Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №2(71), 2012

УДК 37.016:510.82

Функции и структура задач при локальном обращении аксиоматических теорий

В.Г. Ермаков

На примере решения одной из частных методических проблем обучения математике продемонстрированы возможности локальной многоаспектной оптимизации управления образовательными процессами как порождающего элемента новых педагогических технологий. Ввиду растущей дискретности информационного пространства культуры рассмотренная методическая проблема является типичной для любых учебных предметов и для всех ступеней образования.
Ключевые слова: математическое образование, методические проблемы обучения, функции задач, многоаспектная оптимизация управления, инновационные педагогические технологии.

The example of one of the particular methodical problems of mathematical education demonstrates the possibilities of local multifaceted optimization of management of educational processes being as a generative element of new pedagogical methods. Due to growing discontinuity of information area of culture the methodical problem examined is typical for any discipline as well as for every level of education.
Keywords: mathematical education, methodical problems of teaching, functions of tasks, multifaceted optimization of management, innovative pedagogical methods.

В настоящее время рассмотрение частных проблем обучения математике значительно усложнилось из-за того, что эти проблемы тесно переплелись с глобальными противоречиями стремительно меняющего мира и нерешенными методологическими проблемами современного образования и педагогики. Но в этой взаимосвязи есть и позитивные моменты: с одной стороны, анализ глобальных проблем и противоречий помогает уточнить стратегию решения частных проблем, с другой стороны, совершенствование специальных методов обучения облегчает разрешение методологических проблем образования. Так, в цикле статей [1]–[4] показано, что прежний методологический фундамент функциональной и экономической эффективности образования перестал отвечать новым задачам и новым социально-культурным условиям образования. Показано также, что в наиболее концентрированном виде это несоответствие проявляется в резко обострившейся методологической проблеме согласования многоаспектности образовательных процессов с простотой традиционных теоретических моделей, используемых для описания этих процессов. Говоря иначе, главный внутренний источник разнообразных кризисных явлений в современной системе образования состоит в том, что оказался нарушенным принцип минимальной достаточности А. Эйнштейна, согласно которому «все должно быть сделано настолько просто, насколько это возможно, но не проще». В связи с этим общим выводом возникает трудный вопрос о том, как и насколько необходимо усложнить используемые модели управления образовательными процессами для того, чтобы восстановить динамическую сопряженность образования кардинально меняющемуся миру.

Хорошую возможность приблизиться к ответу на этот вопрос дает подход, последовательно разрабатываемый в асимптотологии [5]. Его отличительная особенность состоит в том, что более точные теоретические модели умеренной сложности строятся за счет сужения области их применения. Основой для построения таких моделей служат резкие, отчетливо различимые несоразмерности, позволяющие использовать несколько простых описаний с последующим их наложением (суммированием). В учебно-воспитательном процессе большое число несоразмерностей порождается глубокой неоднородностью информационного пространства культуры, неравномерным, скачкообразным характером развития человеческой психики и другими столь же весомыми причинами. Как показано в работе [6], для использования открывающихся возможностей, в том числе и в разрешении методологических проблем развивающегося образования, в педагогике целесообразно приступить к разработке специфической теории «краевых задач», позволяющей осуществлять корректную локализацию узловых проблемных «точек» современной педагогической практики. При движении в данном направлении ключом к построению новых технологий обучения может стать название книги С. Лемма «Сумма технологий». Подразумевается гибкое построение искомых образовательных технологий в виде суммы частных инновационных методик обучения, локализованных по месту и времени применения. Так как силовое поле глобальных противоречий оставляет для решения локальных проблем узкий коридор возможностей, многие шаги на пути к новым технологиям оказываются вынужденными, а неопределенность при их построении незначительной. Эти аспекты современных педагогических инноваций хорошо видны на примере математического образования.

