Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 512.572

Подгруппы свободной абелевой n-арной группы

Н.А. Щучкин

Приведено полное описание строения свободной абелевой n-арной группы и изучены подгруппы этой n-арной группы.

Ключевые слова: абелева n-арная группа, прямое произведение, порождающее множество, n-арная подгруппа, полуциклическая n-арная группа.

The paper presents a complete description of the structure of a free Abelian n-ary group. Subgroups of this n-ary group are studied.

Keywords: Abelian n-ary group, direct product, generating set, n-ary subgroup, semi cyclic n-ary group

1. Основные определения. Алгебру $< G, f >$ с n-арной операцией f $(n \geq 2)$ называют n-арной группой, если в ней выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1,\ldots,a_n),a_{n+1},\ldots,a_{2n-1}) = f(a_1,\ldots,a_i,f(a_{i+1},\ldots,a_{i+n}),a_{i+n+1},\ldots,a_{2n-1}) \qquad (1)$$

для всех $i = 1,\ldots,n-1$ и для любых $a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n,b$ из G разрешимо и имеет единственное решение каждое из уравнений $f(a_1,\ldots,a_{j-1}x_j,a_{j+1},\ldots,a_n) = b$ для всех $j = 1,\ldots,n$. При $n = 2$ имеем обычную (бинарную) группу. Нас интересуют случаи, когда $n > 2$. Основы теории n-арных групп подробно изложены в работах [1]–[3]. Необходимость изучения этой теории отмечал А.Г. Курош в своей книге [4].

Коммутативность (или перестановочность элементов) в теории n-арных групп имеет несколько обобщений групповой коммутативности. Мы будем изучать класс n-арных групп с самым сильным обобщением коммутативности – перестановка любых элементов при действии n-арной операции. n-Арная группа называется абелевой, если в ней верны тождества $f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma \in S_n$.

В n-арной группе $< G, f >$ для любого элемента a решение уравнения $f(a,\ldots,a,x) = a$ обозначают через $\bar{a}$ и называют косым элементом для a. Определение косого элемента задает в $< G, f >$ отображение $^{-} : x \to \bar{x}$. На n-арную группу $< G, f >$ можно смотреть как на алгебру $< G, f, ^{-} >$ [5], в которой выполнены обобщенный закон ассоциативности (1) и тождества

$$f(y,\underbrace{x,\ldots,x}_{n-2},\bar{x}) = f(y,\underbrace{x,\ldots,x}_{n-3},\bar{x},x) = f(\bar{x},\underbrace{x,\ldots,x}_{n-2},y) = f(x,\bar{x},\underbrace{x,\ldots,x}_{n-3},y) = y.$$

Отметим, что это отображение в абелевой n-арной группе будет эндоморфизмом, т.е. верно тождество $\overline{f(x_1,\ldots,x_n)} = f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ (см. [6]).

Для каждой n-арной группы имеются сопутствующие ей бинарные группы, которые помогают изучать эту n-арную группу. В [6] показано, что на любой абелевой n-арной группе $< G, f >$ можно определить абелеву группу $red_c < G, f >$ с бинарной операцией $+$ по правилу $a + b = f(a,\underbrace{c,\ldots,c}_{n-3},\bar{c},b),$ где c – любой фиксированный элемент из G. Тогда

$$f(a_1,\ldots,a_n) = a_1 + \ldots + a_n + d, \qquad (2)$$

где $d = f(\underbrace{c,\ldots,c}_{n})$. Элемент c будет нулем в $red_c < G, f >$. n-Арную группу $< G, f >$, у которой $red_c < G, f >$ является циклической группой, называют абелевой полуциклической [2], [3].

Верно и обратно: в любой абелевой группе G для произвольно выбранного элемента d задается абелева n-арная группа $< G, f >= abl_d G$, где f действует по правилу (2). Если

$d=0$ – нуль группы G, то n-арную группу abl_0G называют производной от группы G. Кроме того, $<G,f>=abl_d red_c <G,f>$ и $G=red_0 abl_d G$, где $d=f(0,\ldots,0)$ (см. [6]).

Для циклической группы $G=(a)$ абелева n-арная группа $abl_{la}(a)$ будет полуциклической. Более того, любая абелева полуциклическая n-арная группа изоморфна некоторой n-арной группе $abl_{la}(a)$ (см. [7]). Среди всех абелевых полуциклических n-арных групп $abl_{la}(a)$, заданных на фиксированной циклической группе (a), выделим циклические (порожденные одним элементом). Полуциклическая n-арная группа $abl_{la}(a)$ конечного порядка k будет циклической тогда и только тогда, когда l и НОД($n-1,k$) взаимно просты (следствие 2, [7]). Бесконечная полуциклическая n-арная группа $abl_{la}(a)$ является циклической тогда и только тогда, когда $l\equiv 1\left(\operatorname{mod} n-1\right)$ либо $l\equiv -1\left(\operatorname{mod} n-1\right)$ (предложение 8, [7]).

Дальше нам понадобится

Лемма 1. Пусть σ – изоморфизм из абелевой группы $<G,+>$ во внешнюю прямую сумму $\sum_{i\in I}<A_i,+>$ ее подгрупп $<A_i,+>$ и $d\in G$, $\sigma(d)=(\ldots,d_i,\ldots)$. Тогда σ является изоморфизмом n-арных групп $abl_d<G,+>$ и $\prod_{i\in I} abl_{d_i}<A_i,+>$.

