МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и контрольные задания по курсу
"Теория функций комплексного переменного"
для студентов 4 курса заочного факультета
специальности "Математика"

Гомель 1986

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом математического факультета Гомельского государственного университета

Составитель: А.Р.Миротин

ВВЕДЕНИЕ

Теория функций комплексной переменной (теория аналитических функций) в настоящее время - один из важнейших разделов математики. Ее идеи и методы проникли во все разделы анализа, а также дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), теория вероятностей, вычислительной математики и др. ТФКП широко используется в гидро- и аэродинамике, теории упругости, электротехнике и других разделах физики и техники. В связи с этим изучение ТФКП является необходимым элементом математического образования.

Начальные идеи ТФКП возникли в второй половине ХУШ века в основном в работах Леонарда Эйлера. Как самостоятельная дисциплина эта теория сформировалась в XIX веке благодаря трудам Огюстена Коши, Бернгарда Римана и Карла Вейерштрасса.

Университетский курс ТФКП - прямое продолжение курса математического анализа. Многие определения и теоремы ТФКП формально схожи с соответствующими предложениями матанализа, изучавшимися на младших курсах. В связи с этим стоит отметить, что в ряде случаев за ними скрыто совершенно иное содержание (ср., например, определение производной и геометрический смысл производной для функций комплексного и вещественного переменных). Кроме того, органической частью ТФКП является изучение многозначных функций, проистекающие из самой природы предмета (см. определение функции $Arg\, z$).

Процесс изучения ТФКП (как и других математических дисциплин) на заочном факультете состоит из следующих этапов:

1) самостоятельная работа над учебниками и учебными пособиями;
2) посещение и проработка установочных и обзорных лекций;
3) работа на практических занятиях;
4) выполнение контрольной работы;
5) сдача зачетов и экзаменов.

С целью облегчения усвоения материала и подготовки к экзамену в этом пособии приводится програма по ТФКП, причем каждый вопрос снабжен ссылкой на наиболее доступные для студента-заочника учебники.

Изучение математики (в этом числе и ТФКП) невозможно без решения задач. Рекомендуется решать задачи из соответствующих задачников [6] и [7] (см. список литературы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: 1977.
2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: 1966.
3. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М. : 1973.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – М.: 1967. – Т. 1,2.
5. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного. – М.: 1965.
6. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: 1972.
7. Волковыский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: 1975.

Дополнительная литература

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: 1972.
2. Гончаров В.Л. Теория функций комплексного переменного. – М.: 1955.
3. Гурвич А., Курант Р. Теория функций. – М.: 1968.
4. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. – М.: 1963.
5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: 1974.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: 1974. – Т.3. – Ч. 2.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: 1969, 1976. – Ч.1.

ПРОГРАММА

1. Понятие аналитической функции действительной переменной. Переход к комплексной переменной. Предмет теории аналитических функций и роль этой теории в математике и ее приложениях.	[2] Введение
2. Комплексные числа и их геометрическое представление на плоскости и на сфере. Бесконечно удаленная точка. Теория пределов и геометрия комплексной плоскости.	[1] Гл. I, § 1,2, 3,4.
3. Функции комплексной переменной. Непрерывность, равномерная непрерывность.	[1] . Гл. П, §1; [2] . Гл.П, § 1-4.
4. Производная. Уравнения Даламбера-Эйлера – Коши-Римана.	[2] . Гл.П, §5-7; [1] . Гл.П, §4 п.1-4
5. Геометрический смысл дифференцируемости. Конформные отображения. Угол с вершиной в бесконечно удаленной точке.	[2] . Гл.П, §8-11.
6. Аналитическая функция. Вещественная и мнимая части аналитической функции как сопряженные гармонические функции. Гидромеханическое истолкование аналитической функции.	[2] . Гл.П, §13,14
7. Элементарные функции. Линейная и дробно-линейная функции. Основные свойства дробно-линейной функции.	[2] . Гл.Ш, §4-9; [1] . Гл.Ш, §1 п.1-10
8. Показательная функция и логарифм. Степень с произвольным комплексным показателем. Функция Жуковского. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.	2 . Гл.Ш, §1-3, 10-21; [1] . Гл.Ш, §3
9. Интеграл от функции комплексной переменной.	[2] . Гл.У, §1-3; [1] . Гл.IУ, §1, п.1-2

