

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ЮБИЛЕЙНАЯ
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,**

**посвященная 90-летию
Гомельского государственного университета
имени Франциска Скорины**

(Гомель, 19–20 ноября 2020 года)

Материалы

В трех частях

Часть 3

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2020

УДК 378.4(476.2-2Гом)(082)

Международная юбилейная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины (Гомель, 19–20 ноября 2020 г.) : материалы : в 3 ч. Ч. 3 / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол. : С. А. Хахомов (гл. ред.) [и др.]. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. – 259 с.

ISBN 978-985-577-699-5 (Ч. 3)

ISBN 978-985-577-696-4

В сборнике помещены материалы юбилейной научно-практической конференции, освещающие историю, современное положение, проблемы и перспективы развития естественных, технических, общественных и гуманитарных наук. В третьей части освещаются современное положение, проблемы и перспективы развития математических, технических и физических наук.

Адресуется научным сотрудникам, преподавателям, аспирантам, магистрантам и студентам.

Редакционная коллегия:

С. А. Хахомов (главный редактор),

О. М. Демиденко (заместитель главного редактора),

В. С. Аверин, А. П. Гусев, С. А. Черепко, Е. В. Сажина,

С. П. Жогаль, В. А. Бейзеров, С. В. Севдалев, Д. Л. Коваленко,

Е. Н. Полуян, А. К. Костенко, И. И. Эсмантович

ISBN 978-985-577-699-5 (Ч. 3)

ISBN 978-985-577-696-4

© Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2020



СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Адарченко Н. М. О конечных группах, в которых нильпотентный корадикал является холловой подгруппой	7
Аниськов В. В. О преподавании дисциплины «Статистические методы в психологии» в условиях удаленного доступа.....	8
Атвиновский А. А. Аналог леммы Винера для рядов Вольфа-Данжуа	9
Белокурский М. С. Задача Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с невырожденным стационарным коэффициентом.....	11
Березовская Е. М., Мамичев И. С. О тестировании web-приложения «Товары».....	13
Васильев А. Ф., Коранчук А. Г. Группы с заданными формационными свойствами локальных подгрупп.....	16
Демуськов А. Б. Об информационной безопасности предприятий	20
Жадан М. И., Петушков А. А. Экономическая обоснованность использования компьютерной системы передачи информации с использованием ИК-излучений.....	22
Zakrevskaya V. S. Finite groups with partially π -subnormal subgroups	24
Казимиров Г. Н. Приближение алгебраическими многочленами некоторого класса функций.....	25
Клименко А. В., Яцковец М. В. Использование нейронных сетей при прогнозировании продаж.....	27
Княгина В. Н., Монахов В. С. О p -разрешимости конечной группы с P -субнормальной силовой p -подгруппой	29
Коновалова М. Н., Монахов В. С. Конечные группы с формационно субнормальными строго 2-максимальными подгруппами.....	29
Кузьменков Д. С., Коляскин И. И. Реализация расчёта напряжений и перемещений в объёмном теле при заданных областях контакта и действующем давлении	31
Марченко Л. Н., Парукевич И. В., Подгорная В. В. Влияние экономики знаний на устойчивое развитие регионов	34
Маслович С. Ф., Демуськов А. Б. Программный инструментарий для мобильного расписания университета.....	37
Мироненко В. И., Мироненко В. В. Явное вычисление матриц подобных матрице отображения Пуанкаре	40
Mirotin A. R. Some recent trends in the theory of Hausdorff operators.....	42
Мисюк В. Р. Об одном уточнении неравенств и теорем типа Бернштейна теории рациональной аппроксимации	46
Можаровский В. В. Асимптотический расчет деформирования ортотропного покрытия, жестко скрепленного с основанием	50
Москалева М. В., Можаровский В. В., Кузьменков Д. С. Определение напряженного состояния тел из композитов при контактном взаимодействии	53
Мурашко В. И. Вычислительные аспекты теории формаций конечных групп....	55
Мурашко В. И. Некоторые результаты о σ -нильпотентных группах.....	58
Немилостивая В. А., Малинковский Ю. В. Сети Джексона с ограничением на время пребывания заявок и двумя типами узлов	62

Осипенко Н. Б., Осипенко А. Н. Примеры реализации адресного подбора информационных ресурсов.....	65
Прохоренко В. А. Подход к построению нейроконтроллера для задачи управления технологической системой.....	67
Рубин В. А., Жогаль С. П. Нейронное структурированное обучение в ТФХ.....	70
Рудько О. С., Жогаль С. И. Построение технологического комплекса интеграционного взаимодействия распределенных систем.....	71
Ружицкая Е. А. Оптимальная по быстродействию стабилизация связанных маятников.....	72
Селькин В. М., Близнац И. В. Конечные группы с ограничениями на подгруппы Шмидта.....	73
Selkin V. M., Pobilovsky A. A., Zincuk S. I. On the π -decomposable norm of a finite group.....	75
Skiba A. N. Finite groups with abnormal Schmidt subgroups.....	77
Скиба А. Н. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами.....	78
Сохор И. Л. Развитие теории конечных $E_{\mathfrak{F}}$ -групп.....	80
Старовойтова Н. А. Формирование математической лексики у иностранных слушателей подготовительного отделения.....	81
Старовойтов А. П., Кечко Е. П., Волков Д. А. Аппроксимаций Эрмита – Паде функций Миттаг–Леффлера.....	83
Старовойтов А. П., Рябченко Н. В., Волков Д. А. Критерий существования и единственности полиортогональных многочленов.....	87
Сукач Е. И., Жердецкий Ю. В., Бужан М. А., Кончиц А. А. Метод и средства автоматизации моделирования электроэнергетических систем структурно-сложной организации.....	91
Эшматов Б. Э. Задача с производной по направлению одного семейства характеристик для параболо-гиперболического уравнения.....	95

ТЕХНИКА

Sulym I., Petryk I., Gaishun V., Borysenko M. Study of optical and structural properties of $\text{Ho}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$ co-doped sol-gel silica glasses.....	97
Абдирахимов И. Э., Каримов М. У. Природные битумы и тяжелые нефти, проблемы их освоения.....	99
Абдирахимов И. Э., Каримов М. У. Синтез и исследование деэмульгаторов на основе блоксополимеров поликарбоксилатов и окиси этилена.....	102
Воробьева Е. В., Волнянко Е. Н. Термоокислительная стойкость ингибированного полиэтилена, наполненного наночастицами оксида железа.....	105
Жукалов В. И., Гольдаде В. А., Зотов С. В. Сорбционные свойства модифицированных волокнисто-пористых материалов из полипропилена.....	107
Киселёв А. В. Внедрение беспилотных летательных аппаратов в автоматизированную систему экологического мониторинга лесных массивов.....	111
Косенок Я. А., Тюленкова О. И., Гайшун В. Е., Савицкая Т. А., Кимленко И. М., Старостенко И. А. Разработка новых гидрофобизирующих эмульсий для производства теплоизоляционных материалов с улучшенными эксплуатационными характеристиками.....	113
Кузьмар И. И., Кушнер Л. К., Гульпа Д. Ю., Гиро А. М., Левко А. В., Жигулин Д. В. Электрохимическое формирование тонкопленочных материалов для электрических контактов.....	117
Кулеш Е. А. Механические свойства нанокмпозиционных градиентных титан-углеродных покрытий.....	120

Кулеш Е. А., Емельянов В. А., Федосенко Н. Н. Поляризационное покрытие на основе слоев оксидов циркония и кремния	123
Купреев М. П., Судник Л. В., Рудницкий К. Ф. Высокопористый абразивный инструмент для шлифования труднообрабатываемых сталей.....	127
Кушнер Л. К., Кузьмар И. И., Гульпа Д. Ю., Дежкунов Н. В. Исследование кинетических закономерностей электрохимического меднения в условиях нестационарного электролиза	130
Лам Н. Н., Пивоварчик С. С., Мельников С. Н., Завадский С. М., Бурдовичин В. А., Доан Т. Х. Формирование защитных покрытий на титане методом импульсного реактивного магнетронного распыления	134
Москвичёв М. И., Васькевич В. В., Семченко А. В., Сидский В. В., Иванова Е. В., Заморянская М. В., Кравец В. А. Синтез скнтиллирующих стеклокристаллических материалов на основе ниобата иттрия.....	138
Москвичёв М. И., Гайшун В. Е., Коваленко Д. Л., Алешкевич Н. А., Косенок Я. А., Насонова Н. В. Получение пеностекломатериалов с применением вторичного стекольного сырья и исследование их структурных и радиозащитных характеристик	140
Мышковец В. Н., Максименко А. В., Баевич Г. А. Экспериментальные исследования влияния энергетических и временных характеристик лазерного излучения на размерные параметры сварочных соединений конструкционных сталей..	144
Нгуен Т. Д., Занько А. И., То Т. К., Голосов Д. А., Мельников С. Н., Колос В. В. Влияние отжига на кристаллизацию и оптические характеристики пленок оксида ванадия.....	147
Никитюк Ю. В., Сердюков А. Н., Шалупаев С. В., Серeda А. А. Эффективная дуолучевая схема раскалывания двухслойных структур из пластин кремния и стеклянных подложек	151
Рахимов Г. Б., Муртазаев Ф. И., Султонов Н. Н. Усовершенствование утилизации дымовых газов на установке получения серы (Шуртанский газохимический комплекс).....	155
Руденков А. С. Методы формирования углеродных покрытий, армированных наноструктурами	157
Семченко А. В., Сидский В. В., Тюленкова О. И., Гайшун В. Е., Коваленко Д. Л., Ткаченко В. В. Синтез золь-гель методом наноструктурных светопоглощающих золь-гель покрытий на основе оксидов металлов	160
Семченко И. В., Хахомов С. А., Самофалов А. Л., Подалов М. А., Балмаков А. П. Метаматериалы и метаповерхности как перспективная отрасль электродинамики бианизотропных структур.....	163
Сербин И. Н., Трапашко Г. А. Оптическая микроскопия и металлография.....	167
Сидский В. В., Семченко А. В., Айвазян Г. Е., Гайшун В. Е., Коваленко Д. Л., Тюленкова О. И. Синтез функциональных наноструктур для применения в солнечных элементах и фотодетекторах.....	170
Телеш Е. В., Достанко А. П. Оптические параметры тонких пленок нитрида углерода, синтезированных с применением ионных пучков.....	173
Тихон О. И., Мадвейко С. И., Бордусов С. В. Исследование влияния характера питания СВЧ магнетрона на оптические характеристики СВЧ разряда	177
Тюленкова О. И., Семченко А. В., Сидский В. В., Гайшун В. Е., Коваленко Д. Л., Слепенков Д. В. Зависимость электрофизических характеристик композиционных материалов от вида функциональных наполнителей и концентрации компонентов.....	180
Тюленкова О. И., Сидский В. В., Семченко А. В., Гайшун В. Е., Коваленко Д. Л., Айвазян Г. Е. Модифицирование наноструктур ZnO для высокоэффективных малогабаритных электронных устройств.....	184

Хахомов С. А., Семченко А. В., Сидский В. В., Гайшун В. Е., Коваленко Д. Л. Изучение влияния состава и типа иона-модификатора на структурные свойства ферромагнитных BiFeO_3 и $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ слоев	187
Шалуцаев С. В., Никитюк Ю. В., Серeda А. А. Комбинированное лазерное термораскалывание многослойных неоднородных структур из стекла	191

ФИЗИКА

Андреев В. В. Вычисление диаграмм Фейнмана с помощью разложения Джакоба-Вика	195
Андреев В. В., Дерюжкова О. М. Колебания двойного маятника в системе Mathematica	199
Вакулина Е. В., Максименко Н. В., Андреев В. В. Излучение пиона, взаимодействующего с полем плоской электромагнитной волны	203
Гавриш В. Ю., Андреев В. В. Электромагнитный форм-фактор ρ -мезона в точечной форме динамики	209
Гришечкин Ю. А., Капшай В. Н. Квазипотенциальное уравнение с одномерным осцилляторным потенциалом и задача Штурма-Лиувилля	212
Дей Е. А. Повышение точности численных решений одномерного стационарного уравнения Шредингера	217
Дерюжкова О. М., Парахневич А. С. Извлечение численной информации об изотопах водорода с помощью сайта ЦДФЭ	220
Капшай В. Н., Гришечкина А. А. Парциальные релятивистские функции Грина для состояний рассеяния в случае единичного орбитального момента	224
Капшай В. Н., Шамына А. А., Толкачев А. И. Генерация второй гармоники плоской электромагнитной волной в поверхностном слое диэлектрической частицы, имеющей форму сжатого эллипсоида вращения	229
Лукашевич С. А., Максименко Н. В., Дерюжкова О. М. Релятивистские уравнения движения и тензор энергии-импульса взаимодействия частицы спина $\frac{1}{2}$ с учетом поляризуемостей	233
Митюрин Г. С., Вежновец В. П. Неразрушающий контроль качества модельных образцов для оценки ингибирующих свойств буровых растворов методом лазерной фотоакустической спектроскопии	237
Митюрин Г. С., Горбачев Е. И. Определение емкостных и прочностных характеристик портландцементов ПЦТ П-50 методом импульсной лазерной фотоакустической спектроскопии	240
Невмержицкий М. Н., Шуляковский Р. Г. О полном сечении реакции фоторождения π^- -мезонов на дейтроне в области пороговых энергий	244
Толкачев А. И., Шамына А. А., Капшай В. Н. Графический анализ пространственного распределения плотности мощности поля второй гармоники, генерируемого от диэлектрической цилиндрической частицы большой высоты	247
Тимошин Е. С., Тимошин С. И. Кварковые вклады в спин нуклона из нейтринных экспериментов на поляризованных мишенях	251
Гюменков Г. Ю. О модификации уравнения состояния Исикавы-Чанга-Лу вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$	254
Шолох В. Г., Свиридова В. В., Алешкевич Н. А. Рейтинговая система оценки знаний в контексте управления качеством образовательной деятельности	257



МАТЕМАТИКА

Н. М. Адарченко

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, В КОТОРЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫЙ КОРАДИКАЛ ЯВЛЯЕТСЯ ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает конечную группу. В дальнейшем σ является некоторым разбиением множества всех простых чисел \mathbb{P} , то есть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Символ $\sigma(n)$ обозначает [1, 2] набор $\{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Группа G называется [3]: σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$; σ -нильпотентной, если $G = G_1 \times \dots \times G_n$ для некоторых σ -примарных групп G_1, \dots, G_n ; σ -разрешимой, если каждый главный фактор G является σ -примарным.

Множество \mathbf{H} подгрупп в G является полным холловским σ -множеством в G [1, 2], если каждый член $\neq 1$ в \mathbf{H} является холловой σ_i -подгруппой в G для некоторого $\sigma_i \in \sigma$ и \mathbf{H} содержит в точности одну холлову σ_i -подгруппу группы G для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Пусть $\tau_H(A) = \{\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(A) | \sigma(A) \cap \sigma(H^{\sigma_i}) \neq \emptyset \text{ для холловой } \sigma_i\text{-подгруппы } H \in \mathbf{H}\}$.

Тогда мы говорим, следуя Бейдлеману и Скибе [4], что подгруппа A группы G является: (i) τ_σ -перестановочной в G относительно \mathbf{H} , если $AH^x = H^xA$ для всех $x \in G$ и всех $H \in \mathbf{H}$ таких, что $\sigma(H) \subseteq \tau_H(A)$; (ii) τ_σ -перестановочной в G , если A является τ_σ -перестановочной в G относительно некоторого полного холлова σ -множества \mathbf{H} из G .

Наша главная цель – доказать следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть $D = G^{\sigma\pi}$ и $\pi = \pi(D)$. Предположим, что G обладает полным холловым σ -множеством \mathbf{H} , все члены которого π -сверхразрешимы. Если максимальные подгруппы каждой нециклической силовской p -подгруппы группы G являются τ_σ -перестановочными в G для всех $p \in \pi$, то D – нильпотентная холлова подгруппа в G , наименьший простой делитель числа $|G|$ делит $|G:D|$ и каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим.

В этой теореме символ $G^{\sigma\pi}$ обозначает σ -нильпотентный корадикал группы G , то есть пересечение всех нормальных подгрупп N группы G с σ -нильпотентной факторгруппой G/N ; G^π – нильпотентный корадикал группы G .

Следствие 1.2 (см. теорему 10.3 в [5, VI]). Если каждая силовская подгруппа группы G является циклической, то G сверхразрешима.

Следствие 1.3 (Сринивасан [6]). Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы G S -перестановочна в G , то G сверхразрешима.

Список использованных источников

- 1 Skiba, A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – 495(1), – P. 114–129.
- 2 Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation / A. N. Skiba // Fitting sets, J. Algebra. – 2020. – 550 – P. 69–85.
- 3 Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – 436 – P. 1–16.

- 4 Beidleman, J. C. On τ_σ -quasinormal subgroups of finite groups / J. C. Beidleman, A. N. Skiba J. // Group Theory. – 2017. – 20(5) – P. 955–964.
- 5 Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. – 1967 – 793 p.
- 6 Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. –1980. – 3(35) – P. 210–214.
- 7 Hu, B. Finite groups with given systems of σ -semipermutable subgroups, / B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2018. – Vol. 17. – № 02. – P. 1850031-1–1850031-4.
- 8 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter, Berlin–New York. – 1992. – 891 p.
- 9 Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad – Walter de Gruyter : Berlin-New York. – 2010. – 334 p.
- 10 Skiba, A. N. A generalization of a Hall theorem / A. N. Skiba // J. Algebra and its Application. –2015 – 15(4) – P. 21–36.

В. В. Аниськов

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

О ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ» В УСЛОВИЯХ УДАЛЕННОГО ДОСТУПА

Несомненно, учебный год 2019–2020 войдет не только в историю образовательного процесса, но и в историю всего человечества в целом. В этот год пришлось применять новые формы учебной работы, которые были вызваны мерами борьбы с COVID-19.

Конечно, формы обучения на расстоянии применялись уже давно и называлось все это дистанционным обучением, но в 2019–2020 учебном году этот процесс был назван удаленным доступом. Это было связано с тем, что, в отличие от дистанционного обучения, удаленный доступ означает общий доступ к компьютеру или рабочему столу, создавая тем самым эффект телеприсутствия.

Именно эффект телеприсутствия позволил сохранить некоторые прогрессивные формы учебной работы, которые с успехом применялись в последние годы при преподавании дисциплины «Статистические методы в психологии» на факультете психологии и педагогики ГГУ имени Ф. Скорины.

Это, прежде всего, та форма учебной работы, при которой наиболее способный и активный студент, консультирует других студентов по выполнению практических заданий лабораторных работ, изучению вопросов теории и т. д. Такая форма работы является очень важной.

Во-первых, при ее использовании экономится время, которое преподаватель будет выделять на дополнительное разъяснение уже пройденного материала и, поэтому, он сможет выделить на занятии больше времени для изучения нового материала (это, как раз таки, прежде всего, будет нацелено на того же наиболее способного студента).

Во-вторых, когда студентов консультирует один из них, то это происходит на более доступном для них языке, что, несомненно, способствует хорошему усвоению материала.

Вначале перехода преподавания в режим удаленного доступа дисциплины «Статистические методы в психологии» на факультете психологии и педагогики ГГУ имени Ф. Скорины, использовалась платформа джитси мит (на болгарском «жити» – провода) – система интернет-телефонии и мгновенного обмена сообщениями. Ввиду своей простоты, система позволяла использовать мобильные телефоны для обмена информацией. Однако существовал ряд минусов, которые значительно затрудняли учебную работу. Прежде всего, это воз-

возможность любого участника заблокировать любого другого участника. Кроме того, общение сводилось только к голосовым контактам. Если же требовалось передать какую-либо письменную информацию или рисунок, то это можно было сделать только по другим каким-либо каналам связи и, в лучшем случае, параллельно с общением в джитси мит.

В этой ситуации указанная выше форма работы (консультирование в студенческом коллективе) практически была сведена к нулю.

Решить проблему позволил переход на новую платформу – discord. Эта платформа позволяла не только вести голосовой канал, но и давала возможность, как вписывать в чат текстовую информацию, вводимую с клавиатуры компьютера, так и вставлять в него фотографии и элементы медиафайлов.

Переход на discord вернул к жизни консультирование студентов друг с другом по вопросам учебного процесса. Это оказалось очень важным для выполнения и сдачи лабораторных работ, поскольку задачи лабораторных работ разделены на варианты и каждый вариант в ряде случаев содержит некоторые нюансы, что делает его решение непохожим на решение другого. В этом случае оказалась особенно важной роль студента, который уже успел разобраться в том, как выполняется лабораторная работа и, конечно в силу своей любознательности постарался познакомиться и со всеми нюансами, которые могут возникнуть при выполнении конкретных вариантов.

К сожалению, нельзя не отметить и негативные явления, которые возникли в результате нежелания некоторых студентов выполнять работу самостоятельно. Для успешной сдачи лабораторной работы, студентам необходимо было предоставить сфотографированные листы своих лабораторных работ. Большинство студентов проявило сознательность и выполняло лабораторные работы полностью самостоятельно, исправляя ошибки и отправляя фотографии исправленных работ. Однако, к сожалению, нашлись и такие, кто использовал нечестные способы. Доходило даже до того, что делались фотографии чужих текстов и выдавались за свои собственные. При этом делалось заявление о том, что автор обладает несколькими почерками и может писать одним из них в зависимости от настроения. В ответ таким авторам выдвигалось требование выполнить всю работу только одним своим почерком.

Конечно, в конечном итоге таких студентов заставили работать самостоятельно и все же сдать эти работы. Им пришлось пройти через дополнительные консультации (которые преподавателю, кстати, достались внеурочно), через пересдачи. Были и отчисления. В результате студенты поняли, что лучше с самого начала делать все так, как надо, чем потом пройти через пересдачи и, может быть даже пойти на отчисление.

Таким образом, был накоплен некоторый опыт учебной работы в условиях удаленного доступа. Этот опыт будет, несомненно, очень полезным в будущем, если когда-либо возникнет подобная ситуация.

Прежде всего, удастся избежать повторения ошибок. Ну и, конечно же, будет значительно легче открыть новые нюансы этого процесса – как положительные, так и отрицательные.

А. А. Атвиновский

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

АНАЛОГ ЛЕММЫ ВИНЕРА ДЛЯ РЯДОВ ВОЛЬФА-ДАНЖУА

Введение

Следуя [1], рядами Вольфа-Данжуа мы будем называть ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - \lambda_k},$$

где $A_k \in \mathbb{C}$, $\{A_k\}_{k \geq 1} \in l^1$, $(\lambda_1, \lambda_1, \dots)$ – ограниченная последовательность комплексных чисел.

В работе [2] показано, что если функция f с вещественными полюсами, образующими монотонно возрастающую и ограниченную последовательность, разлагается в ряд Вольфа-Данжуа с положительными коэффициентами, и если мы вычтем из функции $1/f$ ее «линейную часть», то оставшаяся «дробная часть» этой функции тоже будет разлагаться в ряд Вольфа-Данжуа (и ее полюсы тоже вещественны, а коэффициенты ряда отрицательны). При этом оказалось, что условия положительности коэффициентов и вещественности полюсов нельзя отбросить.

Приведем эту теорему.

Теорема 1. [2] Пусть функция f представима в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k - z},$$

где $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ – монотонная и ограниченная последовательность действительных чисел. Тогда

$$\frac{1}{f(z)} = \alpha + \beta z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{t_n - z},$$

где

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right)^2}, \quad \beta = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} c_k},$$

t_n – все нули функции $f(z)$, $b_n = 1/f'(t_n) > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Заметим, что данная теорема является аналогом леммы Винера для рядов Вольфа-Данжуа из теории рядов Фурье. Как известно, эта лемма утверждает, что если периодическая функция f разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье и если f нигде не обращается в нуль, то $1/f$ также разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье (см., например, [3]). Аналогичное утверждение верно и для функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Тейлора (см. там же, с. 174).

Разумеется, механическая переформулировка леммы Винера для функции f , разлагающейся в ряд Вольфа-Данжуа, неверна, поскольку для такой функции $f(\infty) = 0$.

Основной результат.

В данной заметке представлена теорема, которая является обобщением теоремы 1 на случай, когда последовательность действительных чисел $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ монотонно возрастает и $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$.

Теорема 2. Пусть функция f представима в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k - z},$$

где $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ – монотонно возрастающая и $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ последовательность действительных чисел, для которой $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k < \infty$. Тогда

$$\frac{1}{f(z)} = \alpha + \beta z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{t_n - z},$$

где

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right)^2}, \quad \beta = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} c_k},$$

t_n – все нули функции $f(z)$, $b_n = 1/f'(t_n) > 0$ ($n=1, 2, \dots$), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Список использованных источников

1 Сибилев, Р. В. Теорема единственности для рядов Вольфа–Данжуа / Р. В. Сибилев // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 170–199.

2 Миротин, А. Р. О мультипликативном обращении рядов Вольфа–Данжуа / А. Р. Миротин, А. А. Атвиновский // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 4. – С. 147–154.

3 Кахан, Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье / Ж.-П. Кахан. – Москва : Мир, – 1976. – 210 с.

М. С. Белокурский

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ЗАДАЧА ЕРУГИНА О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕВЫРОЖДЕННЫМ СТАЦИОНАРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{x} = (AP(t) + B)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n > 2, \quad (1)$$

где A, B – постоянные $n \times n$ -матрицы, $P(t)$ – непрерывная ω -периодическая $n \times n$ -матрица. В системе (1) матрицы A и $P(t)$ – стационарный и периодический коэффициент соответственно. Вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений такой системы с диагональным периодическим коэффициентом изучались Н. П. Еругиным [1]. Найдем условия существования сильно нерегулярных периодических решений линейной системы (1) с недиагональным периодическим коэффициентом при условии, что стационарный коэффициент является невырожденным, т. е. $\det A \neq 0$.