*Доказательство***.** Для произвольно выбранных элементов $a_1,\ldots,a_n$ из G полагаем $\sigma(a_j)=(\ldots,a_{ji},\ldots)$. Тогда

$$\sigma(f(a_1,\ldots,a_n))=\sigma(a_1+\ldots+a_n+d)=\sigma(a_1)+\ldots+\sigma(a_n)+\sigma(d)=$$

$$=(\ldots,a_{1i},\ldots)+\ldots+(\ldots,a_{ni},\ldots)+(\ldots,d_i,\ldots)=(\ldots,a_{1i}+\ldots+a_{ni}+d_i,\ldots)=$$

$$=(\ldots,f(a_{1i},\ldots,a_{ni}),\ldots)=f((\ldots,a_{1i},\ldots),\ldots,(\ldots,a_{ni},\ldots))=f(\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)).$$

Лемма доказана.

2. Порождающие множества абелевых n-арных групп. Здесь и далее мы будем использовать стандартные обозначения

$$f(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+s},x_{k+s+1},\ldots,x_n)=f(x_1^k,\overset{(s)}{x},x_{k+s+1}^n)$$

всякий раз, когда $x_{k+1}=\ldots=x_{k+s}=x$ ($\overset{(0)}{x}$ и x_i^j при $i>j$ – пустые символы). В n-арной группе $<G,f>$, используя закон (1), определяют новую $(k(n-1)+1)$-арную операцию $f_{(k)}$ по правилу

$$f_{(k)}(x_1^{k(n-1)+1})=\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k\ \text{ðàç}}(x_1^n),x_{n+1}^{2n-1})\ldots),x_{(k-1)(n-1)+2}^{k(n-1)+1}).$$

Отметим выполнимость тождеств в n-арных группах (см. леммы 2.3 и 2.4 из [8])

$$\overline{f(x_1^n)}=f_{(n-3)}((\overset{(n-3)}{x_n},\bar{x}_n,\ldots,\overset{(n-3)}{x_1},\bar{x}_1)),\quad \bar{\bar{x}}=f_{(n-3)}(\overset{((n-2)^2)}{x}).$$

Любая n-арная подгруппа, порожденная некоторым множеством, состоит из применений операции f к элементам из этого множества и косым к этим элементам (см. [9], [2], [3]). Из теоремы 2.6, [9] для абелевых n-арных групп очевидно следует

Лемма 2. Для каждого элемента g из абелевой n-арной группы $<G,f>$ с порождающим множеством $X=\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$ найдутся неотрицательные целые числа $t_1,m_1,\ldots,t_k,m_k$, такие, что

$$g=f_{(q)}(\overset{(t_1)}{x_{\alpha_1}},\overset{(m_1)}{\bar{x}_{\alpha_1}},\ldots,\overset{(t_k)}{x_{\alpha_k}},\overset{(m_k)}{\bar{x}_{\alpha_k}}),\tag{3}$$

где $\alpha_i\in I$, $i=1,\ldots,k$ и $\sum_{i=1}^k(t_i+m_i)=q(n-1)+1$ для некоторого целого числа q.

Для абелевой n-арной группы $<G,f>$ с порождающим множеством X построим порождающее множество бинарной группы $red_c<G,f>$, заданной в пункте 1.

Теорема 1. Для каждой абелевой n-арной группы $<G, f>$ с порождающим множеством $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ при фиксированном x_β из X абелева группа $red_{x_\beta} <G, f>$ порождается множеством $Y = \{ f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_\alpha) \mid \alpha \in I\}$.

*Доказательство***.** Согласно лемме 2 для произвольного элемента g из G найдутся неотрицательные целые числа $t_0, m_0, t_1, m_1, \ldots, t_k, m_k$, такие, что

$$g = f(\overset{(t_0)}{x_\beta}, \overset{(m_0)}{\bar{x}_\beta}, \overset{(t_1)}{x_{\alpha_1}}, \overset{(m_1)}{\bar{x}_{\alpha_1}}, \ldots, \overset{(t_k)}{x_{\alpha_k}}, \overset{(m_k)}{\bar{x}_{\alpha_k}}),$$

где $\alpha_i \in I$, $i = 1, \ldots, k$ и $\sum_{i=0}^{k}(t_i + m_i) = q(n-1)+1$ для некоторого целого числа q. Тогда из (2) имеем

$$g = m_0 \bar{x}_\beta \oplus t_1 x_{\alpha_1} \oplus m_1 \bar{x}_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus t_k x_{\alpha_k} \oplus m_k \bar{x}_{\alpha_k} \oplus qd, \qquad (4)$$

где $d = f(\overset{(n)}{x_\beta})$ и $\oplus$ – сложение в $red_{x_\beta} <G, f>$. Так как $d \oplus \bar{x}_\beta = f_{(2)}(\overset{(2n-3)}{x_\beta}, \overset{(2)}{\bar{x}_\beta}) = x_\beta$ – нуль в $red_{x_\beta} <G, f>$, то $\bar{x}_\beta = -d$.

Индукцией по t_i (для каждого $i = 1, \ldots, k$) покажем равенство

$$t_i x_{\alpha_i} = -t_i d \oplus t_i f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}). \qquad (5)$$

При $t_i = 0$ равенство (5) очевидно. При $t_i = 1$ имеем

$$-d \oplus f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) = f_{(2)}(\bar{x}_\beta, \overset{(n-3)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta, \overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) = x_{\alpha_i}.$$

Предположим, что (5) верно для $t_i - 1$. Тогда

$$t_i x_{\alpha_i} = x_{\alpha_i} \oplus (t_i - 1)x_{\alpha_i} = -d \oplus f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) \oplus (-(t_i-1)d) \oplus (t_i - 1) f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) =$$

$$= -t_i d \oplus t_i f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}).$$

Значит, для любого неотрицательного целого числа t_i равенство (5) верно.