Кризис современного математического образования многолик и набирает силу. Например, в заключении XXI конференции канадских исследователей в области методики преподавания математики сказано: «Все участники обсуждения были едины во мнении, что в настоящее время мировая система математического образования переживает очередной кризис... Отдельные группы энтузиастов еще как-то пытаются изменить практику обучения математике, реформируя содержание и методы преподавания. Но в общей массе учителя остаются инертными, растерявшись перед размахом проблем, с которыми встречаются в повседневной практике» [7].

Если оценивать ситуацию исходя из общих соображений, то для такой растерянности, проявляющейся в массовом порядке, видимых оснований нет. Как известно, история алгебраических уравнений насчитывает 40 столетий, за это время в математике накоплен гигантский объем знаний, но к нему система образования давно приспособилась, а наличие столь мощного стабилизатора, в свою очередь, делает маловероятным наступление какого-либо переломного момента. Отсюда следует, что у отмечаемого многими педагогами обострения кризисных явлений в математическом образовании должны быть особенно веские причины. Учитывая, что росту объема знаний, ускорившемуся в XIX и XX столетиях из-за экстенсивного развития математики, найдено некоторое «противоядие» в виде все более узкой специализации в науке и в образовании, главную из этих причин стоит искать в изменении качества математического знания.

Эти изменения значительны. Они вызваны, в частности, тем, что для объединения и сжатия растущего объема сведений приходится вводить понятия все более высокого уровня абстракции. Вследствие этого появились понятия, которые, по выражению П.С. Александрова, «являются такими математическими абстракциями, которые не налагаются на объективную действительность, а суть лишь абстракции от абстракций, так сказать абстракции второй ступени» [8, с. 63]. В большом числе они возникают при использовании аксиоматического метода. Показательны в этом отношении перемены в изложении симплектической геометрии, которая явилась итогом длительного развития механики, вариационного исчисления и т. д. По словам В.И. Арнольда, «в прошлом веке эту область геометрии называли аналитической динамикой, и Лагранж гордился, что изгнал из нее чертежи. Чтобы проникнуть в симплектическую геометрию, минуя длинный исторический путь, проще всего воспользоваться аксиоматическим методом, имеющим, как заметил Б. Рассел, много преимуществ, подобных преимуществам воровства перед честным трудом. Сущность этого метода состоит в том, чтобы превращать теоремы в определения. Содержательная часть теоремы становится тогда мотивировкой определения» [9, с. 70].

Такое введение понятий отсекает длинный исторический путь развития больших областей математики и создает непреодолимые препятствия на пути индивида к отдельным математическим достижениям, в результате чего при первой встрече с «абстракциями второй ступени» он зачастую не может опереться ни на свой донаучный опыт, ни на опыт, обретенный в процессе обучения. Эти сингулярности в строении математического знания становятся точками ветвления индивидуальных образовательных траекторий и делают учебный процесс крайне неустойчивым. Тонкость ситуации в том, что для противодействия этим обстоятельствам учебного процесса накопленный ранее опыт обучения математике недостаточен, нужны специальные меры. Вместе с тем, при столь явных причинах обострения учебной ситуации эти меры можно разрабатывать не вслепую, не наугад, а целенаправленно и конструктивно. Некоторые аспекты их построения обсудим на примере преподавания общей топологии.

Стоит отметить, что проблемы обучения, порождаемые «абстракциями второй ступени», на самом деле не уникальны, а скорее типичны. Наблюдаемая ныне утрата связей между фактами в учебном материале, сокращение объема мотивировок и обоснований создают учащемуся массу таких же тупиковых ситуаций, которые чреваты формированием у него интеллектуальной пассивности или даже «выученной беспомощности». Кроме того, при общем удлинении индивидуальных образовательных траекторий случайные сбои, суммируясь, приводят к значительному разбросу в уровне подготовки учащихся в рамках одной учебной группы и актуализируют задачу выравнивания ее состава. Если не прибегать к значительному отсеву учащихся, с помощью которого решить накопившиеся социальные и общекультурные проблемы уже нельзя, то выравнивание оказывается равносильным отысканию способов быстрого и эффективного устранения разрывов в предшествующей подготовке учащегося. Такого рода проблемы часто возникают при переходе учащихся на следующую ступень образования, так как в эти моменты на первый план выходит обостряющееся противоречие между личностью и культурой, между личностью и обществом. Поэтому специфические проблемы обучения в окрестности особых точек учебного материала являются модельными для широкого круга других проблем современного образования.