I0. Интегральная теорема Коши. Выражение определенного интеграла через первообразную функцию. Интеграл в многосвязной области.	[2] . Гл.У, §4-I0.
II. Интеграл и интегральная формула Коши.	[I] . Гл.IУ, §3, п.I,2.
I2. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.	[I] . Гл.IУ, §3, п.3,4,7.
I3. Обращение интегральной теоремы Коши.	[I] . Гл.IУ,§3, п.5; [2] . Гл.УI, §5.
I4. Ряды с комплесными членами. Абсолютно сходящиеся ряды. Степенные ряды. Круг сходимости и радиус сходимости.	[I] . Гл.I, §5; [I] . Гл.П, §3
I5. Теорема о равномерно сходящихся рядах аналитических функций.	[I] . Гл.П, §2; [I] . Гл.У, §I.
I6. Разложение аналитической функции в степенный ряд. Неравенство Коши для коэффициентов. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Лиувилля.	[I] . Гл.У, §2, п.I-3, 8,9; [2] . Гл.УI, §2; [2] . Гл.IX, §6.
I7. Действия над степенными рядами: арифметические действия, ряд степенных рядов, подстановка ряда в ряд. Метод неопределенных коэффициентов.	[2] . Гл.УI, §II-I3.
I8. Теорема единственности для аналитических функций. Нули аналитических функций. Порядок нуля.	[3] . Гл.I, §5, п.20. [2] . Гл.УI, §8-I0.
I9. Приближения аналитических функций полиномами. Теорема Рунге.	[4] , т.I, гл.4, §2, п.2.3 (до следствия)

20. Ряд Лорана	[2] . Гл.УП, §I,2
2I.Изолированные особые точки однозначного характера. Теорема L.В.Сохоцкого. Изучение функций в окрестности бесконечно удаленной точки.	[2] . Гл.УП, §3,4,6
22. Вычеты. Основная теорема о вычетах.	[2] .Гл.УШ, §I,3
23. Применение теории вычетов к вычислению интегралов и к разложению мероморфных функций на простейшие дроби.	[3] . Гл.У, §2, п.73, 74; Гл.У,§I, п.7I
24. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.	[2] Гл.УШ, §2
25. Локальное обращение аналитической функции. Принцип открытости и принцип области.	[2] . Гл.X, §I,3,4,5
26. Принцип максимума модуля.	[I] . Гл.У, §2, п.5.
27. Аналитические продолжение. Общее понятие римановой поверхности.	[2] . Гл.IX, §I-4, §6.
28. Принцип симметрии.	[2] . Гл.IX, §5; [3] . Гл.П, §3, п.36.
29. Особые точки многозначного характера.	[2] . Гл.IX, §9.
30. Единственность конформного отображения. Лемма Шварца. Понятие о теореме существования конформного отображения.	[2] . Гл.X, §2,6
3I. Понятие о соответствии границ при конформном отображении.	[2] . Гл.X, §7.

12. Отображение прямоугольника на полуплоскость. Понятие об эллиптических функциях.	[2] . Гл.X, §8,9.
13. Целые функции, порядок и тип.	[2] .Гл.УП, §7,I2.
14. Теорема Фрагмена-Линделефа	[4] , т.2, гл.6, §3, п.3.3. с.206 с. до середины 208 с.
15. Мероморфные функции .Теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера.	[2] . Гл.УП, §7,8,9

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа призвана закрепить усвоение теоретической части курса ТФКП. Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо внимательно ознакомиться с примерами решения задач, приведенными ниже. Контрольная работа включает 9 задач. Определение варианта задания производится в соответствии с последней цифрой номера, фамилии студента в списке группы. Например, студент, фамилия которого в журнале значится под номером I7, решает следующие задачи: 7,I7,27,37,47,57,67,77,87.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие правила:

I) контрольную работу следует выполнять аккуратно,оставляя поля для замечаний рецензента;

2) условия задач своего варианта должны быть полностью переписаны;

3) решения задач и используемые формулы должны сопровождаться краткими и ясными пояснениями;

4) в контрольной работе следует указывать учебники и параграфы, которыми студент пользовался при решении задач;

5) текст контрольной работы должен быть внимательно вычитан студентом с целью устранения описок и арифметических ошибок. При рецензировании учитываются все ошибки, допущенные в работе;

6) на титульном листе указывается наименование дисциплины, по которой производится контрольная работа, номер варианта, факультет, курс и номер группы, фамилия и инициалы студента,

домашний адрес.

Контрольные работы, представленные без соблюдения указанных выше правил оформления, а также работы, выполненные не по своему варианту не засчитываются.

При повторном рецензировании обязательно представить работу с первой рецензией.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вычисление корней n-й степени из комплексных чисел производится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (I)$$

где символ $\sqrt[n]{}$ обозначает арифметический корень.

Пример I. Найти все значения корня $\sqrt[3]{2-3i}$.

Решение. $|2-3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. Изобразив число $2-3i$ вектором на комплексной плоскости, видим, что $\arg(2-3i)$, который, как известно, есть угол между положительным направлением вещественной оси и этим вектором, равен $2\pi - \operatorname{arctg} 3/2$. Подставляя эти значения в формулу (I), находим

$$\sqrt[3]{2-3i} = \sqrt[6]{13}\left(\cos\frac{2\pi(k+1) - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}}{3} + i\sin\frac{2\pi(k+1) - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Пример 2. Найти все значения степени i^{-i}.