Пусть $\tilde{P}(t) = P(t) - P$, где $P = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(\tau) d\tau$ – среднее значение ω -периодического коэффициента и r – столбцовый ранг матрицы $\tilde{P}(t)$ ($0 < r \leq n$). Обозначим через Q такую постоянную неособенную $n \times n$ -матрицу, что у матрицы $\tilde{P}(t)Q$ первые $d = n - r$ столбцов будут нулевыми, в то время как остальные r столбцов будут линейно независимыми. Обозначим также через $F^{[d,d]}$, $F_{[r,d]}$ – левый верхний и левый нижний блоки матрицы $F = Q^{-1}BQ$ соответственно (нижние индексы указывают размерность блоков). Пусть Ω – такое действительное число, что отношение ω/Ω является иррациональным.

Теорема 1 [2]. Предположим, что в системе (1) стационарный коэффициент A является невырожденным. Для того, чтобы система (1) имела сильно нерегулярное Ω -периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) для столбцового ранга матрицы $\tilde{P}(t)$ было справедливо неравенство

$$\text{rank}_{\text{col}} \tilde{P} = r < n;$$

2) среди собственных значений матрицы $F^{[d,d]}$ имелись числа

$$\pm i\lambda_j \quad (j=1, \dots, d'; \quad 1 \leq d' \leq [d/2]), \quad (2)$$

где $\lambda_j = 2k_j\pi/\Omega$, $k_j \in \mathbb{N}_0$;

3) имело место тождество

$$F_{[r,d]} \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t \equiv 0, \quad (3)$$

где

$$y^{[d]}(t) = \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t \quad (4)$$

является Ω -периодическим решением стационарной системы $\dot{y}^{[d]} = F^{[d,d]} y^{[d]}$, коэффициенты a_j , b_j – постоянные векторы.

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида

$$x(t) = Q \text{col} (y^{[d]}(t), 0, \dots, 0). \quad (5)$$

В качестве примера рассмотрим $\sqrt{2}\pi$ -периодическую систему

$$\dot{x}_1 = -x_2(1 + 3 \sin \sqrt{2}t) + x_3 \sin \sqrt{2}t,$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 3x_2 \cos \sqrt{2}t - x_3 \cos \sqrt{2}t,$$

$$\dot{x}_3 = 9x_1 + x_2(3 \sin \sqrt{2}t - 6 \cos \sqrt{2}t) - x_3(\sin \sqrt{2}t - 2 \cos \sqrt{2}t),$$

которая имеет $2\pi/\sqrt{3}$ -периодическое решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \sqrt{3}t + b \sin \sqrt{3}t \\ a\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t - b\sqrt{3} \cos \sqrt{3}t \\ 3a\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t - 3b\sqrt{3} \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix}.$$

Ввиду иррациональности отношения чисел $\sqrt{2}\pi$ и $2\pi/\sqrt{3}$ решение является сильно нерегулярным.

Следствие 1 [3]. Пусть в системе (1) стационарный коэффициент A является невырожденным, а среднее значение периодического коэффициента $P(t)$ является нулевым.

Для того, чтобы система (1) имела сильно нерегулярное Ω -периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) для столбцового ранга матрицы $P(t)$ было справедливо неравенство

$$\text{rank}_{\text{col}} P = r < n;$$

2) среди собственных значений матрицы $F^{[d,d]}$ имелись числа вида (2);

3) имело место тождество (3), где (4) является Ω -периодическим решением стационарной системы $\dot{y}^{[d]} = F^{[d,d]} y^{[d]}$.

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (5).

Примером служит $2\pi/\sqrt{3}$ -периодическая система

$$\dot{x}_1 = -x_1 \sin \sqrt{3}t - x_2(1 + \sin \sqrt{3}t) + x_3 \sin \sqrt{3}t,$$

$$\dot{x}_2 = x_1(1 - \cos \sqrt{3}t) - x_2 \cos \sqrt{3}t + x_3 \cos \sqrt{3}t,$$

$$\dot{x}_3 = x_1(1 + 5 \sin \sqrt{3}t) - x_2(1 - 5 \sin \sqrt{3}t) - 5x_3 \sin \sqrt{3}t.$$

Она имеет сильно нерегулярное 2π -периодическое решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ a \sin t - b \cos t \\ (a-b) \cos t + (a+b) \sin t \end{pmatrix}.$$

Будем теперь считать периодический коэффициент верхним треугольным, т. е.

$$p_{ij}(t) \equiv 0, \quad i > j \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (6)$$

где $p_{ij}(t)$ – элементы матрицы $P(t)$.

Теорема 2 [2]. Пусть в системе (1) стационарный коэффициент является невырожденным, а периодический коэффициент удовлетворяет условию (6). Если все диагональные элементы периодического верхнего треугольного коэффициента отличны от стационарных, то система (1) не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличных от тривиального.

Список использованных источников

1 Еругин, Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. – Минск : Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.

2 Белокурский, М. С. Решение задачи Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с треугольным периодическим коэффициентом / М. С. Белокурский, А. К. Деменчук // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 4. – С. 17–22.

3 Белокурский, М. С. Решение задачи Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с нулевым средним периодическим коэффициентом / М. С. Белокурский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 35–42.

Е. М. Березовская, И. С. Мамичев

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

О ТЕСТИРОВАНИИ WEB-ПРИЛОЖЕНИЯ «ТОВАРЫ»

Тестирование – это процесс, который заключается в проверке соответствия приложения заявленным характеристикам и требованиям, требованиям эксплуатации в различных окружениях, с различными нагрузками, требованиям по безопасности, требованиям по удобству использования.

С использованием [1, с. 496, 2, с. 127] в работах [3, с. 150–151, 4, с. 195–199] спроектировано web-приложение, с помощью которого клиенты смогут покупать, продавать и обмениваться товарами, включающее в себя разработку пользовательского интерфейса, панели управления администратора и базу данных. Разработаны алгоритмы для реализации поставленной задачи; построены структуры и связи таблиц базы данных; созданы функциональные запросы обновления таблиц; рассмотрены вопросы электронной коммерции и безопасности сайта; разобраны базовые средства поиска и сортировки. Были реализованы модули для работы с товарами, категориями товаров, новостями и объявлениями о покупке, продаже и обмене. Реализованы действия с корзиной пользователя, навигация по разделам, поиск по товарам, регистрация и авторизация пользователя, обработка заказов.

Прежде чем опубликовать приложение в сети, оно прошло немаловажный этап разработки – тестирование.

В зависимости от направленности тестирования, проверяется та или иная особенность web-приложения. Тестирование не рассматривается, как самостоятельный этап работы над web-приложением, так как это инструмент маркетингового анализа web-приложения. Результаты тестирования наравне с общими результатами маркетингового анализа используются при перепроектировании web-приложения.

Основными целями тестирования web-приложения являются:

- 1 Выявление недостатков web-приложения, которые препятствуют его маркетинговой и коммерческой эффективности.
- 2 Подготовка рекомендаций, выполнение которых поможет устранить выявленные недостатки.

В процессе тестирования разработанного web-приложения был использован инструмент нагрузочного и стрессового тестирования WAPT (рисунок 1).

Данный инструмент создает нагрузку на тестируемый сервер путем эмуляции типичной активности сотен или даже тысяч пользователей, работающих с web-приложением одновременно. Постепенно увеличивая число виртуальных пользователей в процессе тестирования, можно определить максимальную нагрузку, которую выдерживает web-приложение, сохраняя приемлемые параметры производительности, а также заранее обнаружить и устранить проблемы, которые способны привести к сбоям при повседневной работе web-приложения.

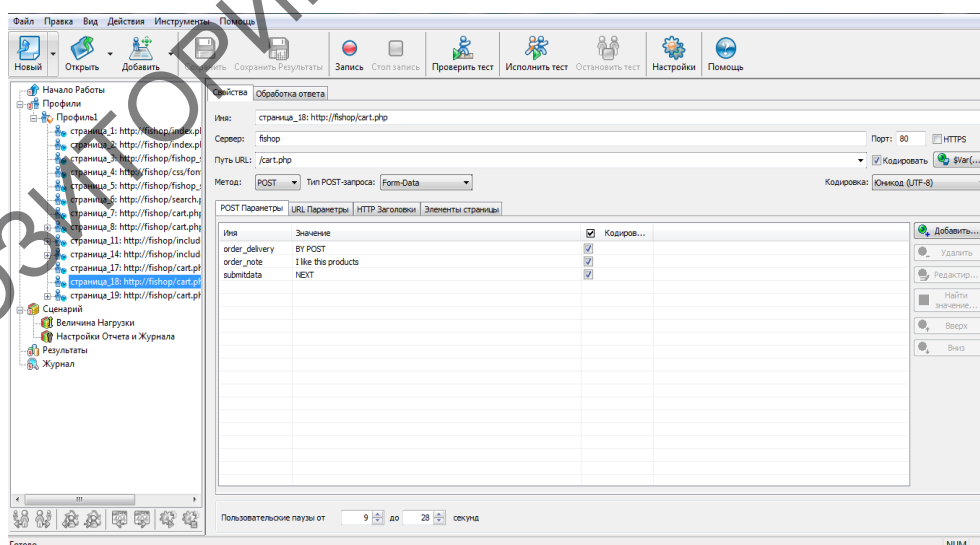


Рисунок 1 – Главное окно инструмента WAPT

Для проведения теста необходимо создать сценарий, который определяет число виртуальных пользователей, продолжительность теста и другие параметры (рисунок 2).

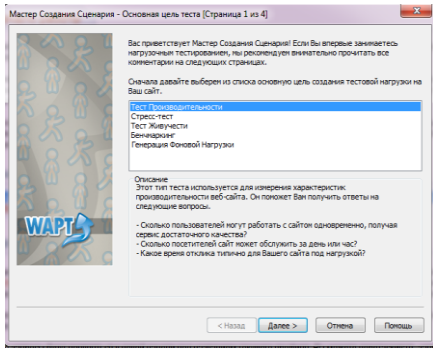


Рисунок 2 – Мастер создания сценария

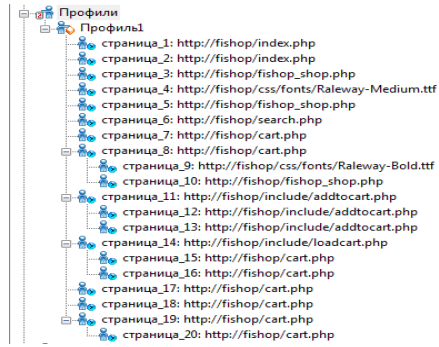


Рисунок 3 – Последовательность страниц

Во время теста каждый виртуальный пользователь выполняет действия, заданные в его профиле. Каждое выполнение профиля порождает одну пользовательскую сессию. Когда заканчивается одна сессия, начинается следующая, и так далее, пока не завершится тест.

В простейшем случае профиль – это последовательность страниц, которые пользователь должен посетить на сайте. Изначально эта последовательность задается путем записи профиля в Рекордере. Для этого необходимо пройти весь необходимый путь по web-приложению в браузере. WAPT запишет каждый шаг в виде последовательности HTTP-запросов (рисунок 3).

Успешных страниц в секунду												
Профиль	0:00:00-0:01:24	0:01:24-0:02:48	0:02:48-0:04:12	0:04:12-0:05:36	0:05:36-0:07:00	0:07:00-0:08:24	0:08:24-0:09:48	0:09:48-0:11:12	0:11:12-0:12:36	0:12:36-0:14:00	Всего	
Профиль1	0.31	0.81	0.71	1.34	0.87	2.83	1.01	0.96	0.71	1.10	0.86	
Всего	0.31	0.81	0.71	1.34	0.87	2.83	1.01	0.96	0.71	1.10	0.86	

Успешных хитов в секунду												
Профиль	0:00:00-0:01:24	0:01:24-0:02:48	0:02:48-0:04:12	0:04:12-0:05:36	0:05:36-0:07:00	0:07:00-0:08:24	0:08:24-0:09:48	0:09:48-0:11:12	0:11:12-0:12:36	0:12:36-0:14:00	Всего	
Профиль1	0.87	3.46	2.86	1.75	3.89	2.66	1.93	3.76	2.49	1.94	2.56	
Всего	0.87	3.46	2.86	1.75	3.89	2.66	1.93	3.76	2.49	1.94	2.56	

Время отклика, сек (с учетом элементов страницы)												
Имя	0:00:00-0:01:24	0:01:24-0:02:48	0:02:48-0:04:12	0:04:12-0:05:36	0:05:36-0:07:00	0:07:00-0:08:24	0:08:24-0:09:48	0:09:48-0:11:12	0:11:12-0:12:36	0:12:36-0:14:00	Всего	
Профиль1.страница 1: http://fishop/fishop_shop.php	8	2	0	10	0	2	6	2	2	6	38	
Мин	0.01(0.01)	0.03(0.03)	-	0.01(0.01)	-	0.03(0.03)	0.02(0.02)	0.03(0.03)	0(0)	0(0)	0(0)	
Макс	0.05(0.05)	0.05(0.05)	-	0.08(0.08)	-	0.03(0.03)	0.03(0.03)	0.05(0.05)	0.02(0.02)	0.03(0.03)	0.06(0.06)	
Среднее90	0.03(0.03)	0.04(0.04)	-	0.03(0.03)	-	0.03(0.03)	0.03(0.03)	0.04(0.04)	0.01(0.01)	0.02(0.02)	0.03(0.03)	
Профиль1.страница 2: http://fishop/registration.php	7	3	0	4	0	4	5	2	5	2	27	
Мин	0(0.03)	0.01(0.05)	-	0(0.02)	0(0.02)	0.01(0.08)	0(0.03)	0(0.03)	0.01(0.05)	0(0.01)	0(0.01)	
Макс	0.08(0.14)	0.02(0.06)	-	0.02(0.06)	0.02(0.06)	0.01(0.08)	0.02(0.08)	0.02(0.08)	0.03(0.08)	0.03(0.06)	0.06(0.14)	
Среднее90	0.02(0.07)	0.02(0.06)	-	0.01(0.04)	0.01(0.05)	0.01(0.08)	0.01(0.04)	0.01(0.04)	0.02(0.06)	0.01(0.03)	0.01(0.05)	
Профиль1.страница 3: http://fishop/css/fonts/Raleway-Bold.ttf	4	6	0	5	5	1	5	4	1	5	36	
Мин	0(0.02)	0(0.01)	-	0(0.02)	0(0.02)	0.02(0.02)	0(0)	0(0)	0.02(0.03)	0(0)	0(0)	
Макс	0(0.02)	0(0.02)	-	0(0.02)	0.02(0.02)	0.02(0.02)	0.02(0.02)	0.02(0.02)	0.02(0.02)	0.02(0.02)	0.02(0.02)	
Среднее90	0(0.01)	0(0.01)	-	0(0.01)	0.01(0.01)	0.02(0.02)	0.00(0.01)	0.00(0.01)	0.02(0.03)	0.01(0.01)	0.00(0.01)	
Среднее90	0(0.02)	0(0.02)	-	0(0.02)	0.02(0.02)	0.02(0.02)	0.01(0.02)	0.01(0.02)	0.02(0.03)	0.02(0.03)	0.02(0.03)	

Рисунок 4 – Вывод результата тестов в виде таблицы

После создания профиля программа может приступить к тестированию web-приложения. После его окончания на экран будет выведен итоговый отчет. Как показано на рисунках 4 и 5, результаты теста показаны в виде графиков и таблиц.

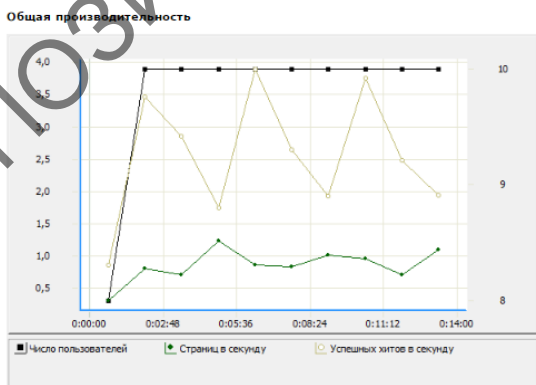


Рисунок 5 – Вывод результата тестов в виде графика

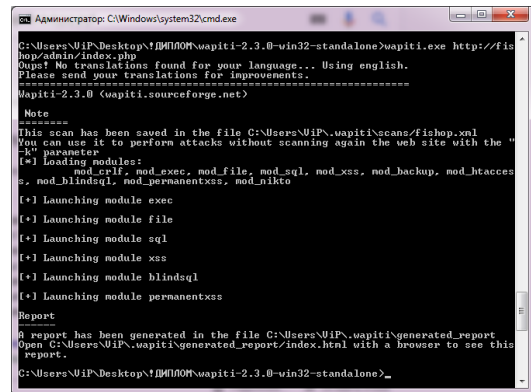
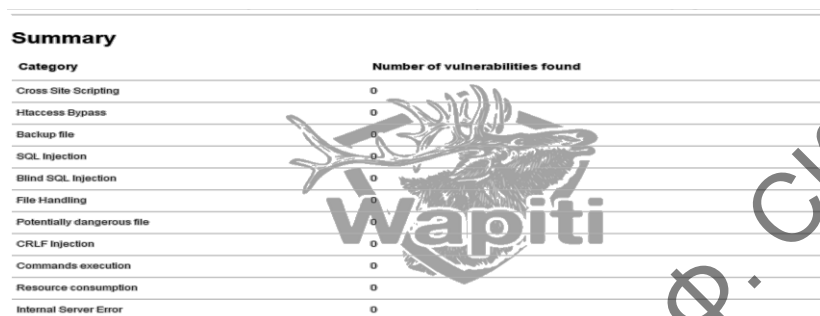


Рисунок 6 – Wapiti

В процессе тестирования безопасности приложения использовался сканер Wapiti. Данный сканер является консольным и в своей основе он несет принцип тестирования черного ящика (анализируются не исходники приложения, а ответы сервера на запросы с измененными параметрами). Утилита сначала анализирует структуру сайта, ищет доступные сценарии, анализирует параметры, а затем включает свой фаззер.

Для того чтобы запустить сканер, необходимо открыть интерпретатор командной строки cmd, перейти в папку с установленным сканером и запустить его, указав страницу web-приложения, которую необходимо проверить (рисунок 6).

Запускать данный сканер можно с различными опциями. После полного сканирования Wapiti сформирует отчет в формате HTML, который очень удобен для просмотра.



Summary	
Category	Number of vulnerabilities found
Cross Site Scripting	0
Htaccess Bypass	0
Backup file	0
SQL Injection	0
Blind SQL Injection	0
File Handling	0
Potentially dangerous file	0
CRLF Injection	0
Commands execution	0
Resource consumption	0
Internal Server Error	0

Рисунок 7 – Отчет полного сканирования Wapiti

Как показано на рисунке 7, для главной страницы администратора не было найдено ни одной уязвимости.

Список использованных источников

1 Никсон, Р. Создаем динамические веб-сайты с помощью PHP, MySQL, JavaScript и CSS. 2-е изд. / Р. Никсон. – Санкт-Петербург : Питер, 2013. – 560 с.

2 Скляр, Д. Изучаем PHP: Руководство по созданию интерактивных веб-сайтов / Д. Скляр. – Санкт-Петербург : ООО «Альфа-книга», 2017. – 464 с.

3 Мамичев, И. С. Разработка и тестирование web-приложения по осуществлению действий с товарами / И. С. Мамичев, Е. М. Березовская // Горинские чтения. Наука молодых – инновационному развитию АПК: материалы Международной студенческой научной конференции, Майский, 28–29 марта 2019 г.: в 2 т. / Издательство ФГБОУ ВО Белгородский ГАУ; редкол.: А. В. Турьянский [и др.]. – Майский, 2019. – Т. 2. – С. 150–151.

4 Мамичев, И. С. Разработка макет-площадки для организации работы с товарами / И. С. Мамичев // Творчество молодых-2020: сб. науч. работ студентов, магистрантов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель, 2020 г.: в 3 ч. / М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т ГГУ им. Ф. Скорины; главн. ред. Р. В. Бородич. – Гомель, 2020. – Ч. 1. – С. 195–199.

А. Ф. Васильев, А. Г. Коранчук

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ ФОРМАЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ ЛОКАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Свойства примарных подгрупп и их нормализаторов, так называемых локальных подгрупп, широко применялись при классификации простых неабелевых групп. Теория локальных конечных групп изначально

была направлена на установление разрешимости групп нечетного порядка в пределах классификации простых групп. В дальнейшем эффективность и полезность локальных подгрупп проявилась при исследовании непростых, в частности, разрешимых групп.

Рассматривается следующая общая проблема. *Выяснить как свойства локальных подгрупп влияют на строение непростых групп?*

В настоящее время данная проблема изучается в различных направлениях. Первое направление связано с исследованием строения групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп (кратко, силовские нормализаторы) принадлежат данной формации.

В 1986 году М. Г. Бьянки, А. Джиллио, Б. Майри, П. Хаук в работе [1, с. 193–197] установили, что группа нильпотентна, если силовские нормализаторы, т. е. нормализаторы ее силовских подгрупп, нильпотентны.

А. Баллестер-Болинше и Л. А. Шеметков [2, с. 1–2] доказали, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда нормализатор каждой силовской p -подгруппы p -нильпотентен для любого простого числа p . Много работ различных авторов посвящено исследованию строения групп, у которых силовские нормализаторы принадлежат данной насыщенной формации F , см. обзор [3].

Другое направление связано с изучением свойств групп с заданным вложением ее локальных подгрупп. Например, хорошо известно, что группа нильпотентна, если каждая ее силовская подгруппа нормальна (субнормальна) в ней. Классическая теорема Глаубермана (1970) [4] утверждает, что группа является p -группой для некоторого простого числа p , если ее силовские подгруппы самонормализуемы.

В настоящее время широко применяется следующее обобщение субнормальности, введенное Т. Хоуксом (1969) в разрешимом случае и Л. А. Шеметковым (1978) в произвольном случае, см. [5, с. 236.].

Пусть F – непустая формация. Подгруппа H группы G называется F -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^F \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$. Если $F = N$ – класс всех нильпотентных групп, то любая N -субнормальная подгруппа будет субнормальной в группе. В общем случае обратное утверждение не выполняется, но для разрешимых групп понятия N -субнормальной и субнормальной подгрупп эквивалентны.

Интересное обобщение субнормальной подгруппы (понятие F -достижимой или согласно [5, с. 236] K - F -субнормальной подгруппы) было предложено О. Кегелем (1978).

Подгруппа H группы G называется K - F -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $H_i^F \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Ясно, что в любой группе субнормальная подгруппа является K - F -субнормальной, однако обратное утверждение неверно в общем случае. Эквивалентность понятий субнормальной и K - F -субнормальной подгруппы имеет место для $F = N$.

В монографии [5], [6] вошли результаты многочисленных работ, в которых изучались свойства F -субнормальных и K - F -субнормальных подгрупп и их приложения. В работе [7] было начато рассмотрение следующей проблемы.

Как F -субнормальные (K - F -субнормальные) силовские подгруппы влияют на строение всей группы (F – непустая формация).

В работе [8] была введена и изучалась конструкция следующего класса групп.

Определение 1. Пусть F – непустая формация. Через wF обозначается класс групп G , у которых $\pi(G) \subseteq \pi(F)$ и любая силовская подгруппа из G F -субнормальна в G .

Теорема 2 [8]. Класс групп wF является наследственной насыщенной формацией всякий раз, как F – наследственная насыщенная формация.

Теорема 3 [8]. Пусть F – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) wF совпадает с F ;
- 2) для разрешимой минимальной не F -группы G либо $|G|$ – простое число, либо G – бипримарная дисперсивная группа;

3) для неразрешимой минимальной не F -группы G с единичной подгруппой Фиттинга G является монолитической группой такой, что ее цоколь $\text{Soc}(G)$ – неабелева группа и $G/\text{Soc}(G)$ – примарная группа.

В работе В. Н. Семенчука [9] была получена следующая

Теорема 4. Пусть F – непустая наследственная формация, у которой любая минимальная не F -группа разрешима. Любая группа G , у которой все силовские подгруппы F -субнормальны и принадлежат F , принадлежит F , тогда и только тогда, когда любая минимальная не F -группа G является либо бипримарной p -замкнутой группой ($p \in \pi(G)$), либо примарной группой.

В [10] В. С. Монахов и И. Л. Сохор получили новые свойства класса wF .

Теорема 5 [10]. Пусть в каждой бипримарной минимальной не F -группе F -кордикал является силовской подгруппой. Тогда

- 1) если $G \in wF$, то F принадлежит любая бипримарная подгруппа из G ;
- 2) любая разрешимая минимальная не wF -группа является бипримарной минимальной не F -группой;
- 3) разрешимая группа G принадлежит wF тогда и только тогда, когда любая метанильпотентная подгруппа группы G принадлежит F .

В работе [11] были введены и изучались классы $W_\pi F$ и $\overline{W}_\pi F$, которые являются обобщениями класса wF .

Весьма эффективным оказалось введенное в работе [12] следующие

Определение 2. Подгруппа H группы G называется P -субнормальной в G , если либо $H=G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

В работе [13] В. С. Монахов и В. Н. Княгина установили, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда в ней все силовские нормализаторы P -субнормальны.

Учитывая, что всякая U -субнормальная подгруппа является P -субнормальной, естественно рассмотреть следующее

Определение 3 [14]. Пусть F – непустая формация групп. Подгруппа H группы G называется сильно K - F -субнормальной в G , если $N_G(H)$ является F -субнормальной подгруппой в G .

Любая сильно K - F -субнормальная подгруппа является K - F -субнормальной в группе. Это следует из того, что подгруппа группы нормальна в своем нормализаторе. Обратное утверждение в общем случае не выполняется.