Общую топологию традиционно излагают аксиоматическим методом. В некоторых учебных пособиях изложение данного раздела математики сразу начинается с определений топологического пространства и топологии, но так как понятие топологии является «абстракцией второй ступени», то для многих студентов такое начало становится одновременно концом успешного продвижения по материалу. Для предотвращения сбоев в этом месте есть простой способ: предварить введение аксиом топологического пространства фрагментом теории метрических пространств. Но и понятие метрики на произвольном множестве нельзя отнести к числу простейших. Условия, задающие эту абстракцию, были введены М. Фреше в начале XX столетия в его докторской диссертации как часть ответа на трудный вопрос о том, на каких классах множеств можно получить искомое обобщение теорем о непрерывных функциях [8, с. 224]. Косвенную оценку нетривиальности этого и других понятий, введенных М. Фреше, дал Адамар, который в докладе Парижской академии наук в 1934 г. говорил, что «отвага, проявленная Фреше при создании функционального анализа, взлет его абстрагирующей мысли при этом были беспрецедентными со времени работ Э. Галуа» [10, с. 205]. Поэтому вполне возможна и зачастую реально складывается ситуация, когда нужно специальным образом подводить студентов и к понятию метрики.

Активное педагогическое вмешательство в процесс изучения студентами этого дополнительного материала требуется не только из-за возможных затруднений у части студентов, но и ради основной цели – обеспечения качественной пропедевтики понятия топологии. Дело в том, что если ориентироваться на содержание понятий, то понятия топологии и метрики не связаны друг с другом: в первом случае соответствующая совокупность признаков касается системы подмножеств исходного множества, во втором случае – свойств некоторой числовой функции. Поэтому при их поверхностном изучении фрагментарность складывающихся у студентов представлений может усилиться и корректирующего эффекта не получится. Но с точки зрения объема эти понятия очень близки – в каждом метрическом пространстве обычно предполагается заданной и топология, порожденная метрикой. Следовательно, при глубоком и неформальном изучении теории нарастающую дискретность учебного материала преодолеть несложно, проблемой остается лишь фактор времени.

Жесткий дефицит времени является главной причиной, вынуждающей разрабатывать особые методы обучения. Вполне определенную направленность их поиску придает тот факт, что корректирующие мероприятия придется проводить за счет ресурса времени последующих этапов обучения, поэтому они должны обеспечивать компенсацию потерь, то есть должны порождать значительные позитивные последействия. Для получения такого рода эффектов есть две принципиальные возможности.

Первая из них основана на использовании резервов текущего контроля [11]. Например, для пропедевтики понятия топологии можно выбрать небольшое число опорных фактов, но при этом существенно повысить требования к качеству их освоения каждым студентом. Плотный контроль в той или иной форме за выполнением этого требования поможет студентам выйти на новый уровень обобщений и представлений с высокой степенью надежности, а устранение препятствия, «останавливавшего мысль», откроет саму возможность осмысленного изучения остального материала. Кроме того, установка на освоение каждым студентом выделенной части материала на высоком уровне качества мобилизует педагога на исследование и учет конкретных обстоятельств учебного процесса, даст импульс поэтапному формированию «портфеля достижений» студента – с прицелом на формирование у него положительной Я-концепции, рефлексивной культуры, способности к адекватной самооценке собственных достижений и т. п.