Решение. Если a и $z \neq 0$ – комплексные числа, то по определению

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \qquad (2)$$

причем логарифм комплексного числа $z \neq 0$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (3)$$

Таким образом, по формуле (2) $i^{-i} = e^{-i \operatorname{Ln} i}$, причем по формуле (3)

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i(\arg i + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Окончательно имеем

$$i^{-i} = e^{-i\cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k},\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Пример 3. Выяснить, существует ли такая аналитическая функция f, что $\operatorname{Im} f(z) = e^y \cos x$. Если существует, то найти эту функцию.

Решение. Для того чтобы данная функция v была в области D мнимой частью некоторой аналитической функции, необходимо и достаточно, чтобы v была гармонической в D, т.е. удовлетворяла уравнению Лапласа:

$$\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем $v = e^y \cos x$,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^y \sin x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^y \cos x,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -e^y \cos x,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^y \cos x.$$

Следовательно, $\Delta v = 0$ во всей плоскости $\mathbb{C}$ и v является мнимой частью некоторой аналитической в $\mathbb{C}$ функции f. Действительную часть u функции f будем искать по формуле

$$u(x,y) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C, \tag{4}$$

где интеграл берется по любому пути L, лежащему в D, с началом в произвольной фиксированной точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ и концом в точке $z = x + iy \in D$, а C – произвольная действительная постоянная.

В частности, если D содержит двухзвенную ломаную L с началом в z_0 и концом в точке z, состоящую из горизонтального отрезка, соединяющего точки $x_0 + iy_0$ и $x + iy_0$, и вертикального отрезка, соединяющего точки $x + iy_0$ и $x + iy$ (сделайте чертеж!), то формула (4) принимает вид

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} dy + C. \tag{5}$$

В нашем случае найдем u по формуле (5), положив в ней $x_0 = y_0 = 0$. Получим

$$u(x,y) = \int_0^x \cos x\, dx + \int_0^y e^y \sin x\, dy + C = \sin x\, e^y + C.$$

Следовательно,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^y \sin x + C + ie^y \cos x,$$

где C – произвольная действительная постоянная (заметим, что f можно представить в виде $f(z) = e^y(\sin x + i\cos x) + C = ie^{y-ix} + C = ie^{-iz} + C$).

Пример 4. Найти аналитическую функцию f, такую, что $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = i$ (если она существует).

Решение. Так же, как и в примере 3, убеждаемся, что функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ является гармонической в $\mathbb{C}$ и, следовательно, искомая аналитическая функция $f = u + iv$ существует. Мнимую часть v функции f можно найти по формуле

$$v(x,y) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \tag{6}$$

где C – произвольная действительная постоянная. В частности, если область D удовлетворяет тему же условию, что и в примере 3, то

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dy + C. \tag{7}$$

Найдем v по формуле (7), полагая $x_0 = y_0 = 0$:

$$v(x,y) = \int_0^x 0\, dx + \int_0^y (2x+1)\, dy + C = 2xy + y + C.$$

Следовательно,

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + C)$$

(можно заметить, что $f(z) = (x^2 - y^2 + 2xyi) + (x + iy) + i = z^2 + z + i$).

Дробно-линейные функции имеют вид

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{8}$$

где $ad - bc \neq 0$. При решении задач полезно учесть следующие факты.

I. Дробно-линейная функция $w = f(z)$ однозначно определяется своими значениями в трех точках:

$$w_1 = f(z_1), \quad w_2 = f(z_2), \quad w_3 = f(z_3).$$

По этим значениям искомую функцию w можно определить из следующего уравнения:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \tag{9}$$

Эта формула верна и в том случае, когда некоторые из z_j и w_j равны ∞, если воспользоваться следующим правилом: разность, в которой встречается знак ∞, нужно заменить на I.

2. Круговое свойство. При дробно-линейном отображении каждая "окружность в широком смысле слова" γ (т.е. прямая или окружность) переходит также в "окружность в широком смысле слова". При этом если $-\frac{d}{c} \in \gamma$, то образом γ будет прямая, в противном случае – окружность.

3. Если при дробно-линейном отображении окружность в широком смысле γ отображается на окружность в широком смысле γ', то область D, для которой γ является границей, отображается на одну из двух областей, для которых γ' является границей.

Пример 5. Найти дробно-линейную функцию, переводящую три точки $0, 1, \infty$ соответственно в точки $-1, 0, 1$. Во что переходит при этом отображении единичный круг?