Теорема 6. Пусть F – наследственная насыщенная формация, состоящая из дисперсивных групп, и G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in F$;
- 2) $\pi(G) \subseteq \pi(F)$ и каждая силовская подгруппа из G сильно K - F -субнормальна в G .

Следствие 7. Группа G сверхразрешима всякий раз, как каждая силовская подгруппа из G сильно K - U -субнормальна в G .

Здесь U – формация всех сверхразрешимых групп.

Теорема 8. Пусть F – насыщенная формация, состоящая из метанильпотентных групп, и G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $G \in F$;
- 2) $\pi(G) \subseteq \pi(F)$ и каждая силовская подгруппа из G сильно K - F -субнормальна в G .

Используя понятие сильно K - F -субнормальной подгруппы, в [15] был введен следующий класс групп.

Определение 4. Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации F введем следующий класс групп:

$w_\pi * F = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(F) \text{ и для любого } q \in \pi \cap \pi(G) \text{ всякая силовская } q\text{-подгруппа является сильно } F\text{-субнормальной в } G) \text{ и } w_\pi * F = w * F \text{ для } \pi = P.$

В [15] получены свойства класса $w_\pi * F$.

Теорема 9. 1) Если F – непустая формация, то w^*F – гомоморф такой, что $N_{\pi(F)} \subseteq w^*F \subseteq w^*H$, где H – формация и $F \subseteq H$.

2) Если F – непустая наследственная формация, то $F \subseteq w^*F = w^*(w^*F) - S_H$ -замкнутая формация.

Теорема 10. Если F – наследственная формация, то $w^*F \subseteq w_\pi^*F = w_\pi^*(w_\pi^*F)$ и w_π^*F является S_H -замкнутой формацией.

Результаты работы [14] получили дальнейшее развитие в [16].

В [14] приведен пример разрешимой группы, нильпотентной длины 4, у которой силовские нормализаторы F -субнормальны в G , но G не принадлежит F . Данный пример мотивирует следующее

Определение 4 [17]. Пусть F – формация. Подгруппа H группы G называется абсолютно K - F -субнормальной (абсолютно F -субнормальной) в G , если любая содержащая H подгруппа R является K - F -субнормальной (соответственно, F -субнормальной) в G .

Теорема 11 [17]. Пусть F – разрешимая насыщенная наследственная формация. Группа G принадлежит F тогда и только тогда, когда $\pi(G) \subseteq \pi(F)$ и каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно K - F -субнормальной подгруппой в G .

Следствие 12 [17]. Пусть F – насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Группа G принадлежит F тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно K - F -субнормальной подгруппой в G .

В заключение отметим, что к настоящему времени изучены группы, у которых циклические примарные подгруппы P -субнормальны [18], F -субнормальны (K - F -субнормальны) [19].

Проблема. Пусть F – непустая формация групп. Установить строение групп, у которых нормализаторы примарных циклических подгрупп P -субнормальны (F -субнормальны, K - F -субнормальны).

Список использованных источников

1 Bianci, M. G. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M. G. Bianci, A. Gillio Berta Mayri, P. Hauck // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47. – P. 193–197.

2 Ballester-Bolinches, A. On normalizers of Sylow subgroups in finite groups / A. Ballester-Bolinches, L. A. Shemetkov // Siberian Math. J. – 1999. – Vol. 40, № 1. – P. 1–2.

3 D’Aniello, A. A. Survey on Sylow Normalizers and Classes of groups / A. D’Aniello, L. S. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos // Appl. Math. Sci. – 2014. – Vol. 8, № 134. – P. 6745–6752.

4 Glaubermann, G. Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glaubermann // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 46–56.

5 Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups. / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro / – Dordrecht : Springer-Verl., – 2006. – 385 p.

6 Каморников, С. Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. – Минск: Бел. навука, 2003. – 254 с.

7 Васильев, А. Ф. О влиянии примарных F -субнормальных подгрупп на строение группы / А. Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

8 Васильев, А. Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // ПФМТ. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

9 Семенчук, В. Н. Конечные группы с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / В. Н. Семенчук // ПФМТ. – 2016. – № 3 (28). – С. 58–60.

10 Монахов, В. С. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, № 4. – С. 851–863.

11 Васильев, А. Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. С. Вегера // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

- 12 Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
- 13 Kniahina, V. N. On supersolvability of finite groups with P-subnormal subgroups / V. N. Kniahina, V. S. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.
- 14 Васильев, А. Ф. Конечные группы с сильно K-F-субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев // ПФМТ. – 2018. – № 4 (37). – С. 66–71.
- 15 Vasilyeva, T. I. On one operation on the formations of finite groups / T. I. Vasilyeva, A. G. Koranchuk // ПФМТ. – 2020. – № 2 (43). – С. 58–63.
- 16 Васильев, А. Ф. О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. Г. Коранчук // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, № 5. – С. 680–692.
- 17 Васильев, А. Ф. Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев, А. Г. Мельченко // ПФМТ. – 2019. – № 4 (41). – С. 44–50.
- 18 Monakhov, V. S. Finite groups with P-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ricerche mat. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.
- 19 Мурашко, В. И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В. И. Мурашко // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.

А. Б. Демуськов

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ОБ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ

На сегодняшний день в нашу жизнь, как на производстве, так и в быту проникают информационные технологии. И с появлением новых электронных устройств и программного обеспечения к ним появляются и информационные угрозы. Они могут проявляться как угрозы, порча и кража данных, блокирование баз данных и каналов связи вплоть до вывода из строя ресурсных серверов [1]. Для построения защиты от всевозможных информационных атак на любом предприятии должна быть построена система информационной безопасности. Под системой информационной безопасности можно понимать набор принятых управленческих решений, направленных на защиту, как самой информации, так и ресурсов с ней связанной. Как правило, систему безопасности строят на двух уровнях [2]. К первому уровню относят решения, затрагивающие предприятие в целом. Они могут носить, весьма общий характер и, как правило, должны исходить от руководства предприятия. На этот уровень выносятся управление защитными ресурсами и координация использования этих ресурсов, определение специального персонала для защиты важных систем. На этом уровне система должна четко очерчивать сферу своего влияния. Должны быть определены должностные лица и их обязанности по разработке системы безопасности и по проведению ее в жизнь. В этом смысле система безопасности является основой подотчетности определённого персонала.

Ко второму уровню можно отнести вопросы отдельных аспектов информационной безопасности, но важных для различных систем, эксплуатируемых предприятием. Система должна отражать запрещённые действия и последствия за их нарушение.

Среди действий по реализации информационной безопасности в жизнь являются управленческие мероприятия.

Чтобы понять и реализовать программу информационной безопасности, ее необходимо структурировать в соответствии со структурой предприятия. В простейшем случае достаточно двух уровней: верхнего, который охватывает всю организацию, и нижнего, который относится к отдельным сервисам или группам однородных сервисов.

Программу верхнего уровня возглавляет лицо, отвечающее за информационную безопасность предприятия. У этой программы должны быть определены главные цели:

- Управление рисками (оценка рисков, выбор эффективных средств защиты, и т. д.);
- Координация деятельности в области информационной безопасности;
- Стратегическое планирование;
- Контроль деятельности в области информационной безопасности.

В рамках программы верхнего уровня принимаются стратегические решения по безопасности, оцениваются технологические новинки. Информационные технологии развиваются очень быстро, и необходимо иметь четкие понятия отслеживания и внедрения новых средств.

Контроль деятельности в области информационной безопасности имеет двоякую направленность. Во-первых, необходимо гарантировать, что действия предприятия не противоречат законам. Во-вторых, нужно постоянно отслеживать состояние информационной безопасности внутри предприятия, и реагировать на все нарушения.

Так же необходимо понимать, что программа верхнего уровня должна занимать четко определенное место в деятельности предприятия, она должна официально приниматься и поддерживаться руководством, у нее должны быть определены штаты, бюджет и определённый уровень полномочий.

Целью программы нижнего уровня является обеспечение надежной и экономичной защитой конкретных сервисов. На этом уровне решается, какие механизмы защиты использовать, закупаются и устанавливаются технические средства, выполняется повседневное администрирование, отслеживается состояние слабых мест.

Из множества возникающих рисков при выполнении мероприятий по защите интерес составляют только те, которые являются следствием использования информационных технологий [3].

Работы по управлению рисками состоят в том, чтобы оценить их размер, выработать меры по уменьшению их размера и затем убедиться, что риски приемлемы или могут быть сделаны такими.

Риски нужно контролировать постоянно. И качественно выполненная и документированная первая оценка может существенно упростить последующую деятельность.

Для небольшого предприятия допустимо рассматривать всю информационную инфраструктуру, однако, если предприятие крупное, всеобъемлющая оценка может потребовать неприемлемых затрат времени и сил. В таком случае следует сосредоточиться на наиболее важных сервисах, заранее соглашаясь с приближенностью итоговой оценки. Если важных сервисов все еще много, выбираются те из них, риски для которых заведомо велики или неизвестны.

Очень важно выбрать разумную методологию оценки рисков. Целью оценки является получение ответа на два вопроса: приемлемы ли существующие риски, и если нет, то какие защитные средства экономически выгодно использовать.

Выбирая подходящий способ защиты, необходимо учитывать возможность покрытия одним сервисом безопасности сразу нескольких и других сервисов. Важным обстоятельством является совместимость нового средства со сложившейся операционной и аппаратно-программной структурой предприятия и его подразделений.

Реализацию и проверку новых сервисов безопасности следует предварительно спланировать. Необходимо составить план тестирования, в котором учесть и наличие финансовых средств, и сроки обучения персонала. Когда намеченные меры приняты, необходимо проверить их действия и убедиться, что остаточные риски приемлемы. Если это на самом деле так, значит, все в порядке и можно спокойно намечать дату ближайшей переоценки. В противном случае придется проанализировать допущенные ошибки и провести повторный сеанс управления рисками [4].

Все эти мероприятия и есть основная часть управленческих мер обеспечения информационной безопасности.

Список использованных источников

1 Демуськов, А. Б., Большакова, Г. И., Бышик, Т. П. Проблемы информационной безопасности в компьютерных сетях / А. Б. Демуськов, Г. И. Большакова, Т. П. Бышик // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Научный и производственно-практический журнал – 2003. – №3 (18). – С. 124–129.

2 Демуськов, А. Б. Политики информационной безопасности предприятий / А. Б. Демуськов, В. А. Короткевич, Л. И. Короткевич // Известия Гомельского Госуниверситета им. Ф. Скорины. Научный и производственно-практический журнал – 2003. – №4 (19). – С. 31–36

3 Герасименко, В. А. Основы защиты информации / В. А. Герасименко, А. А. Малуц. – Москва : МИФИ, 1997. – 537 с.

4 Проблемы информационной безопасности в системе высшей школы : X Всерос. науч. конф. : сб. науч. тр. / Научная сессия МИФИ-2003 ; редкол. И. М. Ядыкин (отв. ред.) [и др.]. – Москва : Моск. инж.-физ. ин-т (гос. ун-т), 2003. – 255 с.

М. И. Жадан, А. А. Петушков

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОБОСНОВАННОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИК-ИЗЛУЧЕНИЙ

Использование инфракрасных каналов на сегодняшний день является актуальной задачей. Его используют для передачи данных через ИК-излучение.

Работа [1, с. 89–96], используя ИК-излучение, посвящена созданию системы передачи и обработки информации. Предложенная система способна полностью имитировать реальные поведенческие факторы ведения стрельбы из огнестрельного оружия, такие как перезарядка, точность попадания, скорострельность, возможность осечки и т. д. Система предоставляет возможность определять попадания по «врагу», позволяет сохранять и обрабатывать эти попадания сервере.

В работе [2, с. 95–100] описываются принципы работы компьютерной системы передачи и обработки информации с использованием ИК-излучения, взаимодействие пользователя с системой, которая позволяет контролировать состояние системы используя дисплей. Здесь же описывается возможность конфигурирования и опроса значений параметров при помощи консольных команд.

При практическом применении разработанная система может быть использована правоохранительными и военными органами для обучения боевым навыкам ведения боя, для проведения военно-тактических игр без применения реального оружия.

Основное преимущество разрабатываемой системы перед существующими аналогами, такими как страйкбол и пейнтбол – отсутствие человеческого фактора, т. е. попадания регистрируются системой без участия пользователя. В системе обеспечена простота добавления новых компонентов, возможность создания дополнительных устройств и их тонкое конфигурирование.

В предлагаемой работе обсуждаются вопросы стоимости созданной компьютерной системы передачи информации. Все детали, из которых состоит система, имеют свою стоимость и были приобретены за свои деньги. Поэтому был выбран один из недорогих микроконтроллер. Для наших целей был выбран микроконтроллер, который не имеет избыточности и функциональности, что благоприятно сказалось на стоимости комплектующих элементов. В связи с этим работе был выбран микроконтроллер ATmega 168 с AVR RISC архитектурой и производительностью, удовлетворяющей наши потребности.

На рисунке 1 приведена стоимость оборудования компьютерной системы по трем составляющим: винтовка, жилет и головная повязка. В комплектацию «винтовка» входят: динамик, кнопки и провода соединения, передатчик RF, плата управления, ключ для включения питания, светодиоды, аккумулятор Li-Ion, SD –карта памяти, излучатель в тубусе, корпус винтовки. В комплектацию «жилет» входят приемники излучения, плата управления, ЖК дисплей, жилет тканевый. В комплектацию «головная повязка» входят приемники, плата управления, повязка тканевая. Для каждого элемента и по всей составляющей приведена стоимость единицы оборудования.



Рисунок 1 – Стоимость снаряжения

Экономическая обоснованность применения системы отображена на рисунке 2. Цена предлагаемой разработки здесь сравнивается с ценой с сайта laserwar.ru и актуальной на 10.12.2019.



Рисунок 2 – Сравнительная стоимость разработок

На рисунке 3 приведена стоимость использования системы и ее сравнительная характеристика из расчета 100000 выстрелов. Как следует из результатов, экономическая выгода применения разработанной компьютерной системы передачи информации очевидна.



Рисунок 3 – Стоимость использования

Отметим так же, что достоинствами системы является и то, что она может быть адаптирована для любых устройств подобного типа, например, с более совершенным микроконтроллером. Кроме того, она легко расширяема и достаточно бюджетна для успешного внедрения.

Список использованных источников

- 1 Петушков, А. А. Система передачи информации с использованием ИК-излучений / А. А. Петушков, М. И. Жадан // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2(35). – С. 89–96.
- 2 Петушков, А. А. Принцип и возможности взаимодействия пользователя с системой передачи информации с использованием ИК-излучений / А. А. Петушков, М. И. Жадан // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3(36). – С. 95–100.

V. S. Zakrevskaya
Gomel, F. Skorina Gomel State University

FINITE GROUPS WITH PARTIALLY π -SUBNORMAL SUBGROUPS

All groups considered here are finite and G always denotes a finite group. Moreover, P is the set of all primes, $\pi \subseteq P$ and $\pi' = P \setminus \pi$.

We say that a subgroup A of G is *strongly \mathcal{U} -subnormal* [1] in G if either A is normal in G or $A_G \neq A^G$ and every chief factor of G between A_G and A^G is cyclic.

A subgroup A of G is called *π -subnormal* [2] in G if and only if it is \mathfrak{F} -subnormal in G in the sense of Kegel [3], where \mathfrak{F} is the class of all π' -groups.

We say that a subgroup A of G is *partially π -subnormal* in G if $A = \langle L, T \rangle$, where L is a strongly \mathcal{U} -subnormal subgroup and T is a π -subnormal subgroup of G .

Recall that if $M_n < M_{n-1} < \dots < M_1 < M_0 = G$ (*), where M_i is a maximal subgroup of M_{i-1} for all $i = 1, \dots, n$, then the chain (*) is said to be a *maximal chain of G of length n* and M_n ($n > 0$) is an *n -maximal subgroup* of G .

The relationship between n -maximal subgroups (where $n > 1$) of G and the structure of G was studied by many authors. One of the earliest results in this line research was obtained by Huppert in the article [4] who established the supersolubility of the group whose all second maximal subgroups are normal. In the same article Huppert proved also that if all 3-maximal

subgroups of G are normal in G , then the commutator subgroup G^1 of G is a nilpotent group and the principal rank of G is at most 2. These two results were developed by many authors. Spencer studied [5] the groups G whose every n -maximal chain includes at least one proper subnormal subgroup of G . Mann proved [6] that if all n -maximal subgroups of a soluble group G are subnormal and $n \leq |\pi(G)| - 1$, then G is nilpotent; but if $n \leq |\pi(G)| + 1$, then G is φ -dispersive for some ordering φ of the set of all primes P . Finally, in the case $n \leq |\pi(G)|$ Mann described G completely.

Our main goal here is to obtain generalizations of some of these results on the base of the following

Theorem. *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 3, one of M_3 , M_2 and M_1 is partially π -subnormal in G , then G is π -soluble.*

Corollary 1. (Spencer [5]). *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 3, one of M_3 , M_2 and M_1 is subnormal in G , then G is soluble.*

Corollary 2. (Huppert [4]). *If every 3-maximal subgroup of G is normal in G , then G is soluble.*

References

- 1 Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
- 2 Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
- 3 Kegel, O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. H. Kegel // Mathematische Zeitschrift. – 1962. – Vol. 78 (1). – P. 205–221.
- 4 Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
- 5 Spencer, A. E. Maximal nonnormal chains in finite groups / A. E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27 (1). – P. 167–173.
- 6 Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

Г. Н. Казимиров

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Одна из основных задач теории приближений состоит в нахождении связей между структурными свойствами функций (дифференцируемостью, условием Липшица и т. п.) и порядком стремления к нулю последовательности её наилучших приближений тригонометрическими или алгебраическими многочленами. Первые результаты в этом направлении появились в начале прошлого века (в работах Д. Джексона, С. Н. Берштейна и других авторов). В этих работах для непрерывных 2π -периодических функций были доказаны прямая и обратная теоремы теории приближений для модулей непрерывности степенного типа. В дальнейшем для периодических функций прямая и обратная теоремы теории приближений были доказаны в равномерной метрике для общих модулей гладкости (С. Б. Стечкин). В начале прошлого века была также обнаружена существенная разница между периодическим и непериодическим случаями. А в 1946 году С. М. Никольский показал, что прямая теорема теории приближений для непериодических непре-

¹ Mathematics Subject Classification (2010): 20D10, 20D20, 20D30, 20D35.

рывных функций допускает усиление. И в дальнейшем было показано, что для непрерывных непериодических функций также справедливы прямая и обратная теоремы теории приближений, однако, в отличие от периодического случая они доказаны не для наилучшего, а для поточечного приближения. Аналогичные задачи для непериодического случая рассматривались и в интегральной метрике и было показано, что на интегральную метрику нельзя перенести результаты о поточечном приближении. В то же время оказалось, что прямые и обратные теоремы теории приближений справедливы и для непериодических функций, если обычный модуль гладкости заменить некоторым обобщённым модулем гладкости. Некоторые из таких модулей были предложены Потаповым М. К. (см. [1, с. 223–224]). Им же были доказаны прямые и обратные теоремы для модулей гладкости (модулей непрерывности) порядка $k=1$. Для случая $k > 1$ эти теоремы получены Казимировым Г. Н. (см. [2], [3]) Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. Хотелось бы получить такие же теоремы и для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом. В настоящей работе сделан первый шаг в этом направлении.

Основные определения.

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и,

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty, \text{ а для } p = \infty \text{ функция } f \text{ непрерывна на отрезке } [-1, 1]$$

и $\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим множество таких функций f , что

$$f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p \text{ и } \|f\|_{p,\alpha} = \left\| f(x)(1-x^2)^\alpha \right\|_p.$$

Рассмотрим один из операторов обобщённого сдвига, предложенных в [1]. Положим

$$T_t(f, x, \nu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^1 f(x \cos t + y \sqrt{1-x^2} \sin t) (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy,$$

где $\gamma(\nu) = \int_{-1}^1 (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy$.

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f, x, \nu) = T_t(f, x, \nu) - f(x),$$

$$\Delta_t^k(f, x, \nu) = \Delta_t^1(\Delta_t^{k-1}(f, x, \nu), x, \nu), k = 2, 3, \dots,$$

$$\omega_k(f, \delta, \nu)_{p,\alpha} = \sup_{|t| \leq \delta} \left\| \Delta_t^k(f, x, \nu) \right\|_{p,\alpha},$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем $n-1$, в метрике $L_{p,\alpha}$, т. е.

$$E_n(f)_{p,\alpha} = \inf_{P_n \in P} \left\| P_n(x) - f(x) \right\|_{p,\alpha}, \text{ где } P\text{-множество алгебраических многочленов степени не выше, чем } n-1, n=1, 2, \dots$$

Основной результат.

Теорема. Пусть даны числа p, ν, k такие, что $1 \leq p < \infty, \nu > -(1/2), k = 1, 2, 3, \dots$

Пусть число α выбрано по правилу: $-(1/2) < \alpha \leq \nu$ при $p=1$, $-(1/2p) < \alpha < \nu + (1/2) - (1/2p)$ при $1 < p < \infty, 0 \leq \alpha < \nu + (1/2)$ при $p = \infty$. Тогда, если существует функция g , такая, что

$$\sup_{|t| \leq \pi} |g(t)| < +\infty \text{ и } T_t(f, x) = f(x)g(t) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \forall t \in [-\pi, \pi],$$

то для $f \in L_{p, \alpha}$ справедливы неравенства:

$$C_1 E_n(f)_{p, \alpha} \leq \omega_k(f, \frac{1}{n}, \nu)_{p, \alpha} \leq \frac{C_2}{n^{2r}} \sum_{m=1}^n m^{2r-1} E_m(f)_{p, \alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и $n(n=1, 2, 3, \dots)$.

Список использованных источников

- 1 Потапов, М. К. Об условиях совпадения некоторых классов функций / М. К. Потапов // Труды семинара имени И. Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6 – С. 223–238.
- 2 Казимиров, Г. Н. О теоремах Джексона для k -го обобщённого модуля гладкости / Г. Н. Казимиров // Деп. в ВИНТИ РАН 27.12.1994 № 3054-В94 – С. 1–40.
- 3 Казимиров, Г. Н. Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г. Н. Казимиров // – Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – №3(4). – С. 49–51.

А. В. Клименко, М. В. Яцковец

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ПРОДАЖ

Прогнозирование продаж является ключевым фактором успешного ведения бизнеса, это способ предугадать какое количество продукции будет реализовано и какая прибыль будет получена.

Степень важности прогнозирования продаж предопределила разработку множества способов определения будущих продаж, самые популярные среди них: метод экспертных оценок, анализ временных рядов и каузальные методы. Выбор метода прогнозирования зависит от множества факторов – релевантности доступных данных, желаемой степени точности, длительности прогнозируемого периода, ресурсов, соотношения потенциальной и реальной ёмкости рынка.

По мнению многих экспертов наиболее точными и эффективными являются каузальные методы, их основное преимущество – прямая связь с принятием решения. Сущность каузальных методов прогнозирования состоит в установлении математической связи между результирующей и факторными переменными. Необходимым условием применения каузальных методов прогнозирования является наличие большого объема данных для корректного выявления факторов. Если связи между переменными удастся описать математически корректно, то точность каузального прогноза будет достаточно высокой, поэтому при выполнении анализа продаж стоит использовать вычислительную технику и программное обеспечение, в частности, методы машинного обучения и нейросетевого моделирования. Они автоматизируют методы количественного прогнози-

рования продаж и упрощают ее, задача прогнозирования – очень кропотливая и трудоёмкая работа, требующая знания рынка и понимания процессов формирования спроса, анализа факторов, влияющих на ёмкость рынка, спрос и поведение конкурентов.

Для задачи прогнозирования объемов продаж каузальным методом подходят такие алгоритмы, как случайный лес, градиентный бустинг, метод опорных векторов. Наиболее эффективным алгоритмом является алгоритм градиентного бустинга. Это обусловлено тем, что алгоритм на каждой итерации строит базовый алгоритм, который действительно эффективен лишь на части подвыборки. На каждом шаге алгоритма новое слагаемое вычисляется, опираясь не на всю обучающую выборку, а лишь на случайную подвыборку фиксированного размера.

Бустинг – итерационный алгоритм, реализующий “сильный” классификатор, который позволяет добиться произвольно малой ошибки обучения (на обучающей выборке) на основе композиции «слабых» классификаторов, каждый из которых лучше, чем просто угадывание, т. е. вероятность правильной классификации 22 больше 0.5. Ключевая идея: использование весовой версии одних и тех же обучающих данных вместо случайного выбора их подмножества. Основное отличие бустинга от бэггинга состоит в том, что обучающая выборка на каждой итерации определяется, исходя из ошибок классификации на предыдущих итерациях.

Входные данные: набор данных $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$; число итераций M , выбор функции потерь $L(y, f)$ с выписанным градиентом; выбор семейства функций базовых алгоритмов $h(x, \theta)$, с процедурой их обучения; дополнительные гиперпараметры $h(x, \theta)$ (например глубина дерева у деревьев решений); начальное приближение $f_0(x)$ заменено константой γ .

Выходные данные: итоговая модель градиентного бустинга $f(x) = \sum f_i(x)$.

Шаг 1. Инициализировать метод градиентного бустинга константным значением $f(x) = f_0, f_0 = \gamma, \gamma \in R, f_0 = \arg \min \sum L(y_i, \gamma), n_i = 1$.

Шаг 2. Для каждой итерации $t = 1, \dots, M$ повторять

1. Посчитать псевдо-остатки $rt: rit = -[dL(y_i, f(x_i))df(x)]f(x) = f(x)$, для $i = 1, \dots, n$

2. Построить новый базовый алгоритм $ht(x)$ как регрессию на псевдоостатках $\{(x_i, rit)\}_{i=1 \dots n}$.