Вторая возможность основана на стимулировании самодеятельности студентов, которая, как писал А. Дистервег, есть «средство и одновременно результат образования». При таком подходе существенно возрастает роль задач. Яркий пример их широкомасштабного применения для изложения большого и теоретически нагруженного раздела математики дает книга П. Халмоша «Гильбертово пространство в задачах» (М. : Мир, 1970). Общая топология таким же способом представлена в книге А.В. Архангельского и В.И. Пономарева «Основы общей топологии в задачах и упражнениях» (М. : Наука, 1974). Главная цель этих книг состоит в том, чтобы ввести читателя в круг современных проблем и достижений в соответствующих областях математики, поэтому они рассчитаны на достаточно высокую мотивацию и подготовку читателей. Но для проведения корректирующих мероприятий в кризисных ситуациях и в условиях массового образования задачи нужно подбирать и использовать с большей детализацией. Образец такого рода дает пособие В.А. Скворцова «Примеры метрических пространств» (М. : МЦНМО, 2002). В нем показано, что существует много разных способов определить расстояние в разных множествах и что многие метрические пространства разительно отличаются от привычной евклидовой плоскости. Вместе с тем, это пособие, подготавливая школьников к первой встрече с новым разделом математики, не обеспечивает необходимой пропедевтики понятия топологии.

Эти достижения наглядно демонстрируют глубину рассматриваемого противоречия: для студентов со слабой подготовкой, которые нуждаются в корректирующих мероприятиях в наибольшей степени, соответствующая пропедевтическая программа должна быть гораздо полнее, чем в упомянутых случаях, а время на ее проведение, как правило, не зарезервировано вовсе. Разрешить эту ситуацию на основе традиционных моделей управления нельзя. Они, как и породившая их система Я.А. Коменского, опираются на однородность класса по составу учащихся, предполагают равномерное изучение хорошо упорядоченного материала, а в данном случае эти условия невыполнимы. Поэтому, отступая от традиции в ее основном пункте, в новых моделях управления учебным процессом следует допустить более значительные перерывы постепенности, чем раньше.

В этом плане заслуживает внимания опыт мореплавателей. Их кодекс поведения, выработанный в течение длительного времени, предписывает в кризисной для индивида ситуации идти к нему на помощь с полной мобилизацией всех сил и средств. Характерно разделение этой помощи во времени на две фазы – с максимально высокой и с затухающей активностью. Первую открывает команда: «Стоп машина, шлюпки на воду – человек за бортом», на втором этапе помощь, если она еще нужна, оказывают уже в процессе движения судна по своему маршруту. Действуя аналогично, в помощь студентам нужно готовить специальные блоки задач и упражнений под каждую особую точку в материале, рассчитывая применять эти своеобразные «спасательные шлюпки» лишь тогда и в той мере, когда и в какой мере это действительно необходимо. Такая реализация принципа минимальной достаточности равносильна переходу на нелинейные модели управления, что само по себе расширяет простор для поиска решения.

В нейтрализации негативных последствий применения аксиоматического метода отчасти помогает и сам аксиоматический метод. По словам Н. Бурбаки, он «позволяет, когда дело касается сложных математических объектов, расчленить их свойства и перегруппировать эти свойства вокруг немногих понятий» [12, с. 25]. Поскольку, как было показано, в этих понятиях сосредотачиваются основные трудности для тех, кто осваивает данную теорию впервые, искомый сборник задач, ориентированный на проведение учащихся по сложному участку учебной траектории, может состоять из немногих блоков, ядрами которых станут названные понятия вместе с сетью связанных с ними свойств.

По отношению к курсу общей топологии цели и структура первого блока очевидны. Сначала нужно показать, что отказ от фиксации способа задания метрики ведет к существенному расширению числа метрических пространств. Для этого обычно используют примеры дискретной метрики на произвольном множестве, метрик на шахматной доске, порождаемых ходами некоторых фигур, метрики в пространстве сообщений и т. п., но этого мало. Чтобы не допустить поспешного вывода студентов о бесполезности этого раздела математики, примеров должно быть больше и среди них должны быть пространства, важные для математики и ее приложений.