Решение. Введем обозначения $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ и соответственно $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$. Воспользовавшись формулой (9), имеем

$$\frac{w+1}{w} : \frac{1+1}{1} = \frac{z}{z-1} : \frac{1}{1}.$$

Из этого уравнения находим w

$$\frac{w+1}{w} = \frac{2z}{z-1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{w} = \frac{2z}{z-1} \Leftrightarrow \frac{1}{w} = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1}.$$

Итак, $w = \frac{z-1}{z+1}$. Найдем образ круга $D = \{|z| < 1\}$. Для этого найдем сначала образ единичной окружности $\gamma = \{|z| = 1\}$, ограничивающей круг D. В соответствии с круговым свойством γ отображается на окружность в широком смысле γ'. Поскольку точка $-\frac{d}{c} = -1 \in \gamma$, то γ' – прямая. Для определения этой прямой достаточно найти две ее точки. С этой целью возьмем две точки $1, i \in \gamma$ и вычислим их образы при отображении w: по условию задачи $w(1) = 0$. Далее, $w(i) = \frac{i-1}{i+1} = i$. Таким образом, γ' есть прямая, проходящая через точки 0 и i, то есть мнимая ось. Сформулированное выше свойство 3 дробно-линейного отображения показывает, что образом круга D будет одна из полуплоскостей, ограниченных мнимой осью. Для определения этой полуплоскости достаточно найти одну ее точку. Поскольку $0 \in D$, то $w(0) = -1$ принадлежит этой полуплоскости.

Итак, образ круга D при нашем отображении есть левая полуплоскость $\{\operatorname{Re} z < 0\}$.

Пример 6. Вычислить $\int_C \bar{z}\, dz$, где C – нижняя половина единичной окружности $\{|z| = 1\}$, проходимая в положительном направлении.

Решение. Если путь C задается уравнением $z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$, то интеграл от функции f по пути C вычисляется по формуле

$$\int_C f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\, dt. \tag{I0}$$

В нашем случае уравнение пути C есть $z = e^{i\varphi}$, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$.

По формуле (I0) получаем

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_\pi^{2\pi} e^{-i\varphi} i e^{i\varphi} d\varphi = i \int_\pi^{2\pi} d\varphi = \pi i.$$

Пример 7. Разложить функцию $z e^{3z}$ в ряд

Тейлора по степеням $z - i$ и определить круг сходимости полученного ряда.

Решение. Произведем замену переменной

$$t = z - i\,, \quad z = t + i\,.$$

Тогда

$$ze^{3z} = (t+i)e^{3t+3i} = e^{3i}(te^{3t} + ie^{3t}). \qquad (11)$$

Воспользуемся тем, что ряд Тейлора функции e^z имеет вид

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \qquad (12)$$

и сходится во всей плоскости (т.е. в "круге" $|z| < \infty$).

Из формулы (12) получаем

$$e^{3t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{n!} \quad (|t| < \infty),$$

$$t\,e^{3t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}t^n}{(n-1)!} \quad (|t|<\infty),$$

$$i\,e^{3t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i\,3^n t^n}{n!} = i + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i\,3^n t^n}{n!} \,(|t|<\infty).$$

Следовательно,

$$te^{3t} + ie^{3t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}t^n}{(n-1)!} + i + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i\,3^n t^n}{n!} =$$

$$= i + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{i\,3^n}{n!}\right)t^n = i + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}\left(1+\frac{3i}{n}\right)t^n$$

Подставляя это разложение в формулу (11) и учитывая, что $t = z - i$, окончательно имеем

$$ze^{3z} = e^{3i} + \sum_{n=1}^{\infty}e^{3i}\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}\left(1+\frac{3i}{n}\right)(z-i)^n, \quad (|z|<\infty).$$

Во многих примерах для разложения дробно-рациональных функций в ряд Тейлора бывает полезна формула $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (|z| < 1)$.

<u>Пример 8</u>. Найти особые точки функции

$$w = \frac{\cos z}{(z^2+4)^2},$$

выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Решение. Поскольку числитель и знаменатель данной дроби аналитичны во всей комплексной плоскости, то особые точки функции w могут появиться только за счет обращения знаменателя в нуль. Из уравнения $z^2 + 4 = 0$ находим $z = \pm 2i$.

Поскольку при $z \to 2i$ предел числителя

$$\lim_{z\to 2i}\cos z = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-2}+e^{2}}{2} \neq 0,$$

а предел знаменателя равен 0, то $\lim_{z\to 2i} w = \infty$. Так как наша функция однозначная и аналитическая в проколотой окрестности $\{0 < |z-2i| < 1\}$ точки $2i$, то $2i$ – полюс функции w. Для определения порядка этого полюса воспользуемся тем, что порядок полюса z_0 функции w совпадает с порядком нуля z_0 функции $\frac{1}{w}$.

Имеем
$$\frac{1}{w} = \frac{(z^2+4)^2}{\cos z} = (z-2i)^2 \cdot \frac{(z+2i)^2}{\cos z}.$$

Поскольку функция $\frac{(z+2i)^2}{\cos z}$ аналитична в окрестности точки $2i$ и не равна в точке $2i$ нулю, то порядок нуля в точке $2i$ для функции $1/w$ совпадает с порядком нуля в точке $2i$ для функции $(z-2i)^2$, т.е. равен двум. Итак, $2i$ – полюс второго порядка для функции w. Аналогично показывается, что $-2i$ – тоже полюс второго порядка.