3. Найти оптимальный коэффициент pt при $ht(x)$ относительно исходной функции потерь $pt = \arg \min \sum L(y_t, f(x_i) + p * h(x_i, \theta)), n_i = 1$.

4. Сохранить $f_t(x) = pt * ht(x)$.

5. Обновить текущее приближение $f(x): f(x) \leftarrow f(x) + f_t(x) = \sum f_i(x), ti = 0 \dots 23$.

Шаг 3. Скомпоновать итоговую модель градиентного бустинга $f(x): f(x) = \sum f_i(x), M i = 0$.

Конец алгоритма.

Сложность алгоритма градиентного бустинга можно определить как $O(N^2)$, но при этом стоит учитывать, что чем больше итераций, тем больше базовых алгоритмов для голосования и соответственно тем больше сложность алгоритма.

Таким образом, алгоритм градиентного бустинга выполняет M итераций, на каждой из которых происходит обучение базовой модели $L(y_i, \gamma)$, путем подбора оптимальных параметров γ . Следует отметить, что для настройки каждой базовой модели используется функция потерь $\varphi(y, y')$, вообще говоря, отличная от $L(y, y')$.

Список использованных источников

1 Hastie, T. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – New York : Springer-Verlag. – 2009. – 746 p.

В. Н. Княгина, В. С. Монахов
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

О P -РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С P -СУБНОРМАЛЬНОЙ СИЛОВСКОЙ P -ПОДГРУППОЙ

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемые обозначения и терминология соответствует [1]. Множество всех простых чисел обозначается P .

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и В. Н. Тютянов [2] ввели следующее понятие. Подгруппа H группы G называется P -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in P$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Группы с системами P -субнормальных подгрупп исследовались в работах многих авторов, см. литературу в [2]–[5]. В частности, группы, в которых все силовские подгруппы P -субнормальны, достаточно подробно описаны [2], [3], [5].

Доказана следующая

Теорема. *Если в группе G силовская p -подгруппа P -субнормальна и $p > 2$, то G p -разрешима.*

Ограничение $p > 2$ убрать нельзя, примером служит простая группа порядка 60.

Следствие 1. *Если в группе G силовская 3-подгруппа и силовская 5-подгруппа P -субнормальны, то G разрешима.*

Следствие 2. *Пусть G – простая неабелева группа и $r \in \pi(G)$. Тогда и только тогда в группе G существует P -субнормальная подгруппа порядка r , когда выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) $r = 2$ и группа G изоморфна любой из следующих групп: $L_2(7)$, $L_2(11)$, $L_3(3)$, $L_3(5)$, $L_2(2^n)$, $2^n + 1 = p$ – простое число;
- (2) $r = 3$ и группа G изоморфна $L_3(3)$;
- (3) $r = 5$ и группа G изоморфна $L_3(5)$.

Список использованных источников

1 Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2 Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сибирский матем. журн. – 2010. – Том 51, № 6. – С. 1270–1281.

3 Kniaghina, V. N. Finite groups with P -subnormal subgroups / V. N. Kniaghina, V. S. Monakhov // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

4 Kniaghina, V. N. On supersolvability of finite groups with P -subnormal subgroups / V. N. Kniaghina, V. S. Monakhov // International J. Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

5 Монахов, В. С. Конечные группы с абнормальными и U -субнормальными подгруппами / В. С. Монахов // Сибирский матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

М. Н. Коновалова, В. С. Монахов
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СТРОГО 2-МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемая терминология соответствует [1]. Запись $M < G$ ($M < \cdot G$) означает, что M – собственная (максимальная) подгруппа группы G .

Пусть H – подгруппа группы G . Если существует максимальная в группе G подгруппа M такая, что H является максимальной подгруппой в M , то H называется 2-максимальной подгруппой группы G .

Пусть n – натуральное число. Если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 < \cdot H_1 < \dots < \cdot H_{n-1} < \cdot H_n = G, \quad (1)$$

то подгруппа H называется n -максимальной подгруппой группы G .

В знакопеременной группе A_4 степени 4 единичная подгруппа 1 является 2-максимальной подгруппой в цепочке подгрупп $1 < \cdot Z_3 < \cdot A_4$ и 3-максимальной подгруппой в цепочке $1 < \cdot Z_2 < \cdot E_4 < \cdot A_4$. Здесь Z_m и E_4 – циклическая и элементарная абелева подгруппы порядка m и 4 соответственно. Для любого натурального числа $n \geq 3$ существует группа, в которой некоторая 2-максимальная подгруппа является n -максимальной подгруппой [2; пример 3].

Подгруппу U группы G называют строго 2-максимальной подгруппой в G , если U является 2-максимальной подгруппой в G и U не является 2-максимальной подгруппой ни в какой собственной подгруппе группы G . Другими словами, строго 2-максимальная подгруппа – это такая подгруппа группы G , которая является 2-максимальной в любой цепочке подгрупп группы G .

В сверхразрешимой группе каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Это следует из классической теоремы Хупперта: группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс [3; теорема 6]. Примерами несверхразрешимых групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной, служат группа $Z_9:Z_8$ (SmallGroup (72,39) [4]), группа M_9 , (SmallGroup (72,41) [4]) простые группы $U_3(3)$ и $L_2(17)$.

В группах A_4 , S_4 , $L_2(p)$, $p \in \{5, 8, 13, 23\}$ есть 2-максимальная подгруппа порядка 2, которая не является строго 2-максимальной подгруппой группы.

Группы с ограничениями на 2-максимальные подгруппы исследовались во многих работах, см., например, [2, 3, 5–8]. В частности, известно, что в группе, у которой каждая 2-максимальная подгруппа субнормальна, все собственные подгруппы нильпотентны [5].

Формационным обобщением субнормальности является понятие \mathfrak{F} -субнормальности. Пусть \mathfrak{F} – формация, G – группа. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G , если либо $H=G$, либо существует цепочка подгрупп (1) такая, что $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i . Здесь $Y_X = \bigcap_{x \in X} Y^x$ – ядро подгруппы Y в группе X . В случае, когда H – максимальная подгруппа и H \mathfrak{F} -субнормальна в G , говорят, что H \mathfrak{F} -нормальна в G .

Закрепим следующие обозначения: \mathfrak{A} , \mathfrak{N} , \mathfrak{U} и \mathfrak{S} – формации всех абелевых, нильпотентных, сверхразрешимых и разрешимых групп соответственно; \mathfrak{A} – формация всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами; \mathfrak{A}_1 – формация всех абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.

В разрешимой группе любая субнормальная подгруппа \mathfrak{A}_1 -субнормальна [9]. Поскольку при $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ любая \mathfrak{X} -субнормальная подгруппа будет \mathfrak{Y} -субнормальной, то в разрешимой группе каждая субнормальная подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна для любой формации \mathfrak{F} , содержащей \mathfrak{A}_1 . Обратно, субнормальность подгруппы в разрешимой группе вытекает из ее \mathfrak{F} -субнормальности при $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Далее, в разрешимой группе \mathfrak{U} -субнормальность подгруппы H равносильна существованию цепочки подгрупп (1), в которой все индексы $|H_{i+1} : H_i|$ – простые числа [9]. В работах [2,6] изучены группы с \mathfrak{U} -субнормальными 2-максимальными подгруппами. Для произвольных разрешимых наследственных формаций \mathfrak{F} группы с \mathfrak{F} -субнормальными 2-максимальными подгруппами изучались в [7].

В данном сообщении условие \mathfrak{F} -субнормальности накладывается не на все 2-максимальные подгруппы, а только на строго 2-максимальные. Для произвольной наследственной формации \mathfrak{F} устанавливается, что в группе G с \mathfrak{F} -субнормальными строго 2-максимальными подгруппами все собственные подгруппы имеют нильпотентные \mathfrak{F} -кордикалы. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{NA}$ при $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$ и $|\pi(G)| > 2$.

Доказывается

Теорема. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация. Если в группе G все строго 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}_1\mathfrak{F}$ -субнормальны, то каждая собственная подгруппа имеет нильпотентный \mathfrak{F} -корадикал. Обратно, если в разрешимой группе G каждая собственная подгруппа имеет нильпотентный \mathfrak{F} -корадикал и $\Phi(G^{\mathfrak{U}_1\mathfrak{F}}) = 1$, то все 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}_1\mathfrak{F}$ -субнормальны.

Следствие 1. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная формация. Если в группе G все строго 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}_1\mathfrak{F}$ -субнормальны, то группа G разрешима и либо \mathfrak{F} -корадикал группы G нильпотентен, либо $G/F(G)$ является минимальной не \mathfrak{F} -группой.

Следствие 2. Если в группе G все строго 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}_1\mathfrak{A}$ -субнормальны и $|\pi(G)| > 3$, то коммутант группы G нильпотентен.

Следствие 3. Если в группе G все строго 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}_1\mathfrak{A}$ -субнормальны и $|\pi(G)| > 2$, то $G \in \mathfrak{NA}$.

Список использованных источников

1 Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2 Monakhov, V. S. Finite groups with P-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ric. Mat. – 2013. – Vol. 62, №1. – P. 307–322.

3 Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Mathematische Zeitschrift. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

4 The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.11.0 released on 29 February 2020. – Режим доступа : <http://www.gap-system.org>. – Дата доступа : 29.02.2020.

5 Луценко, Ю. В. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба // Матем. заметки. – 2012. – Vol. 91, №5. – P. 730–740.

6 Kovaleva, V. A. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups \mathfrak{F} -subnormal / V. A. Kovaleva, A. N. Skiba // J. Group Theory. 2014. – Vol. 17, №1. – P. 273–290.

7 Monakhov, V. S. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами / V. S. Monakhov // Математические заметки. – 2019. – Vol. 105, №2. – P. 269–277.

8 Горбатова, Ю. В. Конечные группы с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами / Ю. В. Горбатова, М. Н. Коновалова // Вестник Омского университета. – 2019. – Т. 24, №3. – С. 4–12.

9 Монахов, В. С. Конечные группы с абнормальными и \mathfrak{U} -субнормальными подгруппами / В. С. Монахов // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, №2. – С. 447–462.

Д. С. Кузьменков, И. И. Коляскин
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЁТА НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ОБЪЁМНОМ ТЕЛЕ ПРИ ЗАДАННЫХ ОБЛАСТЯХ КОНТАКТА И ДЕЙСТВУЮЩЕМ ДАВЛЕНИИ

В статье рассматривается задача расчёта напряженно-деформированного состояния объемного тела, заданной формы при заданных областях контакта и действующем давлении. Рассматривается случай неравномерного распределения нагрузки по все ширине ортотропной полосы (рис.1). Одним из примеров таких задач является контакт шины с дорожным покрытием [1].

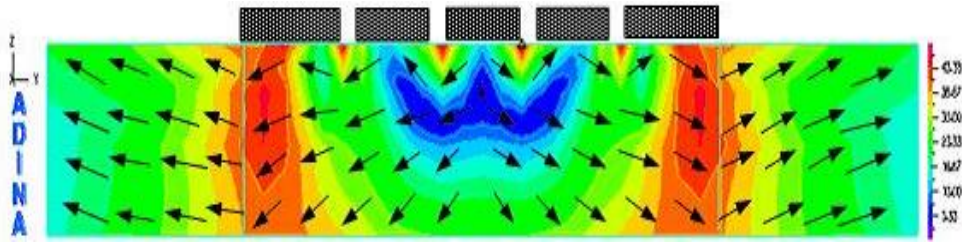


Рисунок 1 – Пример распределения напряжений в упругой полуплоскости при неравномерном распределении нагрузки

Для определения зоны контакта и распределения давления в зоне контакта будем использовать методiku, описанную в [2, 3], и аналитический подход, который предложен в [4]. Для определения перемещений и напряжений, возникающие в шине, используются формулы, выведенные Н. М. Беляевым:

$$u_i = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_3 \right), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_3 = -\frac{P}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_3}(x) + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V(x) \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} dx_3, \quad (3)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} dx_3,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial x_3}, \quad \sigma_{12} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} dx_3,$$

$$\sigma_{13} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

где $V(x) = \iint_{\omega} \frac{p(y)}{R(y, x)} dy$ – потенциал простого слоя, $R(y, x) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2)^{1/2}$ – расстояние от точки наблюдения M с координатами (x_1, x_2, x_3) до точки приложения сосредоточенной силы, μ, λ – модуль сдвига и постоянная Ламе.

После определения функции $V(x)$ перемещения и напряжения в шине могут быть рассчитаны по формулам (1)–(3).

Одним из вариантов задания областей контакта и действующего давления является эпюр (эпюр нагрузок на шину при соприкосновении ее с дорожным покрытием), который можно построить экспериментально или численно [1] (см. рис. 2). В данном случае задача состоит в поредении напряжений и перемещений внутри шины, автоматическом расчёте эпюра по изображению, загруженному из файла.

Разработан алгоритм и написана программа расчёта напряженно-деформированного состояния объемного тела, заданной формы при заданных областях контакта и действующем давлении. Был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. В программе предусмотрено два способа изменения цвета точек в эпюре: вручную и автоматически; каждому значению давления в точке соответствует свой цвет.

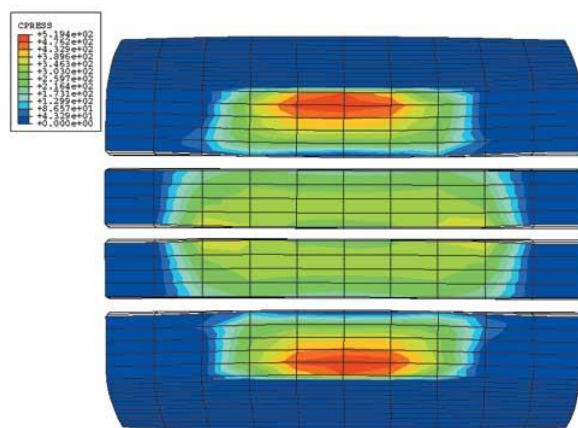


Рисунок 2 – Эпюр нагрузок на поверхности шины

После загрузки изображения из файла на него накладывается сетка (для использования метода конечных элементов), определяется цвет средней точки в каждом конечном элементе. Найденный цвет соотносится с одним из выбранных в программе цветов. При определении цветов используется HSB (Hue, Saturation, Brightness) представление цвета, поэтому для уменьшения погрешностей цветов исходного изображения стала возможной настройка диапазонов чувствительности определения каждого конкретного цвета, используемого в программе. Далее по формулам (1)–(3) рассчитываются напряжения и перемещения в шине. Результаты расчёта выводятся в табличном и графическом виде (см. рис. 3).

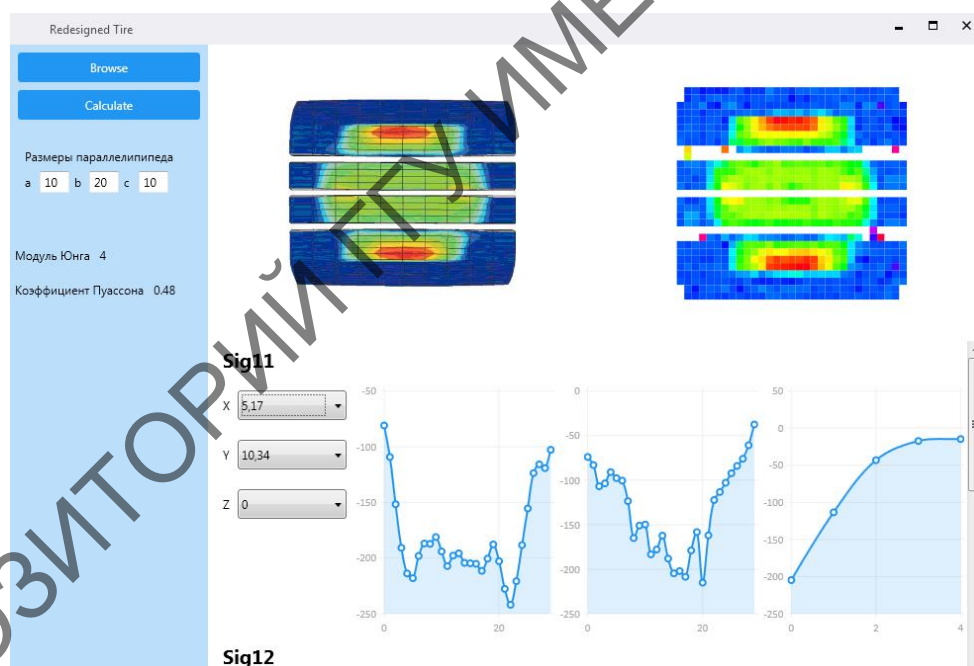


Рисунок 3 – Вывод результатов в графическом виде

Использованные методики и полученные результаты могут быть применены в других задачах расчёта напряженно-деформированного состояния объемных тел.

Список использованных источников

1 Можаровский, В. В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В. В. Можаровский [и др.] // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – 2007. – С. 135–142.

2 Можаровский, В. В. Численная реализация методики по определению напряжений и перемещений в объёмном теле применительно к техническим приложениям / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 6. – С. 161–165.

3 Можаровский, В. В. Реализация алгоритмов расчёта напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем / В. В. Можаровский [и др.]. // Теоретическая и прикладная механика – 2020. – Вып. 35. – С. 37–44.

4 Аргатов, И. И. Основы теории упругого дискретного контакта / И. И. Аргатов, Н. Н. Дмитриев. – Минск : Политехника, 2003. – 233 с.

Л. Н. Марченко¹, И. В. Парукевич¹, В. В. Подгорная²

¹г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

²г. Гомель, ИММС НАН Беларуси

ВЛИЯНИЕ ЭКОНОМИКИ ЗНАНИЙ НА УСТОЙЧИВОЕ РАЗВИТИЕ РЕГИОНОВ

Масштабные политические и экономические преобразования в конце XX века привели к трансформации белорусского и других постсоциалистических государств. Развитие экономики современного государства определяется различными факторами: геополитическими, социально-экономическими, экологическими и так далее. С другой стороны, уровень развития страны во многом определяется уровнем развития экономики знаний, благодаря которой появляются инновационные подходы, продукты, технологии, методы управления, которые являются двигателем научно-технического прогресса, общественного развития и условием достижения страной конкурентных преимуществ на региональном, национальном, международном и мировом уровнях. Для оценки эффективности экономики знаний на национальном уровне используется индекс экономики знаний (Knowledge economy index) [1–2], который характеризуется отсутствием четкой периодичности расчетов и частой модификацией методики.

Одним из факторов устойчивого развития государства является его ориентация на результаты исследований в области экономики знаний, на разработку инструментов превращения явных и неявных знаний человека в готовый инновационный продукт, эффективные технологии управления. Исследованиям в данном направлении посвящены труды А. Боллинджера (A. Bollinger), С. Ванга (S. Wang), Д. Зенга (D. Zeng), М. Икбалда (M. Iqbal), Х. Йохана (H. Johan), Е. Карайанниса (E. Carayannis), Д. Кемпбелла (D. Campbell), Б. Крстича (B. Krstić), А. Ньютона (A. Newton), Ф. Оорта (F. Oort), Н. Отманба (N. Othmanb), Б. Петровича (B. Petrović), А. Раслика (A. Raslic), О. Распе (O. Raspe), Р. Смита (R. Smith), Дж. Торрента (J. Torrent), Л. Хенга (L. Henga), М. Эфзимопулоса (M. Efthymiopoulos), Д. Эрая (D. Araya) [3–11].

Указанные авторы в своих исследованиях рассматривали исключительно экономически развитые страны, не раскрывая при этом особенностей, перспектив и путей построения экономики знаний в странах с менее высоким уровнем развития. Именно поэтому использование специальных инструментов интеллектуального анализа данных для определения закономерностей, взаимосвязей, особенностей позволят более полно увидеть качественную и количественную картину экономики знаний в Украине, Беларуси и в ряде стран ЕС и СНГ, что даст возможность выработки наиболее перспективных путей достижения устойчивого развития в стране.

В Республике Беларусь активно изучаются проблемы формирования экономики знаний учеными БГУ, БНТУ и других учреждений высшего образования и научных институтов. В республике организованы и проведены конференции: VII Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы экономического развития:

теория и практика в современных условиях» (Гомель, октябрь 2018), XI Международная научно-практическая конференция «Экономический рост Республики Беларусь: глобализация, инновационность, устойчивость» (Минск, 2018), 2-ая Международная научно-практическая конференция «Устойчивое развитие экономики: международные и национальные аспекты» (Полоцк, июнь 2018), «Устойчивое социально-экономическое развитие регионов» (г. Горки, Могилевская область, ноябрь 2019), Международная научно-практическая конференция «Социальное знание в современном обществе: проблемы, закономерности, перспективы» (Минск, ноябрь 2019 г.), VIII Международная научно-практическая интернет-конференция «Проблемы устойчивого развития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран» (Могилев, март 2019), Международные научно-практические конференции «Цифровая трансформация образования» (Минск, 2018 и 2019 годы), в рамках которых обсуждались вопросы устойчивого развития государства, формирования экономики знаний в Республике Беларусь. Использование интеллектуального анализа данных к решению проблем в различных областях знаний, в том числе и экономике, рассматривались и в докладах конференции «BIG DATA and Advanced Analytics = BIG DATA и анализ высокого уровня» (Республика Беларусь, Минск, 20–21 мая 2020 г.). Интересные научные исследования представлены, например, в следующих работах белорусских ученых [12–20].

В Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины проводятся научные разработки и исследования с использованием интеллектуального анализа данных в различных областях знаний. С другой стороны, ряд ученых занимаются проблемами развития экономики знаний в Республике Беларусь, адаптации зарубежного опыта формирования экономики знаний к условиям Беларуси. Целью таких исследований является установление закономерностей, взаимосвязей, особенностей факторов экономики знаний на региональном и межрегиональном уровнях, изучение структуры экономики знаний, способствующей устойчивому развитию, с помощью интеллектуального анализа данных. При таких исследованиях необходимо использовать широкий круг статистических источников, включая данные Национального статистического комитета Республики Беларусь и международных баз данных. Данные исследования способствуют повышению качества математического и экономического образования молодежи, в частности студентов высших учебных заведений, через формирование прогрессивных и современных математических и экономических знаний, создание компетентностного портфеля выпускника, знания которого позволят сократить срок достижения экономики знаний в регионе.

Социально-экономическая эффективность предлагаемых исследований заключается в решении важной проблемы: установление закономерностей, взаимосвязей и факторов достижения экономики знаний на региональном и межгосударственном уровнях, изучение структуры экономики знаний, способствующей устойчивому развитию, на основе применения методов интеллектуального анализа данных, а также формирование специалистов нового поколения, расширение математической составляющей при подготовке экономистов и экономической составляющей при подготовке инженеров-математиков.

Разработанные рекомендации позволят обосновать те факторы и рычаги, целенаправленное государственное воздействие на которые позволит сократить прогнозный срок достижения экономики, построенной на знаниях, что будет способствовать росту уровня социального, экономического и демографического развития территорий, повышению качества жизни населения и качественной трансформации образовательных процессов.

Список использованных источников

1 Knowledge economy index. World Data Atlas. Topics. World Rankings. – Режим доступа : https://knoema.com/atlas/topics/World-Rankings/World-Rankings/Knowledge-economy-index?origin=knoema.ru&_ga=2.157619770.1454089989.1540393789-2013547752.1540050769. – Дата доступа : 28.05.2020.

2 Knowledge Economy Index (KEI) 2007 Rankings. – Режим доступа : <http://sitere-sources.worldbank.org/KFDLP/Resources/461197-1170257103854/KEI.pdf>. – Дата доступа : 28.05.2020.

3 Araya, D. Rethinking US Education Policy. Paradigms of the Knowledge Economy / D. Araya. – New York : Palgrave Macmillan. – 2015. – 184 p. DOI: 10.1057/9781137475565.

4 Bollinger, A. S. Managing organizational knowledge as a strategic asset / A. S. Bollinger, R. D. Smith // Journal of Knowledge Management. – Vol. 5. – №1. – 2001. – P. 8–18. DOI: 10.1108/13673270110384365.

5 Carayannis, E. G. Efthymiopoulos M. E-Development and Knowledge Economy: The Role of ICT and SME Incubation / E. G. Carayannis, D. Campbell // Cyber-Development, Cyber-Democracy and Cyber-Defense. – New York : Springer. – 2014. – P. 23–90. DOI: 10.1007/978-1-4939-1028-1_2.

6 Frank, G. van Oort, Oud Otto Raspe The urban knowledge economy and employment growth: a spatial structural equation modeling approach / G an Oort Frank, H. L. Johan // The Annals of Regional Science. – 2009. – № 4. – P. 859–877. DOI: 10.1007/s00168-009-0299-2.

7 Henga, L. H. Fourth Pillar in the Transformation of Production Economy to Knowledge Economy / L. H. Henga, N. F. Othmanb, A. Md Raslic, M. J. Iqbal // Procedia – Social and Behavioral Sciences. – 2012. – Vol. 4. – P. 530–536. DOI: 10.1016/J.SBSPRO.2012.03.226.

8 Krstić, B. The role of knowledge management in increasing enterprise's innovativeness / B. Krstić, B. Petrović // Facta Universitatis. Series: Economics and Organization. – 2012. – Vol. 9. – №1. – P. 93–110.

9 Newton, A. The green economy and the knowledge economy: Exploring the interface / A. Newton // International Journal of Green Economics. – 2011. – Vol. 5. – №3. – P. 231–247. DOI: 10.1504/IJGE.2011.044235.

10 Torrent, J. Knowledge, networks and economic activity. Revisiting the network effects in the knowledge economy/ J. Torrent // e-Journal on the Knowledge Societe. – 2009. – №9. – Режим доступа : <http://www.uoc.edu/uocpapers/8/dt/eng/torrent.pdf>. – Дата доступа: 26.10.2018.