При быстром расширении множества рассматриваемых объектов и вызванной им ломке стереотипов единственной опорой студентов на некоторое время останутся аксиомы метрики, поэтому корректность работы с ними нужно контролировать особенно строго. Серия различных примеров задания метрики на множестве действительных чисел поможет легко выявить и устранить все возможные недочеты такого рода. В первый блок заданий необходимо также включить исследование разных метрик на множестве упорядоченных наборов из n действительных чисел, которые свяжут этот материал с курсом математического анализа, и метрик на некоторых множествах последовательностей и функций. Последние в полной мере понадобятся позже – при изучении функционального анализа, но технических трудностей они почти не добавляют, а статус всего материала с их помощью легко повысить простым упоминанием того, в каких областях математики и физики они используются.

По мере усложнения примеров студентам придется чаще обращаться к разным учебникам и справочным пособиям в поиске доказательства справедливости отдельных аксиом, благодаря чему роль понятия метрического пространства в математике и труд, который за всем этим стоит, прояснятся достаточно хорошо. В результате этого будет предотвращена главная опасность применения аксиоматического метода, первопричина которой хорошо описана в первом трактате Н. Бурбаки. Считая аксиоматический метод искусством составлять тексты, формализация которых легко достижима, авторы отмечают, что «и при записи, и при чтении формализованного текста совершенно несущественно, приписывается ли словам и знакам этого текста то или иное значение или даже не приписывается никакого, – важно лишь точное соблюдение правил синтаксиса». Первый блок заданий не оставит студентам возможности считать понятие метрического пространства такой предельно «тощей» абстракцией.

Второй блок заданий в противовес первому должен быть ориентирован на хотя бы частичное упорядочение обширного семейства метрических пространств. Понятие подпространства подчеркнет связь между исходной и индуцированной метриками; параметризованные семейства метрик на одном и том же множестве подведут к понятию шкалы метрических пространств; нормированные пространства продемонстрируют наличие особых классов таких пространств и т. д.

С этой позиции сразу выйти на понятие топологии все еще трудно, поэтому необходим третий вспомогательный блок, в котором активность решения задач будет поддерживаться лишь ресурсом привлекательности самих задач. Здесь могут быть сосредоточены задачи о простейших геометрических фигурах, определяемых с помощью метрики, – о сферах, открытых и замкнутых шарах, отрезках. В разных учебных пособиях задач на эту тему очень много, организовать их решение в духе отвлеченных (детских) забав несложно. Неожиданными для части студентов покажутся вопросы: а) может ли в некотором метрическом пространстве шар радиуса 3 содержаться в шаре радиуса 2 и не совпадать с ним; б) почему эта ситуация невозможна в нормированном пространстве и т. п. Однако для дальнейших обобщений важнее всего те задачи о шарах, которые впоследствии будут использованы при описании открытых множеств в метрическом пространстве.

Четвертый блок задач и упражнений является центральным. В нем после рассмотрения понятия непрерывного отображения, доказательства критерия непрерывности отображения на языке открытых множеств, предварительного изучения свойств открытых множеств, ставших такими важными объектами математики, все будет готово к тому, чтобы представить эти наблюдения и открытия в сжатом виде в аксиомах топологии и дальше продолжать исследование, отталкиваясь от них.