Теперь индукцией по m_i (для каждого $i = 1, \ldots, k$) покажем равенство

$$m_i \bar{x}_{\alpha_i} = m_i(n-3)d - m_i(n-2) f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}). \qquad (6)$$

При $m_i = 0$ равенство (6) очевидно. Заметим, что для любого элемента a из $red_{x_\beta} <G, f>$ ему противоположный элемент $-a = f(x_\beta, \overset{(n-3)}{a}, \bar{a}, x_\beta)$. Тогда

$$-f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) = f(x_\beta, \overset{(n-3)}{f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i})}, \overline{f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i})}, x_\beta) =$$

$$= f_{(n-1)}(\overset{((n-1)(n-3)+2)}{x_\beta}, \overset{(n-3)}{x_{\alpha_i}}, \overset{(n-1)}{\bar{x}_\beta}, \bar{x}_{\alpha_i}) = f(x_\beta, \bar{x}_\beta, \overset{(n-3)}{x_{\alpha_i}}, \bar{x}_{\alpha_i}).$$

Тогда при $m_i = 1$ имеем

$$(n-3)d - (n-2) f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) = (n-3) f(\overset{(n)}{x_\beta}) \oplus (n-2) f(x_\beta, \bar{x}_\beta, \overset{(n-3)}{x_{\alpha_i}}, \bar{x}_{\alpha_i}) =$$

$$= f_{(4n-11)}(\overset{((n-2)(3n-8))}{x_\beta}, \overset{(3n-8)}{\bar{x}_\beta}, \overset{((n-3)(n-2))}{x_{\alpha_i}}, \overset{(n-2)}{\bar{x}_{\alpha_i}}) = \bar{x}_{\alpha_i}.$$

Предположим, что (6) верно для $m_i - 1$. Тогда

$$m_i \bar{x}_{\alpha_i} = \bar{x}_{\alpha_i} \oplus (m_i - 1)\bar{x}_{\alpha_i} =$$

$$= (n-3)d - (n-2) f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) \oplus (m_i - 1)(n-3)d - (m_i - 1)(n-2) f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}) =$$

$$= m_i(n-3)d - m_i(n-2)\, f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_{\alpha_i}).$$

Значит, для любого неотрицательного целого числа m_i равенство (6) верно. Подставляем (6) и (5) в (4), этим завершаем доказательство теоремы.

*Следствие 1***.** Абелева группа $red_c < G, f >$, заданная на абелевой n-арной группе $< G, f >$ с порождающим множеством $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$, порождается множеством

$$Z = \{ f(x_\alpha, f(\overset{(n)}{x_\beta}), \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) \mid \alpha \in I\},$$

где x_β – фиксированный элемент из X.

*Доказательство***.** Задаем отображение σ из G в G по правилу $\sigma(x) = f(x_\beta, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$. Покажем, что σ является изоморфизмом из $red_{x_\beta} < G, f >$ в $red_c < G, f >$.

Для каждого y из G уравнение $f(x_\beta, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = y$ разрешимо относительно переменной x, а значит, σ является сюръективным отображением. Покажем инъективность σ. Если для x_1, x_2 из G имеем равенство $f(x_\beta, x_1, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = f(x_\beta, x_2, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$, то в силу единственности решения уравнения $f(x_\beta, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = f(x_\beta, x_2, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ относительно переменной x имеем $x_1 = x_2$. Таким образом, σ является биективным отображением.

Пусть теперь $a, b \in G$. Тогда

$$\sigma(a \oplus b) = \sigma(f(a, \overset{(n-3)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta, b)) = f(x_\beta, f(a, \overset{(n-3)}{x_\beta}, \bar{x}_\beta, b), \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b) = a + b.$$

Итак, мы доказали, что σ является изоморфизмом из $red_{x_\beta} < G, f >$ в $red_c < G, f >$.

Осталось найти образы порождающих элементов группы $red_{x_\beta} < G, f >$ при этом изоморфизме, которые будут порождать группу $red_c < G, f >$.

$$\sigma(f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_\alpha)) = f(x_\beta, f(\overset{(n-1)}{x_\beta}, x_\alpha), \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}) = f(x_\alpha, f(\overset{(n)}{x_\beta}), \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}).$$

Следствие доказано.

А теперь построим порождающее множество абелевой n-арной группы $abl_d G$, которая определена на абелевой группе $< G, + >$ с порождаюшим множеством $Z = \{z_\alpha \mid \alpha \in I\}$.

Теорема 2. Любая абелева n-арная группа $abl_{z_\beta} G$, определеная на абелевой группе $< G, + >$ с порождаюшим множеством $Z = \{z_\alpha \mid \alpha \in I\}$, где z_β – фиксированный элемент из Z, порождается множеством $X = \{-z_\beta + z_\alpha \mid \alpha \in I\}$.

*Доказательство***.** n-Арная операция f действует по правилу $f(a_1^n) = a_1 + \ldots + a_n + z_\beta$. Пусть $g = n_1 z_{\alpha_1} + \ldots + n_k z_{\alpha_k}$ – любой элемент из G. Заметим, что $-z_\beta = \overline{-z_\beta + z_\beta}$, так как $f(\overset{(n-1)}{-z_\beta + z_\beta}, -z_\beta) = -z_\beta + z_\beta$. Тогда для любых a, b из G имеем

$$a + b = a + (n-3)(-z_\beta + z_\beta) + (-z_\beta) + b + z_\beta = f(a, \overset{(n-3)}{-z_\beta + z_\beta}, \overline{-z_\beta + z_\beta}, b).$$

Тогда

$$g = f_{(k-1)}(n_1 z_{\alpha_1}, \ldots, n_k z_{\alpha_k}, \overset{((k-1)(n-3))}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(k-1)}{\overline{-z_\beta + z_\beta}}). \tag{7}$$

Если $n_i > 0$ $(1 \le i \le k)$, то индукцией по n_i докажем равенство

$$n_i z_{\alpha_i} = f_{n_i}(\overset{(n_i(n-2)+1)}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(n_i)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}}). \tag{8}$$