11 Zeng, D. Z. Zhihua China and the knowledge economy: challenges and opportunities / D. Z. Zeng, S. Wang // Washington: World bank, World bank inst., Knowledge for development program. – 2007. – №4223. – 38 p.

12 Енин, Ю. И. Формирование в Республике Беларусь основ экономики знаний: теория и практика / Ю. И. Енин // Экономика и управление [Электрон. ресурс]. – 2012. – №2. – Режим доступа : <http://elibrary.miu.by/journals/item.eiup/issue.30/article.2.html> Дата доступа : 14.05.2020.

13 Барейша, А. Перспективы развития экономики знаний в Республике Беларусь / А. Барейша // Наука и инновации. – 2018. – №3 (181), Март – С. 68–73.

14 Режим доступа : <file:///C:/Users/Лариса/Downloads/perspektiv-razvitiya-ekonomiki-znaniy-v-respublike-belarus.pdf>. – Дата доступа : 10.05.2020.

15 Никитенко, П. Г. Сингулярные технологии – научное направление устойчивого ноосферного развития Беларуси, России и других стран СНГ / П. Г. Никитенко, А. М. Ильянок // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. – 2014. – 2 (32). – С. 169–185. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/singulyarnye-tehnologii-nauchnoe-napravlenie-ustoychivogo-noosfernogo-razvitiya-belarusi-rossii-i-drugih-stran-sng/viewer>. – Дата доступа : 10.05.2020.

16 Бондарь, А. В. Экономика знаний: содержание, этапы, условия и перспективы раз-вертывания / А. В. Бондарь // Научные труды Белорусского государственного экономического университета / М-во образования Респ. Беларусь, Белорусский гос. экон. ун-т ; [редкол.: В. Н. Шимов (гл. ред.) и др.]. – Минск : БГЭУ, 2015. – Вып. 8. – С. 27–33. – Режим доступа : http://elib.psu.by/bitstream/123456789/18857/1/Бондарь_c8-11.pdf. – Дата доступа : 10.05.2020.

17 Терехова, С. В. Инновационное развитие России и Беларуси в условиях становления союзного государства / С. В. Терехова // Проблемы развития территории. – 2017. – ВЫП. 2 (88). – С. 7–19. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnoe-razvitie-rossii-i-belarusi-v-usloviyah-stanovleniya-soyuznogo-gosudarstva/viewer>. – Дата до-ступа : 10.05.2020.

18 Баранов, А. М. Экономика знаний Беларуси в аспекте мирового опыта / А. М. Баранов // Санкт-петербургский образовательный вестник. – 2018. – № 9–10. – С. 80–86. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/ekonomika-znaniy-belarusi-v-aspekte-mirovogo-opyta/viewer>. – Дата доступа : 10.05.2020.

19 Баранов, А. М. Адаптация зарубежного опыта формирования экономики знаний к условиям России и Белоруссии / А. М. Баранов // Вопросы науки и образования. – 2018. – №19 (31). – С. 7–10. – Режим доступа : <https://scientificpublication.ru/images/PDF/2018/31/Questions-of-science-and-education-19-31.pdf>. – Дата доступа : 10.05.2020.

20 Шаталова, В. В. Анализ и особенности технологии BIG DATA в управлении человеческими ресурсами / В. В. Шаталова, Т. В. Казак, Д. В. Лихачевский // BIG DATA and Advanced Analytics = BIG DATA и анализ высокого уровня: сб. материалов VI Междунар. науч.-практ. конф., Республика Беларусь, Минск, 20–21 мая 2020 года : в 3 ч.; редкол. : В. А. Богущ [и др.]. – Минск : Бестпринт, 2020. – Ч. 2 – С. 319–324.

С. Ф. Маслович, А. Б. Демуськов
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ПРОГРАММНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ДЛЯ МОБИЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

Введение

Внесение и отображение расписания занятий факультетов университета является одной из востребованных задач в деятельности любого ВУЗа. Внесение его в информационную экосистему ВУЗа, отображения этого расписания для студентов, преподавателей, администрации на современных информационных платформах – все это определило актуальность создания предлагаемых авторами инструментов.

1 Структура программного инструментария

Предлагаемый программный инструментарий состоит из трех компонентов:

1 Ввод расписания.

2 Хранение расписания на промежуточном сервере БД.

3 Отображение расписания на мобильных клиентах (мобильный телефон, планшет).

На рисунке 1 представлена структурная схема программного инструментария.

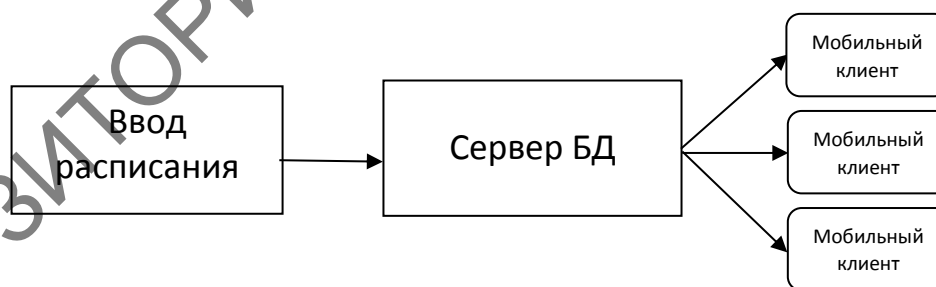


Рисунок 1 – Структурная схема программного инструментария

Инструмент для ввода расписания использует известный сервис «Google Таблицы» [1]. Для этого в «Google Таблицы» сформирован шаблон для внесения расписания, который представляет собой электронную прямоугольную таблицу, аналогичную таблице бумажного расписания, формируемого заместителями деканов по учебной работе. Выбор электронного формата вызван простейшей аналогией с бумажным вариантом. Выбор сервиса «Google Таблицы» определен следующими критериями:

- простота использования и его узнаваемость электронным таблицам Microsoft Excel;
- работа через Internet;

- одновременная работа пользователей с одним и тем же документом в режиме реального времени;
- наличие встроенного современного языка программирования JavaScript;
- настройки различных режимов работы с документом: просмотр документа, редактирование документа, запрет доступа к документу;
- простое взаимодействие с другими сервисами сети Internet;
- экспорт таблиц в известные форматы: Excel, PDF, CVS, HTML.

В качестве сервера БД для хранения расписания используется база данных в реальном времени Firebase [2]. Это эффективное решение с малой задержкой для мобильных приложений, которым требуется синхронизация состояний между клиентами в режиме реального времени.

Мобильными клиентами выступают мобильные телефоны, планшеты на платформах iOS и Android [3, 4].

2 Структура компонентов программного инструментария

«Google Таблицы» для внесения расписания факультетов университета представляет собой одну электронную таблицу (ЭТ). ЭТ состоит из списка листов, каждый из которых содержит таблицу расписания отдельно взятого факультета.

На рисунке 2 представлена структура ЭТ.



Рисунок 2 – Структура ЭТ

Структура расписания факультета представляет собой прямоугольную таблицу в столбцы которых представляют названия групп/подгрупп, а строки – названия предметов, аудиторий, преподавателей. Для характеристики типа занятий (лекция, лабораторное занятие, практическое занятие используется цветовая схема). На рисунке 3 представлен пример расписания листа для одного из факультетов.

	БА-11	ФИН-11	ЭИ-11	ЭУ-11	ГУ-41	
недельник	9-00	Экономическая теория корп 4 ауд 3-26 Доц. БАШЛАКОВ Г В	Безопасность жизнедеятельности человека корп 4 ауд 5-2 Доц. ТИМОФЕЕВА Т А	Безопасность жизнедеятельности человека корп 4 ауд 5-2 Доц. ТИМОФЕЕВА Т А	Безопасность жизнедеятельности человека корп 4 ауд 5-2 Доц. ТИМОФЕЕВА Т А	Антикризисное управлен корп 4 ауд 4-2 Ст преп. ГЛУХОВА И В
	10-40	Физическая культура корп 4 ауд 3-26 Доц. БАШЛАКОВ Г В	Экономическая теория корп 4 ауд 3-26 Доц. БАШЛАКОВ Г В	Безопасность жизнедеятельности человека корп 4 ауд 5-10 Ст преп. СКАЧИНСКАЯ Т В	Физическая культура корп 4 ауд 4-2 Ст преп. ГЛУХОВА И В	Антикризисное управлен корп 4 ауд 4-2 Ст преп. ГЛУХОВА И В
	12-25	Безопасность жизнедеятельности человека корп 4 ауд 4-2 Доц. ТИМОФЕЕВА Т А	Безопасность жизнедеятельности человека корп 4 ауд 5-10	Компьютерные информационные технологии корп 4 ауд 3-12	Экономическая теория корп 4 ауд 5-5	Информационные технолос управлении корп 4 ауд 5-20

Рисунок 3 – Лист расписания факультета

Внесение данных расписания осуществляется путем выбора следующих типов значений в выпадающем списке: дисциплина, аудитория, преподаватель. Хранение списков дисциплин, аудиторий, преподавателей осуществляется также в Google таблицах.

База данных реального времени Firebase хранит данные в виде одного большого дерева JSON [5]. БД имеет мобильный SDK реального времени для платформ iOS и Android и поддерживает локальное хранилище данных для готовых к работе приложений. На рисунке 4 предоставлен пример структуры БД занятия для одной из групп биологического факультета.

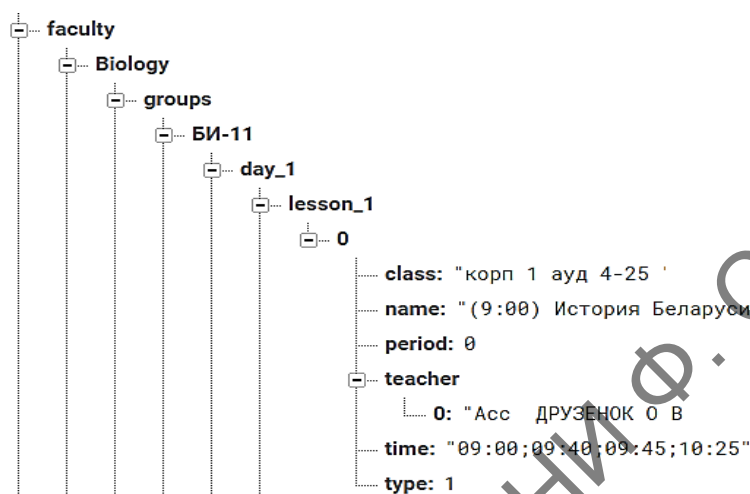


Рисунок 4 – Структура БД

Отображение расписания на мобильных платформах iOS и Android обеспечивается автоматической синхронизацией мобильного устройства с БД Firebase при запуске приложения. На рисунке 5 представлен пример интерфейса мобильного приложения на платформе Android при выборе группы факультета и отображения расписания этой группы на определенный день недели.

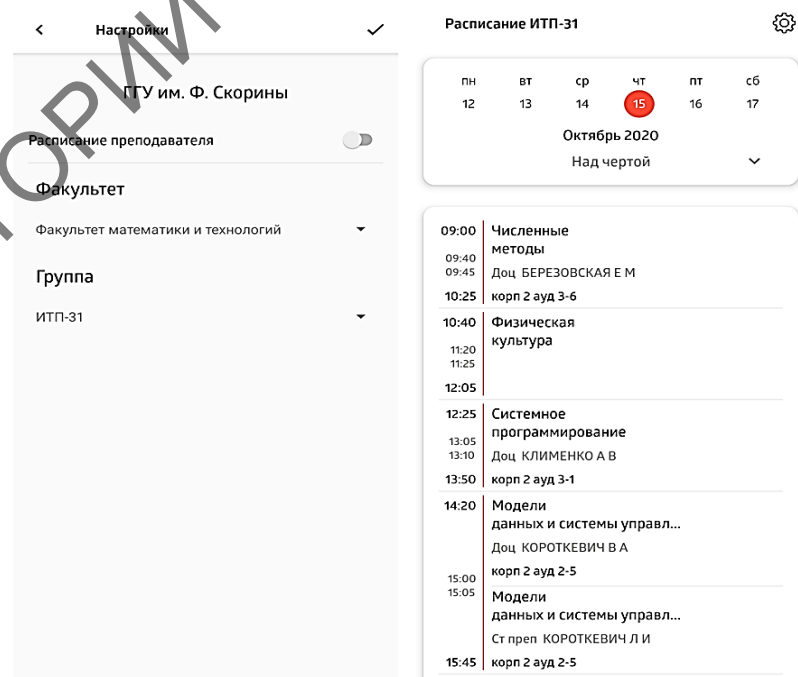


Рисунок 5 – Интерфейс выбора группы факультета и расписания на определенный день недели

Список использованных источников

- 1 Документация Firebase [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.google.com/sheets/about/>. – Дата доступа : 01.10.2020.
- 2 Документация Firebase [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://firebase.google.com/>. – Дата доступа : 01.10.2020.
- 3 Документация iOS [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.apple.com/ios/>. – Дата доступа : 01.10.2020.
- 4 Документация Android [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [URL:https://www.android.com/](https://www.android.com/). – Дата доступа : 01.10.2020.
- 5 Документация JSON [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.json.org/json-en.html>. – Дата доступа : 01.10.2020.

В. И. Мироненко, В. В. Мироненко
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ПОДОБНЫХ МАТРИЦЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемой 2ω -периодической $n \times n$ матрицей $P(t)$.

Для 2ω -периодических систем известна [1, с. 183], (см. также [2, с. 79]), теорема Флоке, согласно которой фундаментальная матрица решений $X(t)$ периодической системы (1) представима в виде $X(t) = \Phi(t)e^{A_0 t}$, где $\Phi(t)$ есть 2ω -периодическая матрица, а A_0 – постоянная матрица. Эта матрица играет основную роль в вопросах существования и устойчивости периодических решений.

При изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений периодической системы (1) важную роль играет также отображение Пуанкаре (отображение за период) [3, с. 209], (см. также [4, с. 216]), где дано определение отображения Пуанкаре и для параболических уравнений в частных производных.

В 1984 году Мироненко В. И. было введено понятие отражающей функции [5].

Изучение отражающей функции показало ее большую эффективность при рассмотрении различных вопросов теории обыкновенных дифференциальных систем. Различные работы, относящиеся к этому, публиковались, в основном, в журнале «Дифференциальные уравнения» на русском языке. Применение отражающей функции всякий раз требовало повторения как определения, так и свойств отражающей функции. В связи с этим была издана монография [6]. А позже появилась необходимость расширить монографию [6]. Так появилась монография [7]. Авторам данной работы особенно приятно появление серьезных исследований в области теории отражающей функции, опубликованных на английском и китайском языках, и изложенных на китайском языке в монографии [8].

Приведем здесь необходимые для дальнейшего понимания этой работы сведения по теории отражающей функции.

Отражающая функция $F(t, x)$ для системы

$$\frac{dx}{dt} = Y(t, x), \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad (2)$$

связывает прошлое состояние $x(-t)$ этой системы с ее будущим состоянием $x(t)$ формулой $x(-t) = F(t, x(t))$. Дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией предыдущей системы (2) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad F(0, x) \equiv x.$$

Если $F(t, x)$ есть отражающая функция 2ω -периодической системы (2), то ее отображение Пуанкаре за период $[-\omega; \omega]$ задается формулой $x(\omega) = F(-\omega, x(-\omega))$, если только решения системы (2) продолжимы на $[-\omega; \omega]$. Этим объясняется целесообразность применения отражающей функции к изучению периодических систем. В частности, если система (2) 2ω -периодична и нечетна по t , т. е. $X(-t, x) + X(t, x) \equiv 0$, то, как легко проверить, $F(t, x) \equiv x$ и потому все продолжимые на $[-\omega, \omega]$ решения такой системы будут 2ω -периодичны. Отсюда следует, что отображение за период $[-\omega; \omega]$ иногда удается найти даже для систем неинтегрируемых в квадратурах.

Основные факты теории отражающей функции содержатся не только в отдельных журнальных статьях, но, конечно же, с ними лучше всего знакомиться по монографиям [6–7], где они излагаются последовательно и систематически.

Для линейных систем (1) теория отражающей функции особенно прозрачна и потому, в частности, что все решения линейной системы всегда продолжимы на \mathbb{R} . Так как мы будем в дальнейшем иметь дело только с линейными системами (1), то в силу необходимости приведем основные факты из теории отражающей функции для линейной системы (1). Доказательства этих фактов содержатся в [6–7], но они настолько просты, что читатель может восстановить их самостоятельно без особых усилий:

1. Для линейной системы (1) с фундаментальной матрицей $X(t)$ отражающая функция линейна и имеет вид $\bar{x} = F(t)x = X(-t)X^{-1}(t)x$.

Матрица $F(t) = X(-t)X^{-1}(t)$ называется отражающей матрицей. Если $F(t)$ есть отражающая матрица системы (1), то для любого решения $x(t)$ системы (1) $x(-t) = F(t)x(t)$.

2. Дифференцируемая матрица $F(t)$ является отражающей матрицей системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{dF}{dt} + FP(t) + P(-t)F = 0, \quad F(0) = E. \quad (3)$$

Здесь и далее E есть единичная матрица.

3. Если матрица $P(t)$ – нечетна по t , то отражающая матрица системы (1) есть единичная матрица, т. е. $F(t) \equiv E$, и все ее решения четны.

4. Если $F(t)$ есть отражающая матрица 2ω -периодической системы (1), то ее отображение за период $[-\omega; \omega]$ задается формулой $x(\omega) = F(-\omega)x(-\omega)$.

Таким образом матрица $F(-\omega)$ является матрицей отображения Пуанкаре на периоде $[-\omega; \omega]$.

Основные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах, в которых используются обозначения $P_e(t) = \frac{P(t) + P(-t)}{2}$ и $P_v(t) = \frac{P(t) - P(-t)}{2}$.

Теорема 1. Пусть существуют четные матрицы $\Phi(t)$, $A(t)$ и нечетная матрица Δ , для которых $P_e\Phi = \Phi A$, $\frac{d\Phi}{dt} = P_v\Phi + \Phi\Delta$; A , Δ и $\int_0^t A(\tau)d\tau$ коммутируют друг с дру-

гом. Тогда отражающая матрица системы (1) имеет вид $F(t) = \Phi(t) \exp(-2 \int_0^t A(\tau)d\tau) \Phi^{-1}$,

а матрица отображения Пуанкаре 2ω -периодической системы (1) за период $[-\omega; \omega]$ подобна матрице $\exp(2 \int_0^\omega A(\tau)d\tau)$.

Следствие. Если выполнены условия теоремы 1, то матрица $F(-\omega)$ отображения Пуанкаре системы (1) на периоде $[-\omega, \omega]$ задается формулой $F(-\omega) = \Phi(\omega)B(-\omega)\Phi^{-1}(\omega)$.

Теорема 2. Пусть для 2ω -периодической непрерывной на R матрицы $P(t)$ существует дифференцируемая матрица $\Phi(t)$, приводящая матрицу $P_e(t)$ к непрерывной, не меняющей своей структуры при всех $t \in R$, матрице Жордана $J(t)$, т. е.

$$P_e(t)\Phi(t) = \Phi(t)J(t), \text{ для которой } \frac{d\Phi}{dt} = P_v(t)\Phi.$$

Тогда фундаментальная матрица $X(t)$ системы (1) может быть записана в виде

$$X(t) = \Phi(t) \exp \int_0^t J(\tau) d\tau. \text{ При этом } \Phi(t) \text{ есть четная } 2\omega\text{-периодическая матрица.}$$

Список использованных источников

1 Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

2 Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – Москва : Мир, –1990. – 720 с. (Перевод с английского: Hartman Philip. Ordinary Differential Equations. – John Wiley & Sons, New York–London–Sidney, 1964.)

3 Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов / В. И. Арнольд. – 3-е изд. – Москва : Наука, 1984. – 272 с.

4 Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 370 с. (Перевод с английского: Henry Dan. Geometric Theory of semilinear Parabolic Equations. – Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1981.

5 Мироненко, В. И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В. И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. –Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

6 Мироненко, В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В. И. Мироненко. – Минск : изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

7 Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.

8 Zhou, Zhengxin. The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications / Zhengxin Zhou. – China Machine Press, Beijing. – 2014. – 218 p.

A. R. Mirotin

Gomel, F. Skorina Gomel State University

SOME RESENT TRENDS IN THE THEORY OF HAUSDORFF OPERATORS

Hausdorff operators were introduced by Hardy on the segment, and by Liflyand and Moricz [1] on the whole real line. Later Liflyand and Lerner [2] considered their multidimensional generalizations. Now it is an active research area. It is enough to note that the Google search by request "Hausdorff operator" gives more then 1 200 000 results. See also survey articles [3, 4] for historical remarks and the state-of-the-art up to 2014.

This note is a survey of some recent results in this theory. We correct also the statements of Theorem 2 in [5] and Lemma 2 and Theorem in [6].

The n -dimensional Hausdorff operator looks as follows:

$$(\mathcal{H}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \Psi(u) f(A(u)x) du,$$

where $\Psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ is a locally integrable function, $A(u)$ stands for a family of non-singular $n \times n$ -matrices, $x \in \mathbb{R}^n$, a column vector.

In [7] the next generalization of this notion to topological groups was proposed.

Definition 1 [7]. Let (Ω, μ) be a measure space, G a topological group, $A: \Omega \rightarrow \text{Aut}(G)$ a measurable map, and $\Psi \in L^1_{loc}(\Omega)$. We define the *Hausdorff operator* with the kernel Ψ over the group G by the formula

$$(\mathcal{H}_{\Psi, A}f)(x) = \int_{\Omega} \Psi(u) f(A(u)(x)) d\mu(u).$$

The classical definition of a Hausdorff operator on \mathbb{R}^n mentioned above, the Harish-Chandra transform, and the Delsarte generalized shift are special cases of this notion.

Hereafter G stands for a locally compact metrizable group.

The following lemma is a corrected version of Lemma 2 from [6].

Lemma 1. *There is a left invariant metric ρ' which is compatible with the topology of G such that every automorphism $A \in \text{Aut}(G)$ is Lipschitz with respect to every left invariant metric ρ that is strongly equivalent to ρ' . Moreover, one can choose the Lipschitz constant to be*

$$L_A = \kappa_{\rho} \text{mod} A,$$

where the constant κ_{ρ} depends on the metric ρ only.

The next theorem is a corrected version of the main result in [6].

Theorem 1 *Let a left invariant metric ρ be as in Lemma 1, the doubling condition holds for the corresponding metric measure space (G, ρ, ν) , $d = \dim G$, and $k(u) = \text{mod}(A(u))^{-1}$. For $\Psi \in L^1(\Omega, k^d d\mu)$ the Hausdorff operator $\mathcal{H}_{\Psi, A}$ is bounded on the real Hardy space $H^1(G)$ and*

$$\| \mathcal{H}_{\Psi, A} \| \leq \text{Const} \| \Psi \|_{L^1(\Omega, k^d d\mu)}.$$

Theorem 2 [7]. *Let F be a locally compact field equipped with the norm (e.g., $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, or \mathbb{Q}_p). For the Hausdorff operator $\mathcal{H}_{\Psi, A}$ on the real Hardy space $H^1(F^n)$ the next estimate holds*

$$\| \mathcal{H}_{\Psi, A} \| \leq \text{Const} \int_{\Omega} |\Psi(u)| \| A(u)^{-1} \|^n d\mu(u).$$

In [5] and [8] the following definition of a Hausdorff operator over homogeneous spaces of groups was proposed.

For a compact subgroup K of G from now on we put $\dot{x} := xK$, $\dot{A}(\dot{x}) := \pi_K(A(x))$ ($A \in \text{Aut}(G)$, $x \in G$), and

$$\text{Aut}_K(G) := \{ \dot{A} : A \in \text{Aut}(G), A(K) = K \}.$$

Definition 2 [5]. Let (Ω, μ) be a measure space, $(\dot{A}(u))_{u \in \Omega} \subset \text{Aut}_K(G)$ a family of homeomorphisms of G/K , and $\Psi \in L^1_{loc}(\Omega, \mu)$. For a function f on G/K we define a *Hausdorff operator on G/K* by the formula

$$(\mathcal{H}_{\Psi, \dot{A}}f)(\dot{x}) := \int_{\Omega} \Psi(u) f(\dot{A}(u)(\dot{x})) d\mu(u).$$

Example 1. One can identify the Lobachevsky plane \mathbb{H}^2 with the homogeneous space $SL(2)/SO(2)$. If we in turn identify \mathbb{H}^2 with the upper half-plane in \mathbb{C} , a Hausdorff operator is as follows:

$$(\mathcal{H}_\Psi f)(z) = \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) f\left(\frac{z \cos \theta + \sin \theta}{-z \sin \theta + \cos \theta}\right) d\mu(\theta).$$

Several results on the boundedness of such operators were obtained by the author.

Theorem 3 [5]. Suppose that the conditions of Definition 2 are fulfilled, $p \in [1, \infty]$, and

$$\|\Psi\|_{p,A} := \int_\Omega |\Psi(u)| (\text{mod}A(u))^{-1/p} d\mu(u) < \infty.$$

Then $\mathcal{H}_{\Psi, \dot{A}}$ is bounded on $L^p(G/K)$ and

$$\|\mathcal{H}_{\Psi, \dot{A}}\|_{L^p(G/K)} \leq \|\Psi\|_{p,A}.$$

Definition 3 [5]. We define the *Hardy space* $H^1(G/K)$ as a space of such functions $f = \dot{g}$ on G/K that g admits an atomic decomposition of the form $g = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j a_j$, where a_j

are right- K -invariant $(1, r)$ atoms and $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$. In this case,

$$\|f\|_{H^1(G/K)} := \inf \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|,$$

and infimum is taken over all decompositions above of g . Thus a function $f = \dot{g}$ from $H^1(G/K)$ admits an atomic decomposition $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \dot{a}_j$ such that $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$, and

$$\|f\|_{H^1(G/K)} \leq \|g\|_{H^1(G)}.$$

Theorem 4 [8] If $G \neq K$ the space $H^1(G/K)$ is nontrivial and Banach.