Наряду с изложением этой стержневой пропедевтической линии здесь должен быть решен ряд других проблем коррекции, связанных с выявлением и исправлением ошибочных представлений о понятии функции, о кванторах и порядке следования кванторов, которые часто становятся источником трудностей в понимании непрерывности отображения, и т. д. При этом число заготовленных задач о непрерывности отображений в разных метрических пространствах должно быть большим. Их рассмотрение послужит укреплению междисциплинарных связей и создаст предпосылки для решающей ага-реакции студентов – в духе той, которую С. Банах в своем первом учебнике по функциональному анализу описал так: «Я просмотрел тысячу теорем и заметил, что это не тысяча теорем, а одна». В этом многообразии задач и упражнений особый акцент нужно сделать на примерах того, что в ряде случаев замена одной метрики на другую не ведет к изменению класса непрерывных отображений. Именно это вместе с критерием непрерывности и высветит особую роль открытых множеств.

Пропедевтика понятия топологии на этом заканчивается, но ее можно усилить блоком задач о топологии множеств в метрическом пространстве. Наблюдение о том, что при решении этих задач использовались только свойства открытых множеств, а не способ их определения при помощи метрики, сделает фиксацию этих свойств в качестве исходных положений теории вполне оправданной.

Если отвлечься от специфики курса топологии, то главной особенностью данного упорядочения задач и упражнений станет его подчинение нескольким дополняющим друг друга целевым установкам. Главная из них состоит в обеспечении пропедевтики сложного понятия. При высоком уровне подготовки студентов для достижения этой цели достаточно одного занятия и опоры на небольшое число специально отобранных заданий. В худших случаях, которые более вероятны, эту цепь заданий уже нельзя считать полноценной пропедевтической программой, ее можно рассматривать лишь как ориентировочную схему (лоцию) перехода к новому понятию. Из-за того, что в кризисных ситуациях на первый план часто выходят сопутствующие проблемы, основную цепь заданий приходится дополнять заданиями с иной направленностью. Используя в качестве объясняющей метафоры термины дифференциальной геометрии, можно сказать, что вспомогательные задания должны образовать трубчатую (трансверсальную) окрестность стержневой линии изложения и заблокировать негативное влияние побочных проблем на процесс формирования основного понятия. Функции вспомогательных заданий разнообразны. Среди них – подготовка фундамента для обобщений, выявление и разрушение ложных представлений и стереотипов, корректировка разнообразных технических навыков и самой учебной деятельности – вплоть до решения с помощью математики общепедагогических задач обучения, воспитания и развития.

В целом функции задач в обучении математике хорошо известны, детально исследованы и широко используются на практике. В дополнение к этому опыту локальное обращение аксиоматической теории, актуальность которого определяется растущей неоднородностью информационного пространства культуры, дает повод и критерии для новой интегрирующей компоновки задач в многоцелевой комплекс. Связующую роль в нем играет центральная пропедевтическая линия, она же позволяет развести во времени использование задач с разными функциями, разрешая тем самым структурные противоречия, возникающие при объединении разнородных элементов в единую систему. Опираясь на этот комплекс, можно аналогичным способом построить и многофункциональную систему контроля. Встроенный в данную конструкцию режим переключений по вспомогательным направлениям равносилен переходу на более сложные модели управления, а варьирование объема заданий и соответственно педагогических усилий, осуществляемое по этим направлениям на основе обратных связей, открывает возможность перехода от исчерпавших себя идеалов абсолютной устойчивости к так называемому динамическому типу устойчивости. В этом случае эффективность учебного процесса будет обеспечиваться уже не только за счет дальнейшего совершенствования технологий образования, а и благодаря адресным корректирующим усилиям педагога, направленным на противодействие растущему влиянию деструктивных факторов.