При $n_i = 1$ имеем $z_{\alpha_i} = f(\overset{(n-1)}{-z_\beta + z_\beta}, -z_\beta + z_{\alpha_i})$. Предположим, что (8) верно для $n_i - 1$. Тогда

$$n_i z_{\alpha_i} = z_{\alpha_i} + (n_i - 1) z_{\alpha_i} = z_{\alpha_i} + f_{(n_i-1)}(\overset{((n_i-1)(n-2)+1)}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(n_i-1)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}}) =$$

$$= -z_\beta + z_{\alpha_i} + (n-2)(-z_\beta + z_\beta) + f_{(n_i-1)}(\overset{((n_i-1)(n-2)+1)}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(n_i-1)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}}) + z_\beta =$$

$$= f(-z_\beta + z_{\alpha_i}, \overset{(n-2)}{-z_\beta + z_\beta}, f(\overset{((n_i-1)(n-2)+1)}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(n_i-1)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}})) = f_{(n_i)}(\overset{(n_i(n-2)+1)}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(n_i)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}}).$$

Значит, (8) верно для любого натурального n_i.

Далее отметим, что $\overline{-z_\beta + z_{\alpha_i}} = (n-3)z_\beta - (n-2)z_{\alpha_i}$, так как

$$f(\overset{(n-1)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}}, (n-3)z_\beta - (n-2)z_{\alpha_i}) = (n-1)(-z_\beta + z_{\alpha_i}) + (n-3)z_\beta - (n-2)z_{\alpha_i} + z_\beta = -z_\beta + z_{\alpha_i}.$$

Тогда

$$-z_{\alpha_i} = (n-3)(-z_\beta + z_{\alpha_i}) + (n-3)z_\beta - (n-2)z_{\alpha_i} = f(\overset{(n-3)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}}, -z_\beta + z_\beta, \overline{-z_\beta + z_{\alpha_i}}, \overline{-z_\beta + z_\beta}).$$

Если $n_i < 0$ $(1 \le i \le k)$, то

$$n_i z_{\alpha_i} = (-n_i)(-z_{\alpha_i}) = f(\overset{(-n_i)}{-z_{\alpha_i}}, \overset{((-n_i-1)(n-3))}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(-n_i-1)}{\overline{-z_\beta + z_\beta}}) =$$

$$= f(\overset{(-n_i)}{f(\overset{(n-3)}{-z_\beta + z_{\alpha_i}}, -z_\beta + z_\beta, \overline{-z_\beta + z_{\alpha_i}}, \overline{-z_\beta + z_\beta})}, \overset{((-n_i-1)(n-3))}{-z_\beta + z_\beta}, \overset{(-n_i-1)}{\overline{-z_\beta + z_\beta}}).$$

Последнее равенство и (8) подставляем в (7), этим завершаем доказательство теоремы.

3. Строение свободных абелевых n-арных групп. Для определения свободной n-арной группы в некотором классе n-арных групп воспользуемся универсальным определением свободной алгебры из [8], стр. 34. Пусть К – класс n-арных групп. n-Арная группа $< F, f >$ из К называется свободной в классе К со свободным порождающим множеством X, если всякое отображение ψ_0 множества X в любую n-арную групу $< B, f >$ из класса К продолжается до гомоморфизма n-арных групп $\psi :< F, f > \to < B, f >$.

Рассмотрим множество C всех циклических групп. С помощью этого множества можно определить $\frac{n+1}{2}$, если n нечетно либо $\frac{n}{2}$, если n четно, класса абелевых полуциклических n-арных групп C_l при фиксированном l, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$. Каждый такой класс C_l строится следующим образом. Если $abl_{l_1 a}(a)$ – конечная абелева полуциклическая n-арная группа порядка k, то вычисляем НОД$(l_1, n-1, k) = l_2$ и строим $abl_{l_2 a}(a)$, причем $1 \le l_2 \le n-1$. Тогда $abl_{l_1 a}(a) \cong abl_{l_2 a}(a)$ (n-арные группы $abl_{l_1 a}(a)$ и $abl_{l_2 a}(a)$ порядка k изоморфны тогда и только тогда, когда НОД$(l_1, n-1, k) =$ НОД$(l_2, n-1, k)$ (лемма 1, [10])). Если $l_2 = n-1$, то $abl_{l_2 a}(a) \cong abl_0(a)$, где $abl_0(a)$ – производная n-арная группа от циклической группы (a) порядка k. Тогда $abl_{l_1 a}(a) \in C_0$. Если $l_2 < n-1$, то $1 \le l_2 \le [\frac{n-1}{2}]$. Тогда $abl_{l_1 a}(a) \in C_{l_2}$. Если $abl_{l_1 a}(a)$ – бесконечная абелева полуциклическая n-арная группа, то $abl_{l_1 a}(a) \cong abl_l(a)$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$ (любая бесконечная абелева полуциклическая n-арная группа изоморфна $abl_l(a)$, где $0 \le l \le \frac{n-1}{2}$ (теорема 3, [6])). Тогда $abl_{l_1 a}(a) \in C_l$. Таким образом, любая абелева полуциклическая n-арная группа лежит в одном из этих классов.

В каждом таком классе C_l свободными будут n-арные группы $abl_l Z$, где Z – аддитивная группа целых чисел, $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, и только они с точностью до изоморфизма (теорема 4, [12]). Поэтому можно сказать, что каждый класс C_l $(0 \le l \le [\frac{n-1}{2}])$ абелевых полуциклических n-арных групп имеет только одну (с точностью до изоморфизма) свободную n-арную группу $abl_l Z$.

