3} \psi_i f^i; \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^i},$$

причем $\psi_0 = -1$ и сопряженные функции ψ_i удовлетворяют условиям трансверсальности [5,7].

Ограничиваясь случаем, рассмотренным в работе [4], когда самоэкранировка резонансных поглощений не существенна, т. е. резонансные интегралы I_1, I_2, I_3 не зависят от концентраций x^1, x^2, x^3, для рассматриваемого примера получим следующий гамильтониан $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = U\{(\sigma_1+\gamma I_1)\,x^1 - (\sigma_2+\gamma I_2)\,x^2 - (\sigma_3+\gamma I_3)\,x^3\} -$$
$$-\psi_1 U(\sigma_1+\gamma I_1)\,x^1 + \psi_2\{U(\sigma_1+\gamma I_1)\,x^1 -$$
$$-[U(\sigma_2+\gamma I_2)+\lambda_2]\,x^2\} +$$
$$+\psi_3[\lambda_2 x^2 - U(\sigma_3+\gamma I_3)\,x^3]. \quad (4)$$

Гамильтониан (4) зависит от σ_i и I_i только через комбинации $\Sigma_i = \sigma_i + \gamma I_i$. Поэтому под α будем понимать лишь Σ_i ($i = 1, 2, 3$) и λ_2. Соответствующие производные от $\mathcal{H}$, входящие в выражение (3), будут равны:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Sigma_1} = Ux^1[1-\psi_1+\psi_2];$$
$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Sigma_2} = -Ux^2[1+\psi_2]; \quad (5)$$
$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Sigma_3} = -Ux^3[1+\psi_3]; \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda_2} = x^2[\psi_3-\psi_2].$$

В качестве примера покажем результаты расчетов при следующих значениях физических постоянных [4]: $U = 10^{14}$ *нейтр/см²·сек*; $\gamma = 0{,}15$; $\sigma_1 = 170$ *барн*; $I_1 = 946$ *барн*; $\sigma_2 = 2070$ *барн*; $I_2 = 880$ *барн*; $\sigma_3 = 500$ *барн*; $I_3 = 150$ *барн* (в работе [4] по имевшимся в свое время данным принималось $I_3 = 3420$ *барн*); $\lambda_2 = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = 0{,}321$ *сутки*$^{-1}$. Начальные условия:

$$x^1(0) = 1; \quad x^2(0) = x^3(0) = \psi_1(T) = \psi_2(T) = \psi_3(T) = 0.$$