Исследуем точку $z = \infty$. Так как в области $2 < |z| < \infty$ функция w однозначная и аналитическая, то ∞ – либо устранимая особая точка, либо полюс, либо существенная особая точка. Рассмотрим вопрос о существовании предела $\lim_{z\to\infty} w$. Пусть $z \to \infty$ вдоль вещественной оси. Тогда

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ (z\text{ – вещественное})}} w = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2+4} = 0$$

(в этом легко убедиться, если заметить, что $|\cos x| \le 1$).

С другой сто.оны, если $z \to \infty$ вдоль мнимой оси, то

$$\lim_{z \to \infty} w = \lim_{y \to \infty} \frac{\cos(iy)}{4-y^2} = \lim_{y \to \infty} \frac{e^{-y}+e^{y}}{2(4-y^2)} = \infty$$

z - чисто мнимое).
(В этом легко убедиться с помощью правила Лопиталя).

Таким образом, функция w не имеет предела в точке ∞. Следовательно ∞ - существенно особая точка.

Пример. 9. Найти вычеты функции $w = \frac{1}{z^3 - z^5}$ относительно всех изолированных особых точек, выяснив предварительно их характер, и относительно бесконечно удаленной точки, если она не является предельной для других особых точек.

Так же, как и в примере 8, особыми точками данной функции могут быть лишь те, в которых знаменатель равен нулю, точка ∞. Имеем

$$z^3 - z^5 = z^3(1-z)(1+z)$$

Отсюд $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ - все точки, в которых знаменатель равен нулю. Так как числитель рассматриваемой дроби $\neq 0$, то в этих точках функция w имеет бесконечные пределы. Итак, z_1, z_2, z_3 - полюсы функции w. Для определения их порядка рассмотрим функцию

$$\frac{1}{w} = z^3(1-z)(1+z).$$

В точке $z_1 = 0$ функция $1/w$ имеет нуль третьего порядка, в точках $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ - нули первого порядка. Следовательно, $z_1 = 0$ - полюс первого порядка, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ - простые полюса функции w.
Воспользуемся тем, что в случае, когда a - полюс функции w порядка n, вычет в этой точке можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=a} w(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(w(z)(z-a)^n \right). \qquad (I3)$$

Если $n = 1$ и $w(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где φ и ψ - аналитические в окрестности точки a функции, причем $\psi'(a) \neq 0$, то из (I3) следует, что

$$\operatorname*{Res}_{z=a} w(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (I4)$$

Таким образом, для нашей функции имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z^3 - z^5} \cdot z^2 \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{1-z^2} \right)'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(\frac{2z}{(1-z^2)^2} \right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{2(1+3z^2)}{(1-z^2)^2} = 1.$$

Далее, по формуле (I4)

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{3z^2 - 5z^4}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

Аналогично находим, что $\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{1}{z^3 - z^5} = -\frac{1}{2}$.

Наконец рассмотрим точку $z = \infty$. Поскольку $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^3 - z^5} = 0$, то $z = \infty$ - устранимая особая точка. Для вычисления вычета в этой точке проще всего воспользоваться тем фактом (который непосредственно вытекает из интегральной теоремы Коши), что сумма всех вычетов функции (включая и вычет в ∞) равна 0.
Имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=0} w + \operatorname*{Res}_{z=1} w + \operatorname*{Res}_{z=-1} w + \operatorname*{Res}_{z=\infty} w = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} w = 0.$$

Пример I0. Найти вычеты функции

$$w(z) = \frac{e^{2\pi i z} - 1}{(z+1)^3}$$

относительно всех изолированных особых точек и относительно точки ∞.

Решение. Как и в примерах 8 и 9, ед. ственными особ. ми точками данной функции могут быть лишь нули знаменателя и точка $z = \infty$.

Знаменатель обращается в нуль лишь в точке $z = -1$. В отличие от предыдущих примеров при $z = -1$ равен нулю и числитель. Для выяснения характера особенности данной функции в точке $z=-1$ разложим ее в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z=-1$ (т.е. в кольце $0<|z+1|<R$). Для этого разложим числитель в ряд Тейлора по степеням $z+1$ (см.пример 7).

Совершив замену $z+1=t$, $z=t-1$, имеем с учетом формулы (I2)

$$e^{2\pi i z} = e^{2\pi i(t-1)} = e^{-2\pi i} e^{2\pi i t} = e^{2\pi i t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^n}{n!}(z+1)^n.$$

Следовательно,

$$e^{2\pi i z}-1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^n}{n!}(z+1)^n = 2\pi i(z+1) - 2\pi^2(z+1)^2 - \frac{4}{3}\pi i^3(z+1)^3 + \frac{2}{3}\pi^4(z+1)^4+\dots,$$

причем ряд сходится при всех $z\in\mathbb{C}$.