Среди вышеуказанных классов C_l выделим C_1 – класс циклических n-арных групп, в котором свободными являются бесконечные циклические n-арные группы и только они (см., например, [11]), причем, все они изоморфны между собой (теорема 3.2, [1]). Поэтому класс циклических n-арных групп имеет только одну (с точностью до изоморфизма) свободную n-арную группу $abl_1 Z$.

Приступим к изучению свободных n-арных групп в классе абелевых n-арных групп. Мы будем рассматривать ниже прямые произведения двух n-арных групп: бесконечной циклической n-арной группы $abl_a(a)$ и производной n-арной группы $abl_0 \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ от свободной абелевой группы $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$. Именно так построенные n-арные группы вместе с бесконечной циклической n-арной группой исчерпывают с точностью до изоморфизма множество всех свободных n-арных групп в классе абелевых n-арных групп (теорема 3, [12]). Укажем другое доказательство этого факта.

Теорема 3. Бесконечная циклическая n-арная группа и прямые произведения бесконечной циклической n-арной группы с производной n-арной группой от свободной абелевой группы и только такие n-арные группы являются свободными в классе абелевых n-арных групп.

*Доказательство***.** Рассмотрим прямое произведение $abl_a(a)\times abl_0 \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ бесконечной циклической n-арной группы $abl_a(a)$ и производной n-арной группы $abl_0 \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ от свободной абелевой группы $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$. Набор индексов I может быть пустым. В этом случае рассматривается бесконечная циклическая n-арная группа $abl_a(a)$.

n-Арные группы $abl_a(a)\times abl_0 \sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ и $abl_a((a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha))$ изоморфны (лемма 1), причем $abl_a((a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha))$ определена на свободной абелевой группе $(a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ с порождающим множеством $Z=\{a\}\cup\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$. Тогда $abl_a((a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha))$ порождается множеством (согласно теореме 2) $X=\{0\}\cup\{-a+x_\alpha \mid \alpha\in I\}$.

Пусть $<B, f>$ – произвольная абелева n-арная группа и ψ_0 – отображение множества X в B. Полагаем $\psi_0(0)=b$ и $\psi_0(-a+x_\alpha)=y_\alpha$ для всех $\alpha\in I$. Пусть n-арная подгруппа $<G, f>$ порождается множеством $Y=\{b\}\cup\{y_\alpha \mid \alpha\in I\}$. На $<G, f>$ определим абелеву группу $red_b <G, f>$, порожденную (по теореме 1) множеством

$$U=\{f(\overset{(n)}{b})\}\cup\{f(\overset{(n-1)}{b}, y_\alpha) \mid \alpha\in I\}.$$

Заметим, что $<G, f> = abl_{f(\overset{(n)}{b})} red_b <G, f>$. Отображение $\sigma: Z\to U$, заданное по правилу $\sigma(a)=f(\overset{(n)}{b})$, $\sigma(x_\alpha)=f(\overset{(n-1)}{b}, y_\alpha)$ для $\alpha\in I$, продолжается до гомоморфизма ψ из свободной абелевой группы $(a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ в абелеву группу $red_b <G, f>$. Этот гомоморфизм действует по правилу

$$\psi(sa+\sum m_k x_{\alpha_k}) = sf(\overset{(n)}{b})+\sum m_k f(\overset{(n-1)}{b}, y_{\alpha_k}).$$

Покажем, что ψ является также гомоморфизмом из n-арной группы $abl_a((a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha))$ в n-арную группу $<G, f>$. Действительно, пусть $s_i a+\sum m_{k_i} x_{\alpha_{k_i}} \in (a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ для $i=1,\ldots,n$, тогда $\psi(f(s_1 a+\sum m_{k_1} x_{\alpha_{k_1}},\ldots, s_n a+\sum m_{k_n} x_{\alpha_{k_n}}))=$

$$=\psi((s_1+\ldots+s_n+1)a+\sum m_{k_1} x_{\alpha_{k_1}}+\ldots+\sum m_{k_n} x_{\alpha_{k_n}})=$$

$$=(s_1+\ldots+s_n+1)f(\overset{(n)}{b})+\sum m_{k_1} f(\overset{(n-1)}{b}, y_{\alpha_{k_1}})+\ldots+\sum m_{k_n} f(\overset{(n-1)}{b}, y_{\alpha_{k_n}})=$$

$$= s_1 f(\overset{(n)}{b}) + \sum m_{k_1} f(\overset{(n-1)}{b}, y_{\alpha_{k_1}}) + \ldots + s_n f(\overset{(n)}{b}) + \sum m_{k_n} f(\overset{(n-1)}{b}, y_{\alpha_{k_n}}) + f(\overset{(n)}{b}) =$$

$$= f(\psi(s_1 a + \sum m_{k_1} x_{\alpha_{k_1}}), \ldots, \psi(s_n a + \sum m_{k_n} x_{\alpha_{k_n}})).$$

Покажем теперь, что ψ является продолжением отображения $\psi_0 : X \to Y$. Действительно, $\psi(0) = b$, так как b является нулем группы $red_b < G, f >$. и

$$\psi(-a + x_\alpha) = -f(\overset{(n)}{b}) + f(\overset{(n-1)}{b}, y_\alpha) = f(\bar{b}, \overset{(n-3)}{b}, \bar{b}, f(\overset{(n-1)}{b}, y_\alpha)) = y_\alpha.$$

Итак, мы доказали, что $abl_a((a) + \sum_{\alpha \in I}(x_\alpha))$ является свободной абелевой n-арной группой, а значит, и прямое произведение $abl_a(a) \times abl_0 \sum_{\alpha \in I}(x_\alpha)$ (в силу их изоморфизма) будет свободной абелевой n-арной группой.