Значительный потенциал этого подхода в разрешении кризисных ситуаций подтверждается длительным опытом его применения на практике. В отношении проблемы выравнивания показателен следующий эпизод. Студент К. был отчислен за академическую неуспеваемость, восстановлен спустя несколько лет и попал в группу хорошо подготовленных студентов, которые в это время изучали курс функционального анализа на хорошем уровне и в быстром темпе. Поскольку К. долго не мог освоить простейшие факты теории метрических пространств, ему была предложена корректирующая цепь вопросов, направленная в сторону изученных ранее дисциплин. Такой крутой зигзаг индивидуальной учебной траектории, длившийся несколько месяцев по настоянию преподавателя и с помощью однокурсников, сначала привел к восстановлению и росту его собственной учебной активности, а затем и к содержательным результатам. На итоговом экзамене он без погрешностей доказал попавшуюся в билете теорему о замкнутости множества значений фредгольмовского оператора в банаховом пространстве, привел схемы доказательства всех вспомогательных теорем, решил предложенные задачи.

Вкрапления такого рода мероприятий в учебный процесс благотворно сказываются и на хороших студентах. Так, студентка М. оценила последствия локального, но интенсивного педагогического вмешательства в процесс адаптации первокурсников к обучению в вузе следующим образом: «Экзамен по математическому анализу в первую сессию был единственным, перед которым я совсем не волновалась, так как могла любую теорему доказать без подготовки». Для сравнения отметим, что Л.Д. Кудрявцев в книге «Мысли о современной математике и ее изучении» (М. : Наука, 1977) уже давно показал, что при появлении ресурсных ограничений, таких, например, как недостаточная мотивация студентов технического вуза к изучению математики, основным способом разрешения проблем является усложнение моделей управления учебным процессом.

Основные выводы. Объективные предпосылки к усилению кризисных явлений в области математического образования действительно существуют. В значительной мере они связаны с растущей неоднородностью математического знания. Но и резервы для улучшения ситуации велики. Для их использования принципиально необходимо разрабатывать методики проведения комплексных интенсивных корректирующих мероприятий. Эти мероприятия дают новый повод для объединения разнородных задач в многоцелевые комплексы и усиления роли задач в обучении математике. При таком подходе уровень сложности используемых моделей управления образовательными процессами повысится адресно и дозированно – в соответствии с принципом минимальной достаточности, сформулированным А. Эйнштейном.

Литература

1. Ермаков, В.Г. Философия и экономика развивающегося образования : концептуальный аспект исследования / В.Г. Ермаков // Вестник экономической интеграции. – 2010. – № 3. – С. 160–173.

2. Ермаков, В.Г. Развивающееся образование и философия / В.Г. Ермаков // Вестник экономической интеграции. – 2010. – № 4. – С. 174–184.

3. Ермаков, В.Г. Развивающееся образование и проблема многоаспектности образовательных процессов / В.Г. Ермаков // Вестник экономической интеграции. – 2010. – № 6. – С. 164–173.

4. Ермаков, В.Г. Методологическая основа функциональной и экономической эффективности образования / В.Г. Ермаков // Вестник экономической интеграции. – 2010. – № 7. – С. 194–210.

5. Андрианов, И.В. Асимптотическая математика и синергетика : путь к целостной простоте / И.В. Андрианов, Р.Г. Баранцев, Л.И. Маневич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 304 с.

6. Ермаков, В.Г. Социально-культурные и методологические аспекты развивающегося образования / В.Г. Ермаков, Н.Н. Нечаев // Вестник МГЛУ. Сер. Педагогические науки. – Вып. 562. – Сб. : «Психолого-педагогические проблемы развития образования». – М. : ИПК МГЛУ «Рема», 2009. – С. 46–65.

7. Математика и общество // Математика в школе. – 1999. – № 1. – С. 71.

8. Медведев, Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке / Ф.А. Медведев. – М. : Наука, 1965. – 232 с.

9. Арнольд, В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1990. – 128 с.

10. Медведев, Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв. / Ф.А. Медведев. – М. : Наука, 1976. – 232 с.

11. Ермаков, В.Г. Контроль в системе математического образования : проблемы и пути их разрешения / В.Г. Ермаков // Математика в высшем образовании. – 2009. – № 7. – С. 95–108.

12. Бурбаки, Н. Теория множеств / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1965. – 460 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 09.12.11