Thereafter we put

$$k(u) := \text{mod}A(u)^{-1}.$$

The following theorem is a corrected version of the Theorem 2 in [5].

Theorem 5 Let a left invariant metric ρ be as in Lemma 1 and the doubling condition holds for the corresponding metric measure space (G, ρ, ν) , $d = \dim G$. Under assumptions of Definition 2 let (Ω, q, μ) be a σ -compact quasi-metric space with positive Radon measure μ . Then for the operator $\mathcal{H}_{\Psi, \dot{A}}$ the next estimate holds

$$\|\mathcal{H}_{\Psi, \dot{A}}\|_{L^1(H^1(G/K))} \leq \text{Const} \|\Psi\|_{L^1(k^d \mu)}.$$

Theorem 6 [8]. Let Ω be σ -compact quasi-metric space with positive Radon measure μ . Let G be a locally compact group with left Haar measure ν and a left invariant metric ρ as in Lemma 1 and the local doubling and approximate midpoint conditions hold. Let the family $(\dot{A}(u))_{u \in \Omega} \subset \text{Aut}_K(G)$ satisfies $k(u) \leq C$. Then for $\Psi \in L^1(\Omega, k^{1/r} \mu)$ ($r \in (1, \infty]$) the Hausdorff operator $\mathcal{H}_{\Psi, \dot{A}}$ is bounded on the real Hardy space $H^1(G/K)$ and for some constant $\gamma_{\rho, C} > 0$ the next estimate holds

$$\|\mathcal{H}_{\Psi,A}\| \leq \gamma_{p,C} \|\Psi\|_{L^1(\Omega, k^{Vr_\mu})}.$$

Until 2019 all known results on general Hausdorff operators refer to the boundedness of such operators in various settings only (exceptions are several papers in which some spectra were calculated for special cases in the one-dimensional setting). In particular, multidimensional normal Hausdorff operators have not been studied. Below we describe spectral representation for such operators. In [9] and [10] the notion of a matrix symbol of a normal Hausdorff operator was introduced and the following theorem proved.

Theorem 7 [9], [10]. *Let $A(u)$ be a commuting family of non-singular self-adjoint $n \times n$ -matrices, and $|\det A(u)|^{-1/2} \Psi(u) \in L^1(\Omega)$. Then*

(i) *the Hausdorff operator $\mathcal{H}_{\Psi,A}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ with matrix symbol Φ is normal and unitary equivalent to the operator M_Φ of multiplication by the normal matrix Φ in the space $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{2^n})$ of \mathbb{C}^{2^n} -valued functions;*

(ii) *the spectrum of $\mathcal{H}_{\Psi,A}$ equals to the spectrum $\sigma(\Phi)$ of Φ in the matrix algebra $\text{Mat}_{2^n}(C_b(\mathbb{R}^n))$,*

$$\sigma(\mathcal{H}_{\Psi,A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{s \in \mathbb{R}^n} |\det(\lambda - \Phi(s))| = 0\};$$

(iii) *the point spectrum $\sigma_p(\mathcal{H}_{\Psi,A})$ of $\mathcal{H}_{\Psi,A}$ consists of such complex numbers λ for which the closed set*

$$E(\lambda) := \{s \in \mathbb{R}^n : \det(\lambda - \Phi(s)) = 0\}$$

has positive Lebesgue measure. The residual spectrum of $\mathcal{H}_{\Psi,A}$ is empty.

Corollary [10]. *Let the matrices $A(u)$ be positive definite. Then the operator $\mathcal{H}_{K,A}$ is unitary equivalent to the operator of coordinate-wise multiplication by a function $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ (the scalar symbol of $\mathcal{H}_{K,A}$) in the space $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{2^n})$. In particular,*

(i) *the spectrum, the point spectrum, and the continuous spectrum of $\mathcal{H}_{K,A}$ equal to the spectrum (i. e., to the closure of the range of φ), to the point spectrum, and to the continuous spectrum of the operator M_φ of multiplication by φ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ respectively, the residual spectrum of $\mathcal{H}_{K,A}$ is empty;*

(ii) $\|\mathcal{H}_{K,A}\| = \sup |\varphi|$.

The problem of compactness of Hausdorff operators was posted in [3]. There is a conjecture that a nontrivial Hausdorff operator on Lebesgue space is non-compact. In [11] we formulated the more strong conjecture that a nontrivial Hausdorff operator on Lebesgue space is non-Riesz and proved the following.

Theorem 8 [11] *Let $A(u)$ be a commuting family of real self-adjoint $n \times n$ -matrices ($u \in \text{supp}(\Psi)$), and $(\det A(u))^{-1/p} \Psi(u) \in L^1(\Omega)$. Then every nontrivial Hausdorff operator $\mathcal{H}_{\Psi,A}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) is a non-Riesz operator (and in particular it is not a sum of a quasinilpotent and compact operator).*

References

- 1 Lifyand, E. The Hausdorff operator is bounded on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R})$ / E. Lifyand, F. Moricz // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 128. – P. 1391–1396.
- 2 Lerner, A. Multidimensional Hausdorff operators on the real Hardy space / A. Lerner and E. Lifyand // J. Austr. Math. Soc. – 2007. – Vol. 83. – P. 79–86.

3 Liflyand, E. Hausdorff operators on Hardy spaces / E. Liflyand // Eurasian Math. J. – 2013. – Vol. 4. – № 4. – P. 101–141.

4 Chen, J. Hausdorff operators on Euclidean space (a survey article) / J. Chen, D. Fan, S. Wang, // Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B. – 2014. – Vol. 28. – №4. – P. 548–564.

5 Mirotin, A. R. Hausdorff operators on homogeneous spaces of locally compact groups / A. R. Mirotin // Journal of the Belarusian State University. Math. Mech. – 2020. – № 2. – P. 28–35.

6 Mirotin, A. R. Addendum to «Boundedness of Hausdorff operators on Hardy spaces H^1 over locally compact groups» / A. R. Mirotin // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 479. – № 1. – P. 872–874.

7 Mirotin, A. R. Boundedness of Hausdorff operators on Hardy spaces H^1 over locally compact groups / A. R. Mirotin // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 473. – P. 519–533. – (Preprint arXiv:1808.08257v2 [math. FA] 1 Sep 2018).

8 Mirotin, A. R. Hausdorff operators on real Hardy spaces H^1 over homogeneous spaces with local doubling property / A. R. Mirotin // Analysis. Math. (submitted).

9 Mirotin, A. R. The structure of normal Hausdorff operators on Lebesgue spaces / A. R. Mirotin // Forum Math. – 2020. – Vol. 32. – № 1. – P. 111–119.

10 Mirotin, A. R. On the Structure of Normal Hausdorff Operators on Lebesgue Spaces / A. R. Mirotin // Functional Anal. and Appl. – 2019. – Vol. 53. – № 4. – P. 261–269.

11 Mirotin, A. R. Is every nontrivial Hausdorff operator on Lebesgue space a non-Riesz operator? To appear in: Operator Theory and Harmonic Analysis / A. R. Mirotin // Vol. 1: New General Trends and Advances of the Theory. Proceedings OTHA 2020, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (2020).

В. Р. Мисюк

г. Гродно, ГрГУ имени Я. Купалы

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ НЕРАВЕНСТВ И ТЕОРЕМ ТИПА БЕРНШТЕЙНА ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В настоящее время рациональные приближения являются одним из наиболее актуальных и интенсивно развивающихся разделов математического анализа. В этом направлении, начиная с классических результатов Д. Джексона и С.Н. Бернштейна, были получены прямые и обратные теоремы теории приближения функций для различных функциональных пространств, причем сейчас многие из них носят окончательный характер.

Данная заметка посвящена одному уточнению аналогов обратной теоремы теории рациональных приближений в пространстве Бергмана. Для формулировки соответствующих результатов приведём необходимые определения.

Пусть m_2 – плоская мера Лебега в комплексной области C . Для $0 < p \leq \infty$ через $L_p(D)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ относительно плоской меры Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1 \leq p \leq \infty$). Именно, $f \in L_p(D)$, если

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p} < \infty \quad \text{при } 0 < p < \infty ,$$

$$\|f\|_{L_p(D)} = \operatorname{ess\,sup}_{z \in D} |f(z)| < \infty \quad \text{при } p = \infty .$$

Для функции f аналитической в D через $\hat{f}(k)$ обозначим её k -ый коэффициент Маклорена. Если $\alpha \geq 0$, то следующая функция, также является аналитической

$$J^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^\alpha \hat{f}(k) z^k,$$

называется производной f в смысле Вейля. Если $\alpha < 0$ функцию $J^\alpha f$ называют так же интегралом порядка $|\alpha|$.

Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$ и $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Следуя, например, работам [1] и [2], через H_q^α обозначим пространство Харди - Соболева, т. е. множество аналитических в D функций с конечной квазинормой $\|f\| = \|J^\alpha f\|_{H_p^\alpha}$. Соответственно через B_q^α обозначим пространство Харди - Бесова. Именно, $f \in B_q^\alpha$, если при некотором $\beta > \alpha$ функция $(1-|z|^2)^{\beta-\alpha-1/q} \cdot (J^\beta f)(z)$ принадлежит $L_q(D)$. Квазинорма (норма при $1 \leq q \leq \infty$) в пространстве B_q^α определяется следующим образом

$$\|f\|_{B_q^\alpha} = \left\| (1-|z|^2)^{\beta-\alpha-1/q} \cdot (J^\beta f)(z) \right\|_{L_q(D)} = \left(\int_D \left| (1-|z|^2)^{\beta-\alpha-1/q} \cdot (J^\beta f)(z) \right|^q dm_2(z) \right)^{1/q} < \infty.$$

Определение пространства B_q^α не зависит от β , при различных β соответствующие квазинормы эквивалентны. Ради удобства, как правило, полагают $\beta = \alpha + 1$. Далее также будем полагать, что $\alpha > 0$.

Следующие два вложения (см., например, [7]) отражают связь между B_q^α и H_q^α .

$$B_p^\alpha \subset H_p^\alpha \quad \text{при } 0 < p \leq 2, \quad (1)$$

$$H_p^\alpha \subset B_p^\alpha \quad \text{при } 2 < p \leq \infty. \quad (2)$$

Введем множество R_n - рациональных функций степени не выше n . Известно, что для $r_n \in \mathcal{R}_n \cap L_\infty(D)$ имеет место оценка

$$\|r_n'\|_{L_2(D)} \leq \sqrt{\pi n} \|r_n\|_{L_\infty(D)}$$

полученная Е. П. Долженко в 1966 г. [8] из геометрических соображений. Ранее автором [9] были приведены обобщения этого результата на пространства $L_p(D)$, на высшие производные и на производные дробного порядка. В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. [9] Пусть $r_n \in R_n$, с полюсами вне замыкания окружности D , $2 < p < \infty$ и $1/q = \alpha + 2/p$.

Тогда

$$\|r_n\|_{B_q^\alpha} \leq cn^{\alpha + \frac{1}{p}} \|r_n\|_{L_p(D)}, \quad (3)$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α и p .

Далее приходим к следующему аналогу соотношения (3).

Теорема 2. Пусть $r_n \in \mathcal{R}_n$, с полюсами вне замыкания окружности D , $2 < p < \infty$ и $1/q = \alpha + 2/p$.

Тогда

$$\|r_n\|_{H_q^\alpha} \leq cn^{\alpha + \frac{1}{p}} \|r_n\|_{L_p(D)}, \quad (4)$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α и p .

Согласно вложениям (1) и (2) теоремы 1 и 2 равносильны при $q=2$. Если же $0 < q < 2$, то сильнее теорема 1, а при $q > 2$ соответственно сильнее теорема 2. Несложно показать также, что соотношения (3) и (4) верны при и $p = \infty$.

Теорема 3. Пусть $r_n \in \mathcal{R}_n$ с полюсами вне замыкания окружности D .

Тогда

$$\|r_n\|_{B_{\frac{1}{\alpha}}^\alpha} \leq cn^\alpha \|r_n\|_{L_\infty(D)},$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α .

Теорема 4. Пусть $r_n \in \mathcal{R}_n$ с полюсами вне замыкания окружности D .

Тогда

$$\|r_n\|_{H_{\frac{1}{\alpha}}^\alpha} \leq cn^\alpha \|r_n\|_{L_p(D)},$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α .

Говорим, что функция f принадлежит пространству Бергмана $A_p(D)$, $0 < p \leq \infty$, если она аналитична в D и конечна квазинорма $\|f\|_{A_p} := \|f\|_{L_p(D)}$.

Введём

$$R_n(f, A_p) = \inf_{r_n \in \mathcal{R}_n} \|f - r_n\|_{A_p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

– наилучшее приближение f посредством рациональных функций степени не выше n с полюсами вне замыкания D . Заметим, что если для некоторой рациональной функции $r_n^* \in \mathcal{R}_n$ имеет место равенство

$$R_n(f, A_p) = \|f - r_n^*\|_{A_p},$$

то r_n^* называется элементом наилучшего приближения функции f . Известно (см., например, [4]–[6] и др.), что элемент наилучшего приближения существует, однако, он может быть не единственным. Приступим к формулировке обратных теорем теории рациональной аппроксимации.

Теорема 5. [9] Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^{q'} < \infty,$$

где $q' = \min\{1, q\}$, а $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in B_q^\alpha$.

Аналогично теореме 5 имеем.

Теорема 6. Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^{q'} < \infty,$$

где $q' = \min\{1, q\}$, а $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in H_q^\alpha$.

Эти результаты легко улучшить, используя теорию интерполяционных пространств.

Теорема 7. [10] Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^q < \infty,$$

где $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in B_q^\alpha$.

Теорема 8. Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^q < \infty,$$

где $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in H_q^\alpha$.

Список использованных источников

- 1 Flett, T. M. Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk / T. M. Flett // J. Math. Anal. and Appl. – 1972. – V. 39, № 1. – P. 121–158.
- 2 Пекарский, А. А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации / А. А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124, № 4. – С. 571–588.
- 3 Пекарский, А. А. Рациональные приближения выпуклых функций / А. А. Пекарский // Матем. заметки. – 1985. – Т. 38, № 5. – С. 679–690.
- 4 Уолш, Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области / Дж. Л. Уолш. – Москва : ИЛ, 1961. – 508 с.
- 5 Lorentz, G. G. Constructive Approximation. Advanced problems / G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin : Springer-Verlag, 1996. – 651 p.
- 6 DeVore R. A., Constructive approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorentz. – New York-Berlin : Springer-Verlag, 1993. – Vol. 303. – 452 p.
- 7 Пекарский, А. А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке / А. А. Пекарский // Матем. сб. – 1987. – Т. 133, № 1. – С. 86–102.
- 8 Долженко, Е. П. Равномерные аппроксимации и глобальные функциональные свойства / Е. П. Долженко // Докл. Акад. наук СССР. – 1966. – Т. 166, № 3. – С. 526–529.
- 9 Мисюк, В. Р. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры / В. Р. Мисюк // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 9. – С. 105–108.
- 10 Мисюк, В. Р. Об обратной теореме теории рациональных приближений для пространств Бергмана / В. Р. Мисюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – №1(2). – С. 34–37.

В. В. Можаровский

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОРТОТРОПНОГО ПОКРЫТИЯ, ЖЕСТКО СКРЕПЛЕННОГО С ОСНОВАНИЕМ

На современном этапе развития машиностроения актуальной задачей является создание новых термостабильных износостойких слоев из композитов с анизотропией механических свойств и градиентной структурой. В некоторой степени эти свойства касаются и для материалов покрытий на основе нитридов железа и хрома, хотя, следует отметить, что исследователи при расчетах элементов конструкций учитывают, в основном, только анизотропию сопротивления деформированию, не считая изменения деформированного и напряженного состояний вследствие анизотропии упругих свойств. Сложность учета анизотропии механических свойств еще заключается в том, что недостаточное внимание уделяется экспериментальным исследованиям и разработке, и созданию математических моделей расчета деформированного и напряженного состояний в покрытиях и основаниях.

В настоящей работе представлена математическая модель асимптотического расчета деформирования ортотропного покрытия, жестко скрепленного с основанием. В частности, приводятся основные зависимости, необходимые для реализации расчета перемещений в покрытиях при действии граничных нормальных и касательных усилий, например, диапазоне $(-a, a)$. Используя предложенный алгоритм [1] создания функции Грина, легко строится интегральное уравнение для решения контактных задач с учетом трения в области контакта. Рассмотрим слоистый материал, армированный волокнами, которые ориентированы в направлении одной из осей X или Y (координатные оси совпадают с основными направлениями материала (рисунок 1).

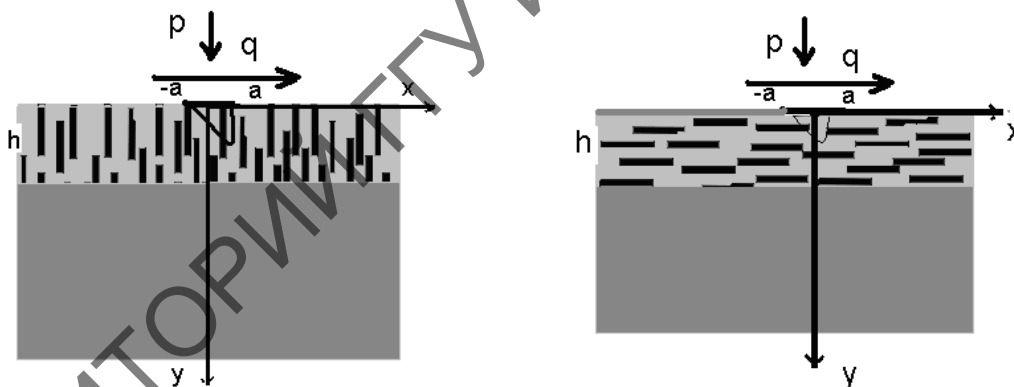


Рисунок 1 – Схема расчета покрытия армированного волокнами

С позиций макромеханики расчет напряженного и деформированного такого материала при действии граничной нагрузки необходимо рассматривать на основе закономерностей ортотропии. Основным элементом слоистого материала является слой (или полоса), характеризующийся упругими постоянными S_{11} и S_{22} , S_{12} , S_{66} , который определяется обычно как трансверсально-изотропное или ортотропное тело. При наличии упругих постоянных материала экспериментально полученных, можно рассчитать его напряженно-деформированное состояние. Для упрощения решения задачи расчета выделяется отдельная полоса слоистого материала (рисунок 1), что моделирует задачу о расчете покрытия жестко скрепленного с основанием. С помощью интегралов Фурье определяется напряженно-деформированное состояние покрытия [1]. Примем физические соотношения для плоского ортотропного композита в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций, v, u – перемещения.

Входящие в уравнение коэффициенты при плоской деформации равны:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}; \quad S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2};$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии: $\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0, j = \overline{1,2}; E_x = E_1, E_y = E_2; \nu_{xy} = \nu_{12};$ где E_j, G_{12}, ν – технические постоянные материала.

Корни характеристического уравнения [1, с. 55]), будут

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}}, \text{ коэффициенты } \beta_i = 1/\gamma_i$$

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2S_{12} + S_{66}}{S_{22}}$$

для изотропного покрытия $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Асимптотические зависимости для определения деформированного состояния ортотропной полосы.

Впервые метод нахождения асимптотических зависимостей при решении контактных задач для изотропной упругой полосы на жестком основании с учетом трения разработали Александров В. М. [2], Соловьев А. С. [3]. Были представлены решения интегральных уравнений в форме степенных рядов малого параметра. Затем, Alblas J. В., Kuipers М. [4] получили аналитические зависимости и численные результаты для определения параметров контакта для полосы, скрепленной с жестким основанием. Решения для ортотропной полосы было дальше развито в работе [1, с. 66]. Аналогично как и для изотропной полосы, находим асимптотические зависимости для определения перемещений $v(x,0)$ и $u(x,0)$ ортотропной полосы на жестком основании при действии нормальной $p(x)$ и касательной $q(x)$ нагрузок на границе $-a < x < a$. Рассмотрим **случай** $h < a$. Согласно работе [1, с. 118] пренебрегая членами высших порядков, имеем перемещения:

$$v(x,0) = \left(S_{22} - \frac{S_{12}^2}{S_{11}} \right) hp(x), \quad -a < x < a; \quad u(x,0) = -S_{66}hq(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = S_{12}q(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S_{22} \frac{1}{h} q(x), \quad -a < x < a.$$

Случай $h > a$. Ранее были получены перемещения полосы на жестком основании при различных нагрузках. Нетрудно показать, что перемещения выражаются через интегралы вида

$$I_1 = \int_0^{\infty} R_1(\beta_1) \frac{\cos \beta \xi}{\beta} d\beta; \quad I_2 = \int_0^{\infty} R_2(\beta) \frac{\sin \beta \xi}{\beta} d\beta, \quad \xi = (x-t)/h.$$

Разложив $\cos \beta \xi$ и $\sin \beta \xi$ в степенные ряды, получим I_1 и I_2 в виде сумм степенных рядов, которые сходятся при $|\xi| < 2$, $|x| < a$. Для симметричной нормальной нагрузки $p(x)$, перемещение (осадка поверхности) будет

$$v = \frac{S_{22}}{\pi} (\beta_2 + \beta_1) \left[\int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{t-x}{h} \right| dt + \sum_{i=0}^{\infty} d_i \int_{-a}^a p(t) \left(\frac{t-x}{h} \right)^{2i} dt \right], \quad |x| < a.$$

Для касательной нагрузки $q(x)$, перемещение (осадка поверхности) будет

$$v = \frac{-(S_{22}\beta_1\beta_2 + S_{12})}{2} + \left[\frac{S_{22}}{\pi} (\beta_2 + \beta_1) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_{-a}^a q(t) \left(\frac{t-x}{h} \right)^{2i-1} dt \right) \right], \quad |x| < a.$$

Коэффициенты b_i определяются численным интегрированием (аналогично, как в [1, с. 41]):

$$d_0 = \int_0^{\infty} \frac{(1-T(\beta)/D(\beta)) - e^{-\beta}}{\beta} d\beta; \quad d_j = \frac{(-1)^j}{(2j)!} \int_0^{\infty} (1-T(\beta)/D(\beta)) \beta^{2j-1} d\beta, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$D(\beta) = R_1 Q_1 + \beta_2 R_2 Q_2 + (\beta_1 R_1 Q_2 + \beta_2 R_2 Q_1) sh \frac{\beta}{\beta_1} sh \frac{\beta}{\beta_2} - (\beta_1 Q_1 R_2 + \beta_2 Q_2 R_1) ch \frac{\beta}{\beta_1} ch \frac{\beta}{\beta_2}$$

$$T(\beta) = (R_2 Q_1 sh \frac{\beta}{\beta_1} ch \frac{\beta}{\beta_2} - R_1 Q_2 sh \frac{\beta}{\beta_2} ch \frac{\beta}{\beta_1}) (\beta_2 - \beta_1)$$

$$F(\beta) = \left[(R_2 Q_1^2 + R_1 Q_2^2) sh \left(\frac{\beta}{\beta_1} \right) sh \left(\frac{\beta}{\beta_2} \right) - (R_1 + R_2) Q_1 Q_2 ch \left(\frac{\beta}{\beta_1} \right) ch \left(\frac{\beta}{\beta_2} \right) + Q_1 Q_2 (R_1 + R_2) \right]$$

$$N(\beta) = F(\beta) \frac{\beta_1 \beta_2}{(S_{22}\beta_1\beta_2 + S_{12})}$$

$$b_j = \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)!} \frac{(S_{22}\beta_1\beta_2 + S_{12})}{S_{22}(\beta_2 + \beta_1)} \int_0^{\infty} (1-N(\beta)/D(\beta)) \beta^{2j-2} d\beta; \quad \left| \frac{t-x}{h} \right| < 2$$

$$\text{где } Q = S_{12} \gamma_i - \frac{S_{22}}{\gamma_i}; \quad R_i = S_{11} \gamma_i^2 - S_{12}; \quad i = 1, 2;$$

Используя действия сосредоточенной касательной силы определяем перемещения v_q в виде интеграла:

$$v_q = \frac{\beta_1 \beta_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(\beta) \frac{\sin(\frac{x\beta}{h})}{\beta}}{D(\beta)} d\beta;$$

Расчеты по данной зависимости практически совпадают с расчетами по асимптотическим формулам. Выше приведенные формулы можно применять для изотропного случая, если β_1, β_2 стремятся к 1. Например, пусть задан волокнистый материал с модулями

упругости $E_x = E_1 = E_{\max} = 50.8$ ГПа; $E_y = E_2 = 4.21$ ГПа; модуль сдвига $G_{12} = 2.10$ Гпа. Для оценки влияния анизотропии упругого покрытия рассматривалась задача для покрытия из стекловолокна для 2-х случаев – когда ось X направлена вдоль волокон (случай модули упругости равны: коэффициент Пуассона $\nu_{12} = 0.3$) (плосконапряженное состояние) поперек волокон. Для тестирования программы расчета по выше приведенным зависимостям был рассмотрен частный случай когда $E_1 = 80.8$, $E_2 = 80.78$, $G_{12} = 31.07$ и $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{31} = \nu_{23} = 0.3$ для плоского деформированного состояния, что соответствует изотропному состоянию. Расчет показал, что $\beta_1 = 0.990126$, $\beta_2 = 1.00984$. Все рассчитываемые коэффициенты d и b совпадают с коэффициентами рассчитанными по методике [1, с. 40].