Пусть теперь $< F, f >$ – свободная абелева n-арная группа с порождающим множеством $W = \{c\} \cup \{w_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Вновь набор индексов I может быть пустым. Тогда существует гомоморфизм ψ из $< F, f >$ на n-арную группу $abl_a((a) + \sum_{\alpha \in I}(x_\alpha))$, который является продолжением отображения $c \to 0$, $w_\alpha \to -a + x_\alpha$, $\alpha \in I$. С другой стороны, по доказанному выше существует гомоморфизм τ из $abl_a((a) + \sum_{\alpha \in I}(x_\alpha))$ на $< F, f >$, который является продолжением отображения $0 \to c$, $-a + x_\alpha \to w_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Значит, отображение $\tau\psi$ оставляет на месте все элементы из W.

Покажем биективность ψ. Пусть $u, v \in F$ и $\psi(u) = \psi(v)$. Согласно леммы 2 найдутся неотрицательные целые числа $t_0, m_0, t_1, m_1, \ldots, t_k, m_k$ и $s_0, r_0, s_1, r_1, \ldots, s_l, r_l$, такие, что

$$u = f_{(q)}(\overset{(t_0)}{c}, \overset{(m_0)}{\bar{c}}, \overset{(t_1)}{w_{\alpha_1}}, \overset{(m_1)}{\bar{w}_{\alpha_1}}, \ldots, \overset{(t_k)}{w_{\alpha_k}}, \overset{(m_k)}{\bar{w}_{\alpha_k}}),\ v = f_{(q')}(\overset{(s_0)}{c}, \overset{(r_0)}{\bar{c}}, \overset{(s_1)}{w_{\alpha'_1}}, \overset{(r_1)}{\bar{w}_{\alpha'_1}}, \ldots, \overset{(s_l)}{w_{\alpha'_l}}, \overset{(r_l)}{\bar{w}_{\alpha'_l}}),$$

где $\sum_{i=0}^{k}(t_i + m_i) = q(n-1) + 1$, $\sum_{j=0}^{l}(s_j + r_j) = q'(n-1) + 1$ и $\alpha_i, \alpha'_j \in I$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$. Тогда

$$\tau(\psi(u)) = f_{(q)}(\overset{(t_0)}{\tau\psi(c)}, \overset{(m_0)}{\bar{\tau}\psi(c)}, \overset{(t_1)}{\tau\psi(w_{\alpha_1})}, \overset{(m_1)}{\bar{\tau}\psi(w_{\alpha_1})}, \ldots, \overset{(t_k)}{\tau\psi(w_{\alpha_k})}, \overset{(m_k)}{\bar{\tau}\psi(w_{\alpha_k})}) =$$

$$= f_{(q)}(\overset{(t_0)}{c}, \overset{(m_0)}{\bar{c}}, \overset{(t_1)}{w_{\alpha_1}}, \overset{(m_1)}{\bar{w}_{\alpha_1}}, \ldots, \overset{(t_k)}{w_{\alpha_k}}, \overset{(m_k)}{\bar{w}_{\alpha_k}}) = u.$$

Аналогично $\tau(\psi(v)) = v$. В силу однозначности τ имеем $u = v$. Инъективность ψ доказана. Покажем сюръективность ψ. Пусть $g \in (a) + \sum_{\alpha \in I}(x_\alpha)$. Вновь согласно леммы 2 найдутся неотрицательные целые числа $t_0, m_0, t_1, m_1, \ldots, t_k, m_k$, такие, что

$$g = f_{(q)}(\overset{(t_0)}{0}, \overset{(m_0)}{\bar{0}}, \overset{(t_1)}{-a + x_{\alpha_1}}, \overline{\overset{(m_1)}{-a + x_{\alpha_1}}}, \ldots, \overset{(t_k)}{-a + x_{\alpha_k}}, \overline{\overset{(m_k)}{-a + x_{\alpha_k}}}),$$

где $\alpha_i \in I$, $i = 1, \ldots, k$ и $\sum_{i=0}^{k}(t_i + m_i) = q(n-1) + 1$. Тогда для

$$u = f_{(q)}(\overset{(t_0)}{c}, \overset{(m_0)}{\bar{c}}, \overset{(t_1)}{w_{\alpha_1}}, \overset{(m_1)}{\bar{w}_{\alpha_1}}, \ldots, \overset{(t_k)}{w_{\alpha_k}}, \overset{(m_k)}{\bar{w}_{\alpha_k}}) =$$

имеем

$$\psi(u) = f_{(q)}(\overset{(t_0)}{\psi(c)}, \overline{\overset{(m_0)}{\psi(c)}}, \overset{(t_1)}{\psi(w_{\alpha_1})}, \overline{\overset{(m_1)}{\psi(w_{\alpha_1})}}, \ldots, \overset{(t_k)}{\psi(w_{\alpha_k})}, \overline{\overset{(m_k)}{\psi(w_{\alpha_k})}}) = g.$$

Сюръективность ψ доказана. Значит, ψ – биекция. Теорема доказана.

Следствие 2. Любая свободная абелева n-арная группа с конечным порождающим множеством X изоморфна прямому произведению бесконечной циклической n-арной группы и $|X| - 1$ производных n-арных групп от бесконечных циклических групп.

*Доказательство***.** Пусть имеем свободную абелеву n-арную группу $< F, f >$ с порождающим множеством $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. По теореме 3 она изоморфна прямому произведению $abl_a(a) \times abl_0 \sum_{i=1}^{k-1}(x_i)$ одной бесконечной циклической n-арной группы $abl_a(a)$ и производной n-арной группы $abl_0 \sum_{i=1}^{k-1}(x_i)$ от свободной абелевой группы $\sum_{i=1}^{k-1}(x_i)$. По лемме 1

$abl_0\sum_{i=1}^{k-1}(x_i)$ изоморфна прямому произведению $\prod_{i=1}^{k-1}abl_0(x_i)$, где $abl_0(x_i)$ – производная n-арная группа от бесконечной циклической группы (x_i). Значит, $<F, f>$ изоморфна прямому произведению $abl_a(a)\times\prod_{i=1}^{k-1}abl_0(x_i)$. Следствие доказано.