Таким образом, в кольце $0<|z+1|<\infty$

$$w(z) = \frac{e^{2\pi i z}-1}{(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{(z+1)^2} - \frac{2\pi^2}{z+1} - \frac{4}{3}\pi i^3 + \frac{2}{3}\pi^4(z+1)+\dots.$$

Мы получили искомый ряд Лорана. Из вида главной части $\frac{2\pi i}{(z+1)^2} - \frac{2\pi^2}{z+1}$ этого ряда выводим, что $z=-1$ – полюс второго порядка. Однако в данном случае нет необходимости в использовании формулы (I3), так как $\operatorname{Res}\limits_{z=a} f(z)$ равен коэффициенту C_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении в ряд Лорана функции f в окрестности точки a. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=-1} w(z) = -2\pi^2.$$

Действуя как в примере 8, получаем, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ (z \text{ вещественное})}} w(z)=0, \qquad \lim_{\substack{y\to-\infty \\ (z=iy \text{ – чисто мнимое})}} w(z)=\infty.$$

Таким образом, ∞ – существенно особая точка.

Так как $\operatorname{Res}\limits_{z=-1} w(z) + \operatorname{Res}\limits_{z=\infty} w(z) = 0$, то

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} w(z) = 2\pi^2.$$

При вычислении несобственных интегралов в действительной области часто оказывается полезной теория вычетов. Приведем три формулы в этом направлении [2, гл.VIII, п.3].

Если $P(z)/Q(z)$ – дробно-рациональная функция, причем степень многочлена Q по крайней мере на две единицы больше степени числителя P, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_j}\frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad (I5)$$

где a_j ($j=1,2,\dots,n$) – все полюсы функции P/Q, лежащие в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$.

Пусть φ – аналитическая функция в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z\geq 0\}$, за исключением конечного числа полюсов a_j ($j=1,2,\dots,n$), не лежащих на действительной оси. Пусть, далее, функция φ принимает на действительной оси действительные значения и $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geq 0}}\varphi(z)=0$.

Тогда

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)\cos\alpha x\,dx = \pi i\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_j}\left(e^{\alpha i z}\varphi(z)\right), \qquad (I6)$$

если φ – четная функция, и

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)\sin\alpha x\,dx = \pi i\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_j}\left(e^{\alpha i z}\varphi(z)\right), \qquad (I7)$$

если φ – нечетная функция ($\alpha>0$).

<u>Пример II.</u> Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}.$$

Решение. Легко видеть, что к этому интегралу применима формула (I5). Полюсы подынтегральной функции есть корни уравнения

$$z^2+4z+13=0.$$

Отсюда $a_1=-2-3i$, $a_2=-2+3i$.

Заметим, что в верхней полуплоскости лежит только полюс $a_2=-2+3i$ и что это полюс второго порядка (см.примеры 8 и 9).

По формуле (I3) находим

$$\operatorname*{Res}_{z=a_2} \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to a_2} \left(\frac{z}{(z^2+4z+13)^2} (z-a_2)^2 \right)' =$$

$$= \lim_{z \to a_2} \left(\frac{z}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2} (z-a_2)^2 \right)' = \lim_{z \to -2+3i} \left(\frac{z}{(z-(-2-3i))^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z \to -2+3i} \frac{2+3i-z}{(z+2+3i)^3} = \frac{i}{54}.$$

Следовательно, формула (I5) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi i \cdot \frac{i}{54} = -\frac{\pi}{27}.$$

Пример I2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}\,dx \qquad (b>0).$$

Решение. К этому интегралу можно применить формулу (I6) при $\alpha = 1$, так как $\varphi(z) = 1/(z^2+b^2)$ –четная функция, стремящаяся к нулю при $z \to \infty$, $\operatorname{Re} z > 0$. Единственной особой точкой в верхней полуплоскости у функции $\varphi(z)e^{iz} = e^{iz}/(z^2+b^2)$ будет точка bi – полюс первого порядка. В силу формулы (I4)

$$\operatorname*{Res}_{z=bi} \frac{e^{iz}}{z^2+b^2} = \frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=bi} = \frac{e^{-b}}{2bi} = -i\frac{e^{-b}}{2b}.$$

Теперь применение формулы (I6) дает

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}\,dx = \pi i \cdot \left(-i\frac{e^{-b}}{2b}\right) = \frac{\pi}{2be^{b}}.$$

Пример I3. Сколько корней уравнения

$$z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$$

лежит в кольце $\{1 < |z| < 2\}$?

Решение. Воспользуемся следующим результатом. Теорема Руше. Пусть две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в замыкании области D, ограниченной спрямляемой кривой C,

причем при $z \in C$ выполняется неравенство $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$. Тогда в области D функция $\varphi(z) + \psi(z)$ имеет столько же нулей (с учетом их кратности), сколько их имеет функция $\varphi(z)$.