Таким образом, в работе предложена методика расчета деформативности покрытий, обладающих анизотропными свойствами. Используя данную методику можно численно решать контактные задачи как для ортотропных материалов, так и для изотропных.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ, задание № T20УКА – 012.

Список использованных источников

- 1 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 280 с.
- 2 Александров В. М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления и трения / В. М. Александров // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34. – Вып. 2. – С. 246–257.
- 3 Solov'ev, A. S. An integral equation and its application to contact problems in the theory of elasticity with friction and cohesion forces / A. S. Solov'ev // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1969. – Vol. 33. – № 6. – P. 1042–1050.
- 4 Alblas, J. B. The two dimensional contact problem of a rough stamp sliding slowly on an elastic layer–I. General considerations and thick layer asymptotics / J. B. Alblas, M. Kuipers // Int. J. Solids Structures – 1971. – Vol. 7(1) – P. 99–109.

М. В. Москалева, В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ ИЗ КОМПОЗИТОВ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Поиск построения математических моделей и оптимального решения проблемы определения контактных напряжений при взаимодействии упругих тел из композитов является актуальным в наше время. Основную роль уделяется контактным задачам механики деформируемого твердого тела. Для решения таких задач широко используются аналитические методы [1] и численные методы, поскольку они позволяют расширить возможности анализа напряженного состояния в области контакта. Таким образом, является актуальным разработка таких методик, которые позволяют достаточно точно описать модель поведения исследуемых процессов, получить решение поставленной задачи с построением алгоритма численной реализации.

Основной причиной выхода из строя в условиях эксплуатации деталей машин является износ и повреждение их рабочих поверхностей. В основном процесс изнашивания сопровождается изменением формы и размеров деталей, возникновением дополнительных динамических нагрузок и концентрацией напряжений.

В настоящее время наблюдается стремительный рост производства полимерных композитов. Они проникают в самые различные области техники. Полимерные материалы

предоставляют возможность получать износостойкие и противокоррозионные покрытия, герметизировать трещины, резьбовые соединения, восстанавливать прессовые посадки.

В данной работе рассматривается метод расчета напряженно-деформированного состояния ортотропных тел из композитов, которая сводится к решению плоских модельных задач о действии распределенной нагрузки на границе [2].

Рассматривается дискретная аппроксимация распределенного давления на границе путем разбиения на n участков.

Положим, что на каждом отрезке давление можно описать параболическим распределением [3]

$$P_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2, \quad t = x - s,$$

$$\text{где } c_i = \frac{P(s_i - l) + P(s_i + l) - 2P(s_i)}{2l^2}, \quad b_i = \frac{P(s_i + l) - P(s_i - l)}{2l} - 2c_i s_i, \quad a_i = P(s_i) - b_i s_i - c_i s_i^2.$$

Суммарное напряжение, действующее в теле определяем по формулам суммирования на каждом граничном участке:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^n (\sigma_x)_i; \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^n (\sigma_y)_i; \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^n (\tau_{xy})_i.$$

$$\begin{aligned} \text{где } (\sigma_x)_i &= -\frac{1}{\pi} [a_i L_{0i} + b_i y L_{1i} + c_i y^2 L_{2i}] \\ (\sigma_y)_i &= -\frac{1}{\pi} [a_i L_{3i} + b_i y L_{4i} + c_i y^2 L_{4i}] \\ (\tau_{yx})_i &= -\frac{1}{\pi} [a_i L_{4i} + b_i y L_{1i} + c_i y^2 L_{4i}] \end{aligned}$$

$A_i = x - (s_i - l), B = x - (s_i + l), l$ – полуширина зоны контакта,

$$\begin{aligned} L_{0i} &= \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)} \left(-\frac{1}{\beta_1} \left(\operatorname{arctg} \frac{B_i \beta_1}{y} - \operatorname{arctg} \frac{A_i \beta_1}{y} \right) + \frac{1}{\beta_2} \left(\operatorname{arctg} \frac{B_i \beta_2}{y} - \operatorname{arctg} \frac{A_i \beta_2}{y} \right) \right), \\ L_{1i} &= \frac{1}{2(\beta_1 - \beta_2)} \left(-\frac{1}{\beta_1^2} \left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}) \right) + \frac{1}{\beta_2^2} \left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}) \right) \right), \\ L_{2i} &= \frac{1}{y(\beta_1 - \beta_2)} \left(-\frac{1}{\beta_1^2} (B_i - A_i) + \frac{1}{\beta_2^2} (B_i - A_i) \right) + \\ &+ \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)} \left(\frac{1}{\beta_1^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{B_i \beta_1}{y} - \operatorname{arctg} \frac{A_i \beta_1}{y} \right) - \frac{1}{\beta_2^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{B_i \beta_2}{y} - \operatorname{arctg} \frac{A_i \beta_2}{y} \right) \right), \\ L_{3i} &= \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)} \left(\left(\operatorname{arctg} \frac{B_i \beta_1}{y} - \operatorname{arctg} \frac{A_i \beta_1}{y} \right) - \left(\operatorname{arctg} \frac{B_i \beta_2}{y} - \operatorname{arctg} \frac{A_i \beta_2}{y} \right) \right), \\ L_{4i} &= \frac{1}{2(\beta_1 - \beta_2)} \left(\left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}) \right) - \left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}) \right) \right), \end{aligned}$$

Исходя из полученных аналитических зависимостей, был разработан алгоритм по расчету напряжений при контактном взаимодействии тел из композитов.

Список использованных источников

- 1 Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва : Мир, 1989. – 510 с.
- 2 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 290 с.

3 Москалева, М. В. Определение напряженно-деформируемого состояния ортотропного тела при контактном взаимодействии / М.В. Москалева // Творчество молодых 2020: сборник научных работ студентов, магистрантов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель, 2020 г.: в 3 ч. / М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т ГГУ им. Ф. Скорины ; главн. ред. Р. В. Бородич [и др.]. – Гомель, 2020. – Ч. 1. – С. 209–212.

В. И. Мурашко

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные терминология и обозначения, которые, если необходимо, могут быть найдены в [1, 2].

Одним из центральных направлений современной алгебры является изучение классов алгебраических систем (групп, колец, алгебр Ли и т. д.) Задачами этого направления являются построение классов алгебраических систем, изучение свойств систем в данном классе и распознавание принадлежности системы данному классу. Наибольшее развитие данный подход получил в теории конечных групп, в связи с развитием теории формаций конечных групп. Основополагающие результаты этого направления изложены в монографиях Л. А. Шеметкова [1], Т. Хоукса и К. Дерка [3], А. Баллестера-Болинше и Л. М. Эсквэйро [4], Го Вэньбиня [5] и др., а также в многочисленных статьях отечественных и зарубежных математиков. Во многих современных работах исследуются теоретические аспекты распознавания принадлежности группы данной формации.

В последнее время особое значение принимают вычислительные аспекты современной алгебры, ввиду развития пакетов компьютерной алгебры (например, GAP и MAGMA) и расширения приложений теории конечных групп и их формаций в других областях математики (например, в теории кодирования, криптографии, теории формальных языков и автоматов [6]). Отметим, что по вычислительной теории (конечных) групп имеется достаточно много результатов (см., например, [7]), а вычислительная теория классов групп только начинает развиваться.

Конечную группу можно задать различными способами. Наиболее часто встречаемыми из них являются задания групп с помощью перестановок, матриц или порождающих элементов и определяющих соотношений. В данной работе мы будем рассматривать *только группы перестановок*, под заданием группы будем понимать задание порождающих ее перестановок. Известный алгоритм Симса гарантирует, что группа перестановок степени n может быть задана не более чем n^2 порождающими элементами. Далее мы рассматриваем *только такие задания групп*.

Известно (по модулю классификации конечных простых групп), что порождающие множества элементов силовской подгруппы и ее нормализатора данной группы перестановок (даны порождающие перестановки) степени n могут быть найдены за полиномиальное время от n и числа порождающих [8, 9].

Ввиду этого естественно возникает вопрос.

Вопрос 1. *Для данного класса групп \mathcal{F} и группы G перестановок степени n существует ли алгоритм, определяющий принадлежит ли группа G классу \mathcal{F} за полиномиальное время от n и числа порождающих группы G ?*

Важным элементом теории классов групп является построение и нахождение связанных с данным классом групп \mathcal{F} канонических подгрупп (\mathcal{F} -корадикала, \mathcal{F} -радикала, \mathcal{F} -гиперцентра и т. д.). Например, силовская p -подгруппа является \mathcal{N}_p -проектором для класса всех p -групп \mathcal{N}_p . Поэтому естественно задать следующий вопрос:

Вопрос 2. *Для данной формации конечных групп \mathcal{F} и группы перестановок G эквивалентны ли сложности задач определения принадлежности группы G классу \mathcal{F} и построения в группе G данной канонической \mathcal{F} -подгруппы?*

Важным семейством формаций являются локальные формации – формации задающиеся с помощью действия группы на главных факторах. Напомним хорошо известное определение локальной формации. Функция вида $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация \mathfrak{F} называется локальной, если

$$\mathfrak{F} = (G \mid G/C_G(H/K) \in f(p))$$

Одним из основных результатов является для любых $p \in \pi(H/K)$ и главного фактора H/K группы G), где f – некоторый локальный экран.

Теорема 1. Пусть f – локальный экран локальной формации \mathfrak{F} . Предположим, что существуют алгоритмы, вычисляющие $f(p)$ -корадикал за полиномиальное время. Тогда \mathfrak{F} -корадикал также вычисляется за полиномиальное время.

Напомним, что через \mathfrak{U} обозначается класс всех сверхразрешимых групп. В последние годы активно исследуются формации сверхразрешимого типа.

Следствие 1.1. Существует алгоритм, вычисляющий за полиномиальное время \mathfrak{U} -корадикал группы G . За полиномиальное время можно проверить, принадлежит ли данная группа формации \mathfrak{U} .

Напомним [10], что подгруппа H группы G называется \mathbb{P} -субнормальной если $H = G$ или существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $|H_i: H_{i-1}|$ является простым числом для всех $1 \leq i \leq n$. Напомним [10], что группа называется расширенно сверхразрешимой, если все ее силовские подгруппы \mathbb{P} -субнормальны. Класс всех расширенно сверхразрешимых групп обозначается через $w\mathfrak{U}$.

Следствие 1.2. Существует алгоритм, вычисляющий за полиномиальное время $w\mathfrak{U}$ -корадикал группы G . За полиномиальное время можно проверить, принадлежит ли данная группа формации $w\mathfrak{U}$.

В работе [11] изучались группы с субмодулярными силовскими подгруппами. В [12] было показано, что класс данных групп $sm\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией групп, обладающих силовской башней сверхразрешимого типа.

Следствие 1.3. Существует алгоритм, вычисляющий за полиномиальное время $sm\mathfrak{U}$ корадикал группы G . За полиномиальное время можно проверить, принадлежит ли данная группа формации $sm\mathfrak{U}$.

Напомним [12], что группа называется сильно сверхразрешимой, если она сверхразрешима и все ее силовские подгруппы субмодулярны. Данный класс групп $s\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией.

Следствие 1.4. Существует алгоритм, вычисляющий за полиномиальное время $s\mathfrak{U}$ -корадикал группы G . За полиномиальное время можно проверить, принадлежит ли данная группа формации $s\mathfrak{U}$.

Развитием понятия локальной формации является понятие композиционной формации, которое определяется с помощью понятия композиционного экрана. Тем не менее, задание композиционной формации \mathfrak{F} через её композиционный экран обладает существенным недостатком, т.к. оно даёт очень мало информации о действии \mathfrak{F} -группы G на её неабелевых главных факторах. Например, значение максимального внутреннего композиционного экрана на неабелевых факторах равняется самой формации, что делает его непригодным при распознавании принадлежности группы формации \mathfrak{F} и вычислении канонических \mathfrak{F} -подгрупп.

Пусть \mathfrak{X} – класс групп. Напомним [2, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется \mathfrak{X} -центральным в G , если

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}.$$

В противном случае, он называется \mathfrak{X} -эксцентральным в G .

В последние годы предложен целый ряд конструкций композиционных формаций путём уточнения действия \mathfrak{F} -группы на её неабелевых главных факторах. В работах

[13, 14] Го Вэньбинь и А. Н. Скиба ввели и изучали класс \mathfrak{F}^* всех квази- \mathfrak{F} -групп для насыщенной формации \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F}^* = (G \mid x \text{ индуцирует внутренний автоморфизм на } H/K \text{ для любых } \mathfrak{F} \text{ – эксцентрального главного фактора } H/K \text{ и } x \in G).$$

В указанных работах доказано, что \mathfrak{F}^* – композиционная формация для локальной формации \mathfrak{F} . Нами доказано:

Теорема 2. Пусть f – локальный экран локальной формации \mathfrak{F} . Предположим, что существуют алгоритмы, вычисляющие $f(p)$ -корадикал за полиномиальное время. Тогда принадлежность группы \mathfrak{F}^* проверяется за полиномиальное время.

Следствие 2.1. За полиномиальное время можно проверить, является ли группа квазинильпотентной.

Одним из примеров композиционных нелокальных формаций является класс \mathcal{U}_c всех c -сверхразрешимых групп, введенный В. А. Ведерниковым в [15]. Напомним, что группа называется c -сверхразрешимой (SC -группой в терминологии Д. Робинсона [16]), если всякий её главный фактор является простой группой.

В работе [17] Е.Н. Мысловцом был введен класс \mathfrak{F}_{ca} всех ca - \mathfrak{F} -групп:

$$\mathfrak{F}_{ca} = (G \mid \text{абелевы главные факторы } G \text{ – центральны а неабелевы – простые группы})$$

Если формация \mathfrak{F} локальна, то \mathfrak{F}_{ca} – композиционная формация.

Теорема 3. Пусть f – локальный экран локальной формации разрешимых групп \mathfrak{F} . Предположим, что существуют алгоритмы, вычисляющие $f(p)$ -корадикал за полиномиальное время. Тогда принадлежность группы \mathfrak{F}_{ca} проверяется за полиномиальное время.

Следствие 3.1. За полиномиальное время можно проверить, является ли группа c -сверхразрешимой.

Обобщение класса c -сверхразрешимых групп было предложено в работе [18] А. Ф. Васильевым, Т. И. Васильевой и Е. Н. Мысловцом. Напомним, что группа G является расширенно c -сверхразрешимой, если ее каждый неабелевый главный фактор изоморфен простой группе, а каждый её абелевый главный фактор $w\mathcal{U}$ -централен.

Следствие 3.2. За полиномиальное время можно проверить, является ли группа расширенно c -сверхразрешимой.

Часть из упомянутых в работе алгоритмов и некоторые другие реализована в системе компьютерной алгебры GAP.

Список использованных источников

- 1 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
- 2 Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 256 с.
- 3 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
- 4 Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.
- 5 Guo, W. Structure theory for canonical classes of finite groups / W. Guo. – Heidelberg – New York – Dordrecht – London : Springer, 2015. – 359 p.
- 6 Ballester-Bolinches, A. Languages associated with saturated formations of groups / A. Ballester-Bolinches, J.-E. Pin, X. Soler-Escriva // Forum Mathematicum. – 2013. – Vol. 27. № 3. – P. 1471–1505.
- 7 Seress, Á. (2003). Permutation Group Algorithms (Cambridge Tracts in Mathematics) / Á. Seress. – Cambridge : Cambridge University Press, 2009. – 264 p.

- 8 Kantor, W. M. Sylow's Theorem in Polynomial Time / W. M. Kantor // J. Comput. Syst. Sci. – 1985. – Vol. 30. – P. 359–394.
- 9 Kantor, W. M. Finding Sylow Normalizers in Polynomial Time / W. M. Kantor // J. Algorithms. – 1990. – Vol. 11. – № 3. – P. 523–563.
- 10 Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
- 11 Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
- 12 Vasilyev, V. A. Finite groups with submodular Sylow subgroups / V. A. Vasilyev // Siberian Math. J. – 2015. – Vol. 56, № 6. – P. 1019–1027.
- 13 Guo, W. On finite quasi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A. N. Skiba // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.
- 14 Guo, W. On some classes of finite quasi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.
- 15 Ведерников, В. А. О некоторых классах конечных групп / В. А. Ведерников // ДАН БССР. – 1988. – Т. 32, № 10. – С. 872–875.
- 16 Robinson, D. J. S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D. J. S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–159.
- 17 Мысловец, Е. Н. О конечных са-F-группах / Е. Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2(19). – С. 64–68.
- 18 Васильев, А. Ф. Конечные расширенно с-сверхразрешимые группы и их взаимно перестановочные произведения / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, Е. Н. Мысловец // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 603–616.

В. И. Мурашко

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О σ -НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ

Рассматриваются только конечные группы. В докладе через $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I \text{ и } \pi_i \cap \pi_j = \emptyset \text{ для всех } i \neq j\}$ обозначается некоторое разбиение множества простых чисел \mathbb{P} на попарно непересекающиеся подмножества. В работе [1] А. Н. Скиба положил начало σ -методу, суть которого заключается в том, чтобы изучать подгрупповое строение группы, не относительно простых делителей порядка группы, а относительно подмножеств простых делителей порядка группы из разбиения σ множества простых чисел. Этот метод активно подхватили и начали разрабатывать как отечественные, так и зарубежные математики. С базовыми результатами и вопросами этого направления можно ознакомиться в обзорах [2, 3].

Согласно [1], группа G называется σ -нильпотентной, если она имеет нормальную холлову π_i -подгруппу для всех подмножеств простых чисел $\pi_i \in \sigma$ таких, что $\pi_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Класс всех σ -нильпотентных групп обозначается через \mathfrak{N}_σ . Пусть $\sigma_1 = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$. Тогда $\mathfrak{N}_{\sigma_1} = \mathfrak{N}$ – класс всех nilпотентных групп.

Отметим, что многие результаты σ -метода предполагают наличие холловых подгрупп. В данной работе обсуждаются результаты о σ -нильпотентных группах, для доказательства которых не предполагается наличие холловых подгрупп. В основном, вместо них используются \mathfrak{B}_π -максимальные подгруппы или \mathfrak{B}_π -проекторы.

Напомним (см. [4, с. 127–128]), что главный фактор H/K группы G называется \mathfrak{X} -центральным в G , если

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}.$$

Через $Z_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается \mathfrak{X} -гиперцентр группы G , т. е. наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что всякий главный фактор H/K группы G ниже нее является \mathfrak{X} -центральным. Если \mathfrak{X} – формация, то \mathfrak{X} -гиперцентр существует в любой группе по [4, §14, лемма 14.1].

Теорема 1. Пусть G – группа. Следующие условия для π_i -элемента $g \in G$ эквивалентны:

- (1) $g \in Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$;
- (2) $gx = xg$ для всех π_i' -элементов x из G ;
- (3) $|G : C_G(\langle g \rangle^G)|$ – π_i -число;
- (4) $|G : C_G(g)|$ – π_i -число и $G^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq C_G(g)$.

Из предыдущего результата получаем описание элементов гиперцентра.

Следствие 1.1 (Р. Бэр [5]). Следующие условия для p -элемента $g \in G$ эквивалентны:

- (1) $g \in Z_\infty(G)$;
- (2) $gx = xg$ для всех p' -элементов x из G ;
- (3) $|G : C_G(\langle g \rangle^G)|$ – p -число;
- (4) $|G : C_G(g)|$ – p -число и $G^{\mathfrak{N}} \leq C_G(g)$.

Пусть \mathfrak{X} – класс групп. Подгруппа U группы G называется \mathfrak{X} -максимальной в G [6, гл. III, определение 3.1], если (а) $U \in \mathfrak{X}$, и (б) из $U \leq V \leq G$ и $V \in \mathfrak{X}$ следует, что $U = V$. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{X} -проектором G [6, гл. III, определение 3.2], если HN/N \mathfrak{X} -максимальна в G/N для любой $N \trianglelefteq G$. Пусть π – множество простых чисел. Напомним, что класс \mathfrak{G}_π всех π -групп является насыщенной формацией. Согласно [6, гл. III, предложение 4.1], всякая насыщенная формация является классом Шунка. Тогда \mathfrak{G}_π -проекторы существуют в любой группе по [6, гл. III, теорема 3.10]. Будем говорить, что подгруппа H π -максимальна в G , если она \mathfrak{G}_π -максимальна в G .

Следствие 1.2. Пересечение нормализаторов всех π_i -максимальных подгрупп G для всех $i \in I$ совпадает с $Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$.

Следствие 1.3 (Ф. Холл [7]). В любой группе гиперцентр совпадает с пересечением всех нормализаторов силовских подгрупп.

Заметим, что пересечение максимальных абелевых подгрупп группы G совпадает с центром группы G .

Следствие 1.4 (А.Н. Скиба [8]). Пересечение всех \mathfrak{N}_σ -максимальных подгрупп G совпадает с $Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$.

Следствие 1.5 (Р. Бэр [5]). Пересечение всех максимальных нильпотентных подгрупп совпадает с гиперцентром.

Известно, что пересечение максимальных сверхразрешимых подгрупп группы G не обязательно совпадает со сверхразрешимым гиперцентром группы G (см., например, [8]). Следуя [8], через $Int_{\mathfrak{F}}(G)$ будем обозначать пересечение всех \mathfrak{F} -максимальных подгрупп группы G . Л.А. Шеметков поставил следующую проблему на Гомельском алгебраическом семинаре в 1995: Для каких (нормально) наследственных локальных (композиционных) формаций \mathfrak{F} равенство $Z_{\mathfrak{F}}(G) = Int_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G ?

Решение этой проблемы для наследственных локальных формаций было получено А.Н. Скибой в [8]. Для нелокальных формаций эта проблема рассматривалась автором в [9], где она была решена для класса всех квази- \mathfrak{F} -групп, где \mathfrak{F} – наследственная локальная формация.

Важным классом формаций являются формации с условием Шеметкова. Напомним [4, §24], что формация \mathfrak{F} называется формацией с условием Шеметкова, если любая минимальная не- \mathfrak{F} -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Нами доказано:

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ – формация с условием Шеметкова. Предположим, что равенство $Z_{\mathfrak{F}}(G) = Int_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G . Тогда найдётся разбиение σ множества всех простых чисел \mathbb{P} такое, что класс \mathfrak{F}^σ всех групп, все подгруппы которых принадлежат \mathfrak{F} , совпадает с классом всех σ -нильпотентных групп.

В частности, проблема 1995 года полностью решена для наследственных формаций с условием Шеметкова.

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ – наследственная формация с условием Шеметкова. Тогда и только тогда равенство $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G , когда \mathfrak{F} является классом всех σ -нильпотентных групп для некоторого разбиения σ множества \mathbb{P} .

Говорят, что подгруппа H группы G перестановочна с подгруппой K если HK является подгруппой G . Напомним, что H называется S -перестановочной в G , если она перестановочна со всякой силовой подгруппой группы G . Как было показано О. Кегелем [10] и В. Дескинсом [11], если H является S -перестановочной подгруппой G , то H^G/H_G нильпотентна. Более того, множество всех S -перестановочных подгрупп G образует под решетку решетки всех подгрупп G (см. [10, Satz 2]). П. Шмид [12] показал, что если H S -перестановочна в G , то $N_G(H)$ также S -перестановочна в G .

Понятие S -перестановочной подгруппы играет важную роль при изучении конечных непростых групп. Поэтому предпринимались попытки обобщить это понятие. В частности, Скиба [1] предложил следующее обобщение понятия S -перестановочной подгруппы. Подгруппа H группы G называется σ -перестановочной, если в G для любого $\pi_i \in \sigma$ имеется холлова π_i -подгруппа P_i , для которой $HP_i^x = P_i^xH$ для всех $x \in G$. Им были получены аналоги результатов Кегеля и Дескинса для групп с заданными наборами холловых подгрупп (см. [2]).

Отметим, что для определения σ -перестановочной подгруппы требуется существование заданной системы холловых подгрупп. В данном докладе мы распространим это понятие на класс всех групп.

Определение 1. Подгруппу H группы G будем называть:

(1) σ - m -перестановочной, если она перестановочна со всеми π_i -максимальными подгруппами G для всех $\pi_i \in \sigma$.

(2) σ - p -перестановочной, если для всех $\pi_i \in \sigma$ найдётся \mathfrak{G}_{π_i} -проектор P_i группы G такой, что $HP_i^x = P_i^xH$ для всех $x \in G$.

Примерами указанных подгрупп являются π_i -подгруппы σ -нильпотентного гиперцентра.

Пусть $\sigma_1 = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$. Тогда понятия S -перестановочной и σ_1 - x -перестановочной подгрупп совпадают для $x \in \{m, p\}$. Пусть π – множество простых чисел. Если H – холлова π -подгруппа G , то она является \mathfrak{G}_{π} -проектором G . Следовательно, всякая σ -перестановочная подгруппа является σ - p -перестановочной.

Очевидно, что всякая σ - m -перестановочная подгруппа является σ - p -перестановочной. Как следует из теорем Холла, понятия σ -перестановочной и σ - x -перестановочной подгрупп совпадают для $x \in \{m, p\}$ в классе всех разрешимых групп.

Теорема 3. Подгруппа H группы G σ - p -перестановочна тогда и только тогда, когда она перестановочна со всеми \mathfrak{G}_{π_i} -проекторами G для всех $\pi_i \in \sigma$.

Гипотеза. Подгруппа H группы G σ - m -перестановочна тогда и только тогда, когда она σ - p -перестановочна.

Связь между \mathfrak{N}_{σ} и σ - p -перестановочными подгруппам показана в

Теорема 4. Пусть H – σ - p -перестановочная подгруппа группы G . Тогда H^G/H_G σ -нильпотентна.

Из этой теоремы напрямую следуют результаты об S -перестановочных и σ -перестановочных подгруппах.