4. Подгруппы свободных абелевых n-арных групп. В [11] показано, что любая n-арная подгруппа свободной n-арной группы свободна либо изоморфна n-арной группе $<B, f>$, где $B=k+(n-1)Z$ для фиксированного целого числа k с условием $0\le k<n-1$ и НОД$(k,n-1)=1$, причем n-арная операция f действует по правилу $f(k+(n-1)z_1,\ldots,k+(n-1)z_n)=k+(n-1)(z_1+\ldots+z_n+k)$. Аналогичный результат верен и в классе абелевых n-арных групп.

Теорема 4. Всякая n-арная подгруппа свободной абелевой n-арной группы является свободной или изоморфна бесконечной абелевой полуциклической n-арной группе $abl_{la}(a)$, где $2\le l\le[\frac{n-1}{2}]$ и НОД$(l,n-1)=1$.

*Доказательство***.** Пусть $abl_a((a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha))$ – свободная абелева n-арная группа с порождающим множеством $X=\{0\}\cup\{-a+x_\alpha\mid\alpha\in I\}$, где $Z=\{a\}\cup\{x_\alpha\mid\alpha\in I\}$ – порождающее множество свободной абелевой группы $(a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ (см. доказательство теоремы 3) и $<B, f>$ – n-арная подгруппа в $abl_a((a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha))$. Известно (см., например, [14]), что $<B, f>$ является смежным классом по некоторой подгруппе A группы $(a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$, причем A будет свободной группой. Пусть $B=b+A$, где $b=m_0a+m_1x_{\alpha_1}+\ldots+m_kx_{\alpha_k}$.

Покажем, что $(n-1)b+a\in A$. Действительно, с одной стороны, $f(\overset{(n)}{b})\in B=b+A$, с другой стороны, $f(\overset{(n)}{b})=b+(n-1)b+a$, значит, $(n-1)b+a\in A$.

Если свободная абелева группа A порождается одним элементом g, то $(n-1)b+a=l'g$ для некоторого целого числа l' и $A=(g)$ – бесконечная циклическая группа. Отметим, что НОД$(l',n-1)=1$. Действительно, если НОД$(l',n-1)=d$, $(n-1)=dt$, $l'=dq$ для некоторых целых чисел t, q и $g=m'_0a+m'_1x_{\alpha'_1}+\ldots+m'_rx_{\alpha'_r}$, то

$$0=a+(n-1)b-l'g=a+(n-1)(m_0a+m_1x_{\alpha_1}+\ldots+m_kx_{\alpha_k})-l'(m'_0a+m'_1x_{\alpha'_1}+\ldots+m'_rx_{\alpha'_r})=$$
$$=((n-1)m_0-l'm'_0+1)a+m_1x_{\alpha_1}+\ldots+m_kx_{\alpha_k}-m'_1x_{\alpha'_1}-\ldots-m'_rx_{\alpha'_r}.$$

В силу линейной независимости элемента a и порождающих элементов из Z, входящих в разложения b и g, имеем $(n-1)m_0-l'm'_0+1=0$. Тогда $d(qm'_0-tm_0)=1$, откуда $d=1$.

На A строим абелеву полуциклическую n-арную группу $abl_{l'g}(g)$. Покажем изоморфизм n-арных групп $<B, f>$ и $abl_{l'g}(g)$. Задаем отображение $\tau:A\to B$ по правилу $\tau(sg)=b+sg$. Если $s_1g,\ldots,s_ng\in A$, то

$$\tau(f(s_1g,\ldots,s_ng))=\tau((s_1+\ldots+s_n+l')g)=b+(s_1+\ldots+s_n+l')g=$$
$$=b+s_1g+\ldots+s_ng+(n-1)b+a=(b+s_1g)+\ldots+(b+s_ng)+a=f(\tau(s_1g),\ldots,\tau(s_ng)).$$

Значит, τ – изоморфизм n-арных групп $<B, f>$ и $abl_{l'g}(g)$.

Если $l'\equiv1\pmod{n-1}$ или $l'\equiv-1\pmod{n-1}$, то $abl_{l'g}(g)$ будет циклической n-арной группой (предложение 8, [7]), а значит, $<B, f>$ – свободная абелева n-арная группа (см. теорему 3). В другом случае n-арная группа $abl_{l'g}(g)$ изоморфна бесконечной абелевой полуциклической n-арной группе $abl_{la}(a)$, где $0\le l\le[\frac{n-1}{2}]$ (теорема 3, [7]). Но НОД$(l',n-1)=1$ и $l'\equiv l\pmod{n-1}$ либо $l'\equiv-l\pmod{n-1}$ (предложение 7, [7]), значит $2\le l\le[\frac{n-1}{2}]$ и НОД$(l,n-1)=1$.