Для определения числа корней уравнения в кольце $\{1 < |z| < 2\}$ мы вычислим число корней в круге $\{|z| < 2\}$ и вычтем из него число корней в круге $\{|z| \le 1\}$.

Рассмотрим вначале круг $\{|z| < 2\}$. Воспользуемся теоремой Руше, положив $\varphi(z) = z^8$, $\psi(z) = -5z^5 - 2z + 1$. На окружности $\{|z| = 2\}$

$$|\varphi(z)| = |z|^8 = 2^8 = 256,$$

$$|\psi(z)| = |-5z^5 - 2z + 1| \le 5|z|^5 + 2|z| + 1 = 5\cdot 2^5 + 2\cdot 5 + 1 = 165.$$

Следовательно, на этой окружности $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$. Поэтому данное уравнение имеет в круге $\{|z| < 2\}$ столько же решений, сколько их имеет там уравнение $z^8 = 0$, т.е. 8 (каждое решение берется с учетом его кратности).

Теперь найдем число корней в круге $\{|z| \le 1\}$. Для этого положим $\varphi(z) = -5z^5 + 1$, $\psi(z) = z^8 - 2z$. На окружности $\{|z| = 1\}$ имеем

$$|\varphi(z)| = |-5z^5 - (-1)| \ge |-5z^5| - 1 = 4, \quad |\psi(z)| = |z^8 - 2z| \le |z|^8 + |2z| = 3$$

(мы воспользовались неравенством $|a - b| \ge |a| - |b|$),

т.е. $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$. Поскольку φ имеет в круге $\{|z| < 1\}$ пять нулей (значения $\sqrt[5]{1/5}$), то по теореме Руше в круге $\{|z| < 1\}$ столько же корней имеет и данное уравнение. А так как на единичной окружности $\{|z| = 1\}$ имеем $\varphi(z) \ne -\psi(z)$ $(|\varphi(z)| > |\psi(z)|)$, то на этой окружности нет корней рассматриваемого уравнения. Поэтому круг $\{|z| \le 1\}$ тоже содержит пять корней этого уравнения. Таким образом, данное уравнение в кольце $\{1 < |z| < 2\}$ имеет ровно $8 - 5 = 3$ корня.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

В задачах I–I0 нужно найти все значения корней и изобразить полученные значения на комплексной плоскости:

1. $\sqrt[3]{1}$. 2. $\sqrt[3]{i}$. 3. $\sqrt[4]{-1}$. 4. $\sqrt[6]{-8}$. 5. $\sqrt[8]{1}$. 6. $\sqrt{1-i}$.

7. $\sqrt{3+4i}$. 8. $\sqrt[3]{-2+2i}$. 9. $\sqrt[5]{-4+3i}$. 10. $\sqrt[4]{i}$.

Найти все значения указанных степеней (задачи II–20). Ответ записать в тригонометрической или алгебраической форме.

11. $(-2)^{\sqrt{2}}$. 12. 2^{i}. 13. i^{i}. 14. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$. 15. $(3-4i)^{1+i}$.
16. $(-3+4i)^{1+i}$. 17. $(1+i)^{i}$. 18. $(1-i)^{i-1}$. 19. $(-1)^{i}$. 20. $(1+i)^{1-i}$.

В задачах 2I–30 найти аналитическую функцию f по заданной действительной или мнимой части (и условию нормировки), либо доказать, что такой функции не существует.

21. $\operatorname{Re} f(z) = e^{x}\sin y$. 22. $\operatorname{Im} f(z) = e^{-2y}\cos x$. 23. $\operatorname{Im} f(z) = x^3 - 3xy^2$. 24. $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3$, $f(0)=0$. 25. $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x^2 - x + y^2}{x^2+y^2}$, $f(1)=0$. 26. $\operatorname{Im} f(z) = -e^{-2y}\cos 2x + x$.

27. $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2 + xy$. 28. $\operatorname{Im} f(z) = y + xy^2$, $f(0) = 1$. 29. $\operatorname{Re} f(z) = 2x^2 - y^2 + x$. 30. $\operatorname{Re} f(z) = \ln(2x^2+y^2)$.

В задачах 3I–40 найти дробно-линейную функцию f, переводящую три точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3 (символически будем это записывать так: $f: \{z_1; z_2; z_3\} \to \{w_1; w_2; w_3\}$) и вычислить, во что переходит при этом отображении область D.

31. $f: \{-1; i; 1+i\} \to \{0; 2i; 1-i\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > \frac{1}{4}\}$.

32. $f: \{-1; i; 1+i\} \to \{i; \infty; 1\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

33. $f: \{-1; \infty; i\} \to \{i; 1; 1+i\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > -1\}$.

34. $f: \{-1; \infty; i\} \to \{\infty; i; 1\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > -1\}$.