Пусть свободная абелева группа A порождается больше, чем одним элементом. Покажем, что, заменив элемент a базы Z группы $(a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$ на элемент $(n-1)b+a$, мы получим вновь базу этой же группы. Для этого покажем, что любая совокупность элементов из множества $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ вместе с элементом $(n-1)b+a$ является линейно независимой. Выбираем $x_{\alpha_{j_1}},\dots,x_{\alpha_{j_s}}$ из $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Среди этих выбранных элементов могут быть элементы из разложения b (см. выше). Пусть это будут $x_{\alpha_{j_1}},\dots,x_{\alpha_{j_l}}$, где $l \le s$. Пусть для некоторых целых чисел $r_1,\dots,r_s,t$ верно равенство

$$r_1x_{\alpha_{j_1}}+\dots+r_lx_{\alpha_{j_l}}+r_{l+1}x_{\alpha_{j_{l+1}}}+\dots+r_sx_{\alpha_{j_s}}+t((n-1)b+a)=0.$$

Тогда с учетом разложения элемента b имеем

$$(t(n-1)m_{j_1}+r_1)x_{\alpha_{j_1}}+\dots+(t(n-1)m_{j_l}+r_l)x_{\alpha_{j_l}}+r_{l+1}x_{\alpha_{j_{l+1}}}+\dots+r_sx_{\alpha_{j_s}}+t(m_0(n-1)+1)a=0.$$

В силу линейной независимости элементов $x_{\alpha_{j_1}},\dots,x_{\alpha_{j_l}},x_{\alpha_{j_{l+1}}},\dots,x_{\alpha_{j_s}},a$ имеем систему

$$t(n-1)m_{j_1}+r_1=0,\dots,t(n-1)m_{j_l}+r_l=0, r_{l+1}=0,\dots,r_s=0, t(m_0(n-1)+1)=0.$$

Так как $n\ge 3$, то $m_0(n-1)+1\ne 0$ (m_0 – целое число), тогда $t=0$, откуда имеем $r_1=0,\dots,r_l=0$, т.е. система элементов $x_{\alpha_{j_1}},\dots,x_{\alpha_{j_s}},(n-1)b+a$ линейно независима. Значит, множество $Q=\{(n-1)b+a\}\cup\{x_\alpha \mid \alpha\in I\}$ будет базой группы $(a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$.

Так как элемент $(n-1)b+a$ входит в базу свободной абелевой группы $(a)+\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha)$, то в свободной подгруппе A этой группы выберем базу, содержащую элемент $(n-1)b+a$. Пусть этой базой будет множество $W=\{(n-1)b+a\}\cup\{w_\beta \mid \beta\in J\}$. Тогда подгруппа A раскладывается в прямую сумму циклических групп: $A=((n-1)b+a)+\sum_{\beta\in J}(w_\beta)$. На группе A строим абелеву n-арную группу $abl_{(n-1)b+a}A$, которая будет свободной в классе абелевых n-арных групп (см. теорему 3). Осталось показать изоморфизм n-арных групп $<B,f>$ и $abl_{(n-1)b+a}A$. Задаем отображение $\tau: A\to B$ по правилу $\tau(g)=b+g$. Если $g_1,\dots,g_n\in A$, то

$$\tau(f(g_1^n))=\tau(g_1+\dots+g_n+(n-1)b+a)=b+g_1+\dots+g_n+(n-1)b+a=$$
$$=(b+g_1)+\dots+(b+g_n)+a=f(\tau(g_1),\dots,\tau(g_n)).$$

Значит, τ – изоморфизм n-арных групп $<B,f>$ и $abl_{(n-1)b+a}A$. Тогда $<B,f>$ – свободная абелева n-арная группа. Теорема доказана.

Аналог следствия на стр. 79 из [15] имеется и в классе абелевых n-арных групп, т.е. верно

Следствие 3. Если $n=3,4,5,7$, то каждая n-арная подгруппа свободной абелевой n-арной группы является свободной.

Доказательство. При $n=3,4,5,7$ не существует натурального числа l с условиями $2\le l\le[\frac{n-1}{2}]$ и НОД$(l,n-1)=1$. Следствие доказано.

Литература

1. Русаков, С.А. Алгебраические $n-$арные системы / С.А. Русаков – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 120 с.
2. Гальмак, А.М. n-арные группы. Ч. I. / А.М. Гальмак – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. –196 с.
3. Гальмак, А.М. n-арные группы. Ч. 2. / А.М. Гальмак – Минск : Издательский центр БГУ, 2007. – 324 с.
4. Курош, А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969–1970 уч. года / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1974. – 160 с.
5. Gleichgewicht, B. Remarks on n-groups as abstract algebras / B. Gleichgewicht, K. Glasek // Coll. Math. – 17 (1967).– P. 209–219.
6. Timm, J. Kommutative n-Gruppen. Diss / J. Timm. – Hamburg, 1967.
7. Щучкин, Н.А. Полуциклические n-арные группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – 3 (54). – С. 186–194.
8. Смирнов, Д.М. Многообразия алгебр / Д.М. Смирнов. – Новосибирск : ВО Наука, 1992. – 205 с.

9. Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск : Беларуская навука, 1999. – 182 с.

10. Glazek, K. On evaluation of some polyadic groups / K. Glazek, J. Michalski and I. Sierocki A. // Variag Holder-Pichier-Tempsky. – Wiena, 1985. – P. 159–171.

11. Свободные n-группы / В.А. Артамонов // Математические заметки. – Т. 8. – 4 (1970). – С. 499–507.

12. Кусов, В.М. Свободные абелевы полуциклические n-арные группы / В.М. Кусов, Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – Тула, 2011. – Т. XII. – Выпуск 2 (38). – С. 68–76.

13. Щучкин, Н.А. Свободные абелевы n-арные группы / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – Тула, 2011. – Т. XII. – Выпуск 2 (38). – С. 163–170.

14. Щучкин, Н.А. Взаимосвязь $n-$ групп и групп / Н.А. Щучкин – Чебышевский сборник. – Тула, 2003, – Т. IV. – Выпуск 1 (5), – С. 125–141.

15. Артамонов, В.А. Подгруппы свободных групп и свободных произведений групп в некоторых классах обобщенных групп : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.06. / В.А. Артамонов.– М., 1970. – 168 л.

Волгоградский государственный
социально-педагогический университет

Поступила в редакцию 29.04.2013