35. $f: \{-1; \infty; i\} \to \{0; \infty; 1\}$, $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

36. $f: \{1; i; 0\} \to \{1; i; -1\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

√37. $f: \{\frac{1}{2}; 2; \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i\} \to \{\frac{1}{2}; 2; \infty\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > \frac{5}{4}\}$.

38. $f: \{-1; 0; 1\} \to \{1; i; -1\}$, $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

39. $f: \{0; 2; -2i\} \to \{0; 1; \infty\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

40. $f: \{1; 0; i\} \to \{0; 1; \infty\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

В задачах 4I–50 нужно вычислить интеграл по данному контуру C (контур всегда обходится в положительном направлении).

41. $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\,dz$, C – граница треугольника с вершинами в точках $0;\ 1;\ 1+2i$.
42. $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\,dz$, C – отрезок с началом в точке 0 и концом в точке $1+2i$.
43. $\int_C (z - |z|)\,dz$, C состоит из правой половины единичной окружности $\{|z| = 1\}$ и вертикального диаметра.
44. $\int_C (\bar{z}/z)\,dz$, C состоит из верхних половин окружностей $\{|z| = 1\}$, $\{|z| = 2\}$ и соединяющих их отрезков вещественной оси.
45. $\int_C (\bar{z}/z)\,dz$, C – граница квадрата с вершинами $1;\ i;\ -1;\ -i$.
√46. $\int_C (z/\bar{z})\,dz$, C – граница квадрата с вершинами $\pm 1;\ \pm i$.

7. $\int_C \bar{z}\,dz$, C – астроида $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

8. $\int_C \bar{z}\,dz$, C состоит из одной арки синусоиды $y=\sin x$ $(0\le x\le \pi)$ и замыкающего ее отрезка вещественной оси.

9. $\int_C \operatorname{Re} z\,dz$, C – верхняя половина единичной окружности $\{|z|=1\}$.

0. $\int_C \operatorname{Im} z\,dz$, C – верхняя половина единичной окружности $\{|z|=1\}$.

В задачах 51–60 требуется разложить указанную функцию в ряд Тейлора по степеням $z-a$, где a –заданное число, и определить круг сходимости полученного ряда.

51. $\frac{1}{z+1}$, $a=i$ 52. $\frac{2}{z-1}$, $a=i$ 53. $\frac{1}{z^2+4}$, $a=0$

54. $\frac{z}{z+2}$, $a=1$ 55. e^{z+3}, $a=-1$ 56. e^{2z}, $a=i$.

57. $\frac{1}{z+4}$, $a=-1$ 58. $\sin z\cos z$, $a=0$

59. e^{z}, $a=-1$ 60. $\cos 2z$, $a=0$

Найти вычеты указанных функций (задачи 61–70) относительно всех изолированных особых точек, выяснив предварительно их характер, и относительно бесконечно удаленной точки (если она не является предельной для других особых точек).

61. $\frac{z^2+z-1}{z^3-z}$ 62. $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$. 63. $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

64. $\operatorname{tg} z$. 65. $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$. 66. $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$.

67. $\frac{\cos \pi z}{(z-\frac{1}{2})^2}$. 68. $\frac{z}{e^z-1}$. 69. $\frac{\sin \pi z}{(z-\frac{1}{2})^2}$.

70. $\frac{z^2}{e^z-1}$.

В задачах 71–80 требуется вычислить указанные интегралы с помощью вычетов

71. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$. 72. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

73. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$. 74. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

75. $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. 76. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+9}\,dx$.

77. $\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$. 78. $\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{x^2+4}$.

79. $\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$ 80. $\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^2}$.

В задачах 81–90 требуется найти число корней данных уравнений в областях, указанных в скобках.

81. $z^9+2z^6+z^2-8z-2=0$ $(\{|z|<1\})$.
82. $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ $(\{|z|<1\})$.
83. $z^3-3z+1=0$ $(\{|z|<1\})$.
84. $2z^4-5z+2=0$ $(\{|z|<1\})$.
85. $z^8-4z^5+z^2-1=0$ $(\{|z|<1\})$.
86. $z^3-12z+2=0$ $(\{|z|<2\})$.
87. $z^4-9z+1=0$ $(\{|z|<2\})$.
88. $z^4-8z+10=0$ $(\{|z|<3\})$.
89. $z^7-5z^4+z^2-2=0$ $(\{|z|<1\})$.
90. $z^4-5z+1=0$ $(\{|z|<2\})$.

СОДЕРЖАНИЕ

Методические указания и контрольные задания по курсу
"Теория функций комплексного переменного"
для студентов 4 курса заочного факультета
специальности "Математика"

Адольф Рувимович Миротин

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано к печати 15.10.86. Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая №1. Печать офсетная. Усл.п.л. 1,49.
Уч.изд.л. 1,3. Тираж 200. Заказ 320. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте ГГУ, г.Гомель, ул.Советская, 104