Следствие 4.1 (О. Кегель [10] и В. Дескинс [11]). Пусть H – S -перестановочная подгруппа группы G . Тогда H^G/H_G нильпотентна.

Следствие 4.2 (А.Н. Скиба [1]). Пусть G – E_{π_i} -группа для всех $\pi_i \in \sigma$. Если H – σ -перестановочная подгруппа G , то H^G/H_G σ -нильпотентна.

Следующая теорема показывает, что наша гипотеза верна для σ -нильпотентной σ - p -перестановочной подгруппы.

Теорема 5. Пусть H – σ -нильпотентная подгруппа группы G . Тогда
 (1) Если H σ - p -перестановочна в G , то H σ - m -перестановочна в G .
 (2) H является σ - p -перестановочной в G тогда и только тогда, когда всякая холлова π_i -подгруппа H σ - p -перестановочна в G для всех $\pi_i \in \sigma$.

Следствие 5.1 (П. Шмид [12]). Пусть H – нильпотентная подгруппа группы G . Тогда и только тогда H S -перестановочна в G , когда всякая силовская подгруппа H S -перестановочна в G .

Главным результатом этого раздела является

Теорема 6. Множество всех σ - p -перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку решетки всех подгрупп G .

Следствие 6.1 (О. Кегель [10]). Множество всех S -перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку решетки всех подгрупп G .

Следствие 6.2 (А.Н. Скиба [1]). Пусть всякая подгруппа группы G является D_{π_i} -группой для всех $\pi_i \in \sigma$. Тогда множество всех σ -перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку решетки всех подгрупп G .

Наш заключительный результат устанавливает σ - p -перестановочность нормализатора σ - p -перестановочной подгруппы.

Теорема 7. Если H – σ - p -перестановочная подгруппа группы G , то $N_G(H)$ также является σ - p -перестановочной подгруппой G .

Следствие 7.1 (П. Шмид [12]). Если H – S -перестановочная подгруппа группы G , то $N_G(H)$ также является S -перестановочной подгруппой G .

С полными доказательствами результатов, обсуждаемых в докладе, можно ознакомиться в работах [13–15].

Список использованных источников

- 1 Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – No. 436. – P. 1–16.
- 2 Skiba, A. N. On Some Results in the Theory of Finite Partially Soluble Groups / A. N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – No. 3. – P. 281–309.
- 3 Skiba, A. N. On some arithmetic properties of finite groups / A. N. Skiba // Note Mat. – 2016. – No. 36. – P. 35–59.
- 4 Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 256 с.
- 5 Baer, R. Group elements of prime power index / R. Baer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 20–47.
- 6 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
- 7 Hall, P. On the System Normalizers of a Soluble Group / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1938. – Vol. 43, № 1. – P. 507–528.
- 8 Skiba, A. N. On the \mathfrak{F} -hypercenter and the intersection of all \mathfrak{F} -maximal subgroups of a finite group / A. N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2012. – No. 216(4). – P. 789–799.
- 9 Murashka, V. I. On the \mathfrak{F} -hypercenter and the intersection of \mathfrak{F} -maximal subgroups of a finite group / V. I. Murashka // J. Group Theory. – 2018. – Vol. 21, No. 3. – P. 463–473.
- 10 Kegel, O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. H. Kegel // Math. Z – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
- 11 Deskins, W. E. On Quasinormal Subgroups of Finite Groups / W. E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.
- 12 Schmid, P. Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – No. 207. – P. 285–293.
- 13 Мурашко, В. И. Об одном обобщении теорем Бэра о гиперцентре и нильпотентном корадикале / В. И. Мурашко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 16. – С. 84–88.

14 Murashka, V. I. On a generalization of the concept of S-permutable subgroup of a finite group / V. I. Murashka // Acta Math. Hungar. – 2018. – Vol. 155, No. 2. – P. 221–227.

15 Murashka, V. I. A note on formations with the Shemetkov property / V. I. Murashka // Advances in Group Theory and Applications (принята к печати).

В. А. Немилостивая, Ю. В. Малинковский

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

СЕТИ ДЖЕКсона С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК И ДВУМЯ ТИПАМИ УЗЛОВ

Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем обслуживания заявок ранее рассматривались Ю. В. Малинковским [1]. В настоящей работе исследуется модель с двумя типами узлов – однолинейными и многолинейными.

В сеть массового обслуживания, состоящую из N узлов, поступает стационарный пуассоновский поток с параметром λ . Поступившая заявка направляется в i -й узел с вероятностью p_{0i} ($i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N p_{0i} = 1$). Число мест для ожидания в узле бесконечно. В сети

имеются два типа узлов – однолинейные и многолинейные (на самом деле многолинейные системы сводятся к однолинейным с переменной условной интенсивностью обслуживания $\mu(n) = \mu I_{\{n \neq 0\}}$, где n – число заявок в системе, I_A – индикатор события A , равный 1, если A происходит, и равный 0, если A не происходит).

Время обслуживания заявки единственным прибором i -го узла имеет показательное распределение с параметром μ_i ($i = \overline{1, M}$), условное распределение времени обслуживания заявки в остальных $N - M$ узлах, когда там находится n_i заявок, – показательное с параметром $\mu_i(n_i)$, причём $\mu_i(n_i) > 0$ для $n_i \in \mathbb{N}$ и $\mu_i(0) = 0$ ($i = \overline{M+1, N}$). Время пребывания заявки в i -ом узле является случайной величиной, условное распределение которой (если в i -м узле находится n_i заявок) показательное с параметром $\frac{v_i}{n_i}$ ($i = \overline{1, N}$). Другими сло-

вами, условная вероятность того, что пребывание каждой заявки в i -м узле закончится в промежутке времени $[t, t+h)$, если в момент t в узле находилось n_i заявок, равна $\frac{v_i}{n_i} h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная вероятность завершения пребывания хотя бы одной из

этих заявок равна $v_i h + o(h)$. Если заявка поступает в узел, свободный от заявок, она сразу начинает обслуживаться. Будем полагать для определенности, что заявки обслуживаются в порядке, соответствующем их поступлению в узлы. Мгновенно и независимо от других требований, заявка, обслуженная в i -м узле, с вероятностью p_{ij} направляется в j -й узел,

а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($i, j = \overline{1, N}, \sum_{j=0}^N p_{ij} = 1$). Если время пребывания заявки в i -м узле закончилось, то она мгновенно и независимо от других с вероятностью $r_{i,j}$ для

$i = \overline{1, M}$ переходит в j -й узел, а с вероятностью r_{i0} покидает сеть ($j = \overline{1, N}, \sum_{j=0}^N r_{ij} = 1$). Если

же $i = \overline{M+1, N}$, то она ведёт себя как обслуженная, т. е. с вероятностью p_{ij} направляется в j -й узел, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($j = \overline{1, N}$). Введём для удобства ещё узел 0, представляющий собой внешность сети. Введём также две стохастические матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NN} \end{pmatrix}.$$

Матрица P будет и матрицей маршрутизации обслуженных заявок, и матрицей маршрутизации неудовлетворенных заявок для узлов $i = \overline{M+1, N}$, а R – матрицей маршрутизации неудовлетворенных заявок для узлов $i = \overline{1, M}$. Итак, $p_{00} = r_{00} = 0$, $r_{0j} = p_{0j}$ для $j = \overline{1, N}$.

Очевидно, матрица $S = (s_{i,j}, i, j = \overline{0, N})$, где $s_{0j} = p_{0j}$, $s_{ij} = \frac{\mu_i p_{ij} + v_i r_{ij}}{\mu_i + v_i} = \frac{\mu_i}{\mu_i + v_i} p_{ij} + \frac{v_i}{\mu_i + v_i} r_{ij}$, $i = \overline{1, M}$, $s_{ij} = p_{ij}$, $i = \overline{M+1, N}$, является стохастической и будет управлять движением заявок по узлам $0, 1, \dots, N$.

Считая, что в узел поступает стационарный пуассоновский поток с той же интенсивностью $\lambda \varepsilon_i$, как и в сети, изолируем i -ый узел. Во всем остальном функционирование в узлах полагаем таким же, как и в сети. Обозначим через $\tilde{n}_i(t)$ число заявок в изолированном от сети узле ($i = \overline{1, N}$).

Для $i = \overline{1, N}$ получается система $M|M|1$ с поступающим пуассоновским потоком интенсивности $\lambda \varepsilon_i$, интенсивностью обслуживания μ_i , а время пребывания заявки в системе – случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром v_i . Она описывается таким же процессом размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$, как и стандартная система $M|M|1$ с пуассоновским поступающим потоком интенсивности $\lambda \varepsilon_i$ и интенсивностью обслуживания $\mu_i + v_i$.

Уравнения равновесия для вертикальных сечений имеют вид:

$$\lambda \varepsilon_i p_i(n_i - 1) = (\mu_i + v_i) p_i(n_i), \quad n_i = 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}.$$

Для эргодичности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$, описывающей изолированный узел, необходимо и достаточно чтобы нагрузка i -ого узла $\rho_i = \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + v_i} < 1$, $i = \overline{1, M}$. При этом стационарное распределение цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$ имеет вид:

$$p_i(n_i) = \rho_i^{n_i} (1 - \rho_i), \quad n_i = 1, 2, \dots$$

Теперь изолируем i -ый узел для $i = \overline{M+1, N}$. Получаем систему с поступающим пуассоновским потоком интенсивности $\lambda \varepsilon_i$, а условное распределение времени обслуживания прибором при условии, что в системе находится n_i заявок, – показательное с параметром $\mu_i(n_i)$, зависящим от n_i . Время пребывания заявки в системе – случайная величина, условное распределение которой при фиксированном n_i – показательное с параметром $\frac{v_i}{n_i}$.

Получаем уравнения равновесия для вертикальных сечений:

$$\lambda \varepsilon_i p_i(n_i - 1) = (\mu_i(n_i) + v_i) p_i(n_i), \quad n_i = 1, 2, \dots, i = \overline{M+1, N}.$$

Стационарное распределение цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$:

$$p_i(n_i) = p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i(l) + \nu_i}, \quad n_i = 1, 2, \dots,$$

где

$$p_i(0) = \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i(l) + \nu_i} \right)^{-1}.$$

Необходимое и достаточным условием эргодичности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$, описывающей изолированный узел, будет сходимость ряда

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i(l) + \nu_i} < \infty.$$

Обозначим через $\lambda \varepsilon_i$ интенсивность потока заявок, выходящих из i -го узла ($i = \overline{1, N}$). Поскольку заявки не рождаются и не теряются при прохождении узлов, то в стационарном режиме с точностью до множителя λ (на который можно сократить) выполняется следующий закон сохранения:

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i s_{ij} = p_{0j} + \sum_{i=1}^M \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{ij} + \nu_i r_{ij}}{\mu_i + \nu_i} + \sum_{i=M+1}^N \varepsilon_i p_{ij}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Будем предполагать, что матрица S неприводима. Тогда уравнение (1), которое будем называть уравнением трафика, при фиксированных $\mu_i, \nu_i, i = \overline{1, N}$, будет иметь единственное положительное решение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ (то есть все $\varepsilon_i > 0$).

Лемма 1. При выполнении (1)

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i s_{i0} = \sum_{i=1}^M \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}}{\mu_i + \nu_i} + \sum_{i=M+1}^N \varepsilon_i p_{i0} = 1 \quad (2)$$

Физический смысл (2) состоит в том, что (2), умноженное на λ , выражает равенство интенсивностей выходящего из сети и входящего в неё потоков.

Состоянием сети в момент t будем считать значение многомерной цепи Маркова $\vec{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_N(t))$ с непрерывным временем, где $n_i(t)$ – число заявок в i -ом узле в этот момент времени. Пространство состояний этой цепи $X = Z_+^N$, где $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и строгой положительности интенсивностей выхода из состояний этой цепи в моменты её скачков, цепь $\vec{n}(t)$, очевидно, – неприводимая цепь Маркова. Для $i = \overline{1, M}$ назовём $\rho_i = \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i}$ загрузкой i -ого узла.

Уравнений глобального равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} & p(\vec{n}) \left[\lambda + \sum_{i=1}^M (\mu_i (1 - p_{ii}) + \nu_i (1 - r_{ii})) I_{\{n_i \neq 0\}} + \sum_{i=M+1}^N (\mu_i (n_i) + \nu_i I_{\{n_i \neq 0\}}) (1 - p_{ii}) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^N p(\vec{n} - \vec{e}_i) \lambda p_{0i} I_{\{n_i \neq 0\}} + \sum_{i=1}^M p(\vec{n} + \vec{e}_i) (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) + \sum_{i=M+1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_i) (\mu_i (n_i + 1) + \nu_i) p_{i0} + \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i) (\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}) I_{\{n_i \neq 0\}} + \sum_{\substack{j=M+1 \\ j \neq i}}^N p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i) (\mu_j (n_j + 1) + \nu_j) p_{ji} I_{\{n_i \neq 0\}} \right], \quad n \in Z_+^N. \end{aligned}$$

Также получены уравнения локального равновесия

$$\begin{aligned} \lambda p(\vec{n}) &= \sum_{i=1}^M p(\vec{n} + \vec{e}_i) (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) + \sum_{i=M+1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_i) (\mu_i (n_i + 1) + \nu_i) p_{i0}, \\ p(\vec{n}) (\mu_i (1 - p_{ii}) + \nu_i (1 - r_{ii})) &= \lambda p_{0i} p(\vec{n} - \vec{e}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i) (\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}) + \\ &+ \sum_{j=M+1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i) (\mu_j (n_j + 1) + \nu_j) p_{ji}, \quad i = \overline{1, M}, n \in Z_+^N, \\ p(\vec{n}) (\mu_i (n_i) + \nu_i) (1 - p_{ii}) &= \lambda p_{0i} p(\vec{n} - \vec{e}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i) (\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}) + \\ &+ \sum_{j=M+1}^N p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i) (\mu_j (n_j + 1) + \nu_j) p_{ji}, \quad i = \overline{M+1, N}, n \in Z_+^N. \end{aligned}$$

Пусть $\{p(\vec{n}), \vec{n} \in X\}$ – предельное эргодическое распределение цепи Маркова $\vec{n}(t)$, являющееся при выполнении условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i < 1, i = \overline{1, M}, \\ \sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i(l) + \nu_i} < +\infty, i = \overline{M+1, N} \end{array} \right.$$

решением уравнений глобального равновесия.

Решение локальных уравнений равновесия будет иметь вид $p(\vec{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N)$, где $p_i(n_i)$ – стационарное распределение изолированного i -го узла.

Теорема 1. При выполнении условия $\left\{ \begin{array}{l} \rho_i < 1, i = \overline{1, M}, \\ \sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i(l) + \nu_i} < +\infty, i = \overline{M+1, N} \end{array} \right.$

цепь Маркова $\vec{n}(t)$ эргодична, а её единственное стационарное распределение имеет форму произведения $p(\vec{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N)$, где $p_i(n_i)$ – стационарное распределение изолированного i -го узла, а $\{\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\}$ – решение уравнения трафика (1).

Список использованных источников

1 Малинковский, Ю. В. Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания / Ю. В. Малинковский // АВТ. – 2015. – № 4. – С. 67–78.

Н. Б. Осипенко, А. Н. Осипенко

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ АДРЕСНОГО ПОДБОРА ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

За последние годы на рынке услуг увеличилась популярность систем по подбору информационного контента, основываясь на личностных качествах человека. Существуют разные способы персонализации подбора контента, основываясь на поведении человека, на истории его запросов или покупок. Для корректной работы соответствующих алгоритмов требуется большое количество собранной информации, что в большинстве своем делает невозможным использование такого подхода в организациях, не владеющих этими

данными. Такие гиганты как Google и т. п., сервисы которых участвуют практически в любой из сфер жизни человека, активно пользующегося интернет-технологиями, успели нарастить огромную базу знаний относительно практически каждого человека. Благодаря этим данным, такие компании способны обучать нейронные сети, которые путем расчетов способны предлагать контент, наиболее подходящий человеку. Такой подход не всегда верен, так как каждый день человека может значительно отличаться от предыдущего.

Подход, изложенный в [1], предлагает иной взгляд на взаимодействие с пользователем. Алгоритмы анализируют не просто информацию о действиях пользователя, которая может быть малополезной, они взаимодействуют с информацией, которую пользователь непосредственно предоставляет ресурсу, причем разными способами: начиная от введения личной информации и заканчивая оценкой пройденных тестов.

Концептуально предлагаемый подход ориентирован на принятие решений, основываясь на личностных характеристиках испытуемого, с учетом прогноза индивидуального предназначения и оценки текущего состояния человека с использованием результатов тестирования. В качестве рабочей тематики было выбрано направление подбора наиболее и наименее подходящего для человека информационного ресурса. В частности, были разработаны прототипы рекомендательных систем для профориентации и выбора фильмов.

Ориентация на индивидуальное предназначение человека является ключевой особенностью предлагаемого подхода. В условиях сверхдоступности разнообразной и увлекательной информации, человеку легко запутаться и отойти от своей стратегической линии жизни. Для прогноза индивидуального предназначения человека авторы в работе [1] воспользовались паспортными данными в виде даты рождения. Существует гипотеза, что дата рождения каким-то образом отражает генетический потенциал человека, а многие практикующие психологи с успехом используют алгоритм квадрата Пифагора по выявлению потенциально наиболее характерных личностных качеств. Еще одним таким инструментом считается диагностика по психологическим особенностям. В разработанных и использованных алгоритмах сделана попытка синтезировать оба подхода на основе специально разработанной систематизации деятельностей человека и увязки ее элементов с диагностическими альтернативами психологических тестов [1].

Частичная реализация этой концепции была осуществлена на примере задачи профориентации [2, 3]. Методологические аспекты автоматизации поддержки принятия решений, а также общая идея выбора подходящих для пользователя вариантов решений в заданной проблематике описаны в [4]. Применительно к решаемой в [2, 3] задаче общая схема автоматизации индивидуального подхода при подборе подходящих для человека вариантов решений в некоторой тематике реализована в виде клиент-серверного web-приложения, обеспечивающего индивидуальный подход при подборе профессий и сфер деятельности. В качестве вариантов решений в базе данных используются рекомендуемые сферы деятельности и профессии. В настоящее время в базе данных используется 326 профессий и 18 сфер деятельности: аграрно-экологическая, проектирование полезных форм, психолого-терапевтическая, духовно-религиозная, информационная сфера услуг, естественнонаучная, культуры и искусств, медико-оздоровительная, общественно-научная, педагогическая, игровая и бытовая сферы услуг, техническое творчество, экономическая, государственно-правовая, материальное производство, идеологическая, философская [2, 3, 4].

В алгоритме автоматизации выбора профессий, реализованного в качестве прототипа разрабатываемой рекомендательной системы и описываемого в [2, 3], можно выделить несколько этапов. На первом этапе рассчитывается на основе известного алгоритма квадрата Пифагора обобщенная психоматрица человека. На втором этапе выделяются значимые и незначимые для человека темы и сферы деятельности, а также профессии. Знание последних при выборе профессии помогает избежать тяжелых психологических последствий от занятий неинтересным делом. Затем клиенту предлагается пройти психологическое тестирование на серии тестов и получить более точные рекомендации по выбираемым решениям.

В статье [5] представлен второй вариант реализации описанной в [1] концепции на примере задачи подбора фильмов. Эта рекомендательная система позволяет адаптироваться к особенностям субъекта и предлагать ту информацию, в которой он нуждается

на текущий момент. Учет индивидуального предназначения и текущего состояния человека здесь выполнен по дате рождения и предпочтениям цветов в цветовой палитре. Основной идеей подхода здесь является создание «общающегося» с пользователем ресурса, который будет активно обновлять информацию не только, опираясь на его действия, но и на данные, которые он будет предоставлять сам, например, проходя тестирование, либо обновляя свою личную информацию и т. д.

Описанная в [1] концепция рекомендательной системы позволяет создавать разнообразные программные комплексы для поддержки принятия решений человеком с учетом его индивидуальной миссии. В целом этот принцип индивидуального подхода ориентирован на создание интеллектуальных сред человеко-машинного типа, в которых, в отличие от интенсивно распространяющихся сейчас систем искусственного интеллекта, решающее слово в принятии решения будет отведено человеку. При этом можно будет с помощью прямых и косвенных данных принимать в расчет не только чисто индивидуальные предназначения людей, но и их вклады в миссии всех социальных организаций (фирм, населенных пунктов, наций). Особая роль в этой ситуации будет отведена выработке механизмов согласования интересов всех участников оптимизируемого системного образования.

Список использованных источников

1 Осипенко, Н. Б. Концепция рекомендательной системы «Подбор решений, отвечающих предназначению человека» / Н. Б. Осипенко, А. Н. Осипенко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 6 (117). – С. 108–112.

2 Осипенко, А. Н. Web-приложение для выбора сферы деятельности / А. Н. Осипенко, Н. Б. Осипенко, Ю. А. Слепенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – №3 (36). – С. 87–94.

3 Осипенко, Н. Б. Метод синтеза результатов психологических тестирований в задаче принятия стратегических решений на примере профориентации / Н. Б. Осипенко, А. Н. Осипенко, Ю. А. Слепенко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 3 (108). – С. 112–116.

4 Осипенко, Н. Б. Методологические аспекты автоматизации поддержки принятия стратегических решений / Н. Б. Осипенко, А. Н. Осипенко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2016. – № 6 (99). – С. 59–64.

5 Мироненко, В. М. Автоматизация экспертного оценивания задачи адресного подбора информационных ресурсов / В. М. Мироненко // Творчество молодых 2020: сборник научных работ студентов, магистрантов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель, 2020 г.: в 3 ч. / М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т ГГУ им. Ф. Скорины ; главн. ред. Р. В. Бородич [и др.]. – Гомель, 2020. – Ч. 1. – С. 205–208.

В. А. Прохоренко

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ НЕЙРОКОНТРОЛЛЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В настоящее время развитие программно-аппаратных средств сделало возможным применение сложных коннективистских моделей искусственного интеллекта при решении и автоматизации многих важных практических задач, в некоторых из которых уже достигнут уровень человека. К перспективной области приложения нейронных сетей можно отнести задачи управления и принятия решений. Особенно актуальным в современном мире является вопрос автоматизации управления технологическими системами и процессами.

Практическое применение нейронных сетей может быть сопряжено с трудностями выбора адекватных решаемой задачи модели, ее параметров и параметров обучающего алгоритма. В данной работе описывается подход к автоматической генерации нейроконтроллера для реализации управления при решении задачи поиска оптимальной траектории на фазовой плоскости состояний технологической системы.

При рассмотрении приложения нейросетевых практик в области задач управления представляет интерес обучение с подкреплением, в частности, Q-обучение. В рамках данного подхода требованием к качественному контроллеру является осуществление в пространстве доступных действий такой политики выбора действий π , которая бы максимизировала оценку качества управления Q . Нейроконтроллер в таком случае выступает в качестве аппроксиматора функции Q , оценивающей будущую полезность выбора того или иного управляющего воздействия, применяемого к управляемому объекту. Задачей обучения нейроконтроллера, соответственно, является поиск в пространстве настраиваемых параметров для получения аппроксимации функции Q приближенной к оптимальной. Обученный с подкреплением нейроконтроллер может успешно применяться для решения рассматриваемой задачи [1].

Традиционно нейронные сети обучаются с применением градиентных методов поиска настраиваемых параметров. Использование эволюционных подходов к решению сложных задач поиска в пространстве структур, гиперпараметров, настраиваемых параметров модели (нейронной сети) было предложено в ряде работ [2] и показало применимость и эффективность в некоторых задачах [3, 4]. Эволюционные алгоритмы оперируют популяцией генотипов, кодирующих структуру и набор параметров нейронной сети. В процессе функционирования алгоритм производит изменения генотипов (мутацию) и последующий отбор наиболее приспособленных. Критерием приспособленности может выступать, в частности, функция ошибки (потерь) для конкретной задачи. К негативным сторонам эволюционных подходов является обычно большая вычислительная сложность и случайная природа поиска.

В условиях практической сложности выбора адекватной структуры сети для конкретных приложений представляет интерес рассмотрение возможности построения общего подхода на основе комбинации традиционных градиентных методов поиска параметров с эволюционными в контексте решения рассматриваемой задачи управления.

В данной работе используется комбинированный подход к поиску оптимальной структуры нейронной сети и ее настраиваемых параметров для решения задачи поиска оптимальной траектории на фазовой плоскости. Алгоритм использует элементы NEAT [3] для подбора топологии нейронной сети, комбинируя его с обучением с подкреплением для каждого поколения популяции. В качестве доступных мутаций используются те, которые приводят к изменению структуры нейронной сети.

На начальном этапе алгоритм инициализирует популяцию генотипов нейроконтроллеров из некоторой начальной топологии в соответствии с заданными параметрами. Затем производит применение случайных мутаций к членам популяции и осуществляет их Q-обучение на небольшом числе эпизодов решения задачи для различных примеров фазовых плоскостей, после чего осуществляется их валидация и сортировка по ее результатам. Наиболее приспособленные генотипы используются для генерации популяции следующей итерации алгоритма.

Для оценки качества управления при обучении с подкреплением и определения степени приспособленности нейроконтроллера используется функция, оценивающая динамику изменения состояний системы и приближения системы к некоторому заданному целевому состоянию в результате стратегии управления, избранной нейроконтроллером: функция штрафует нейроконтроллер за удаление системы от целевого состояния и переход системы в нежелательные состояния и вознаграждает за быстрое достижение целевого состояния.

Пример последовательного изменения структуры лучшего нейроконтроллера в популяции в рамках описанного подхода показан на рисунке 1. В данном примере популяция нейроконтроллеров обучается и оценивается для поиска траектории до целевого состояния на двумерной фазовой плоскости, содержащей нежелательные состояния, приводящие к отказам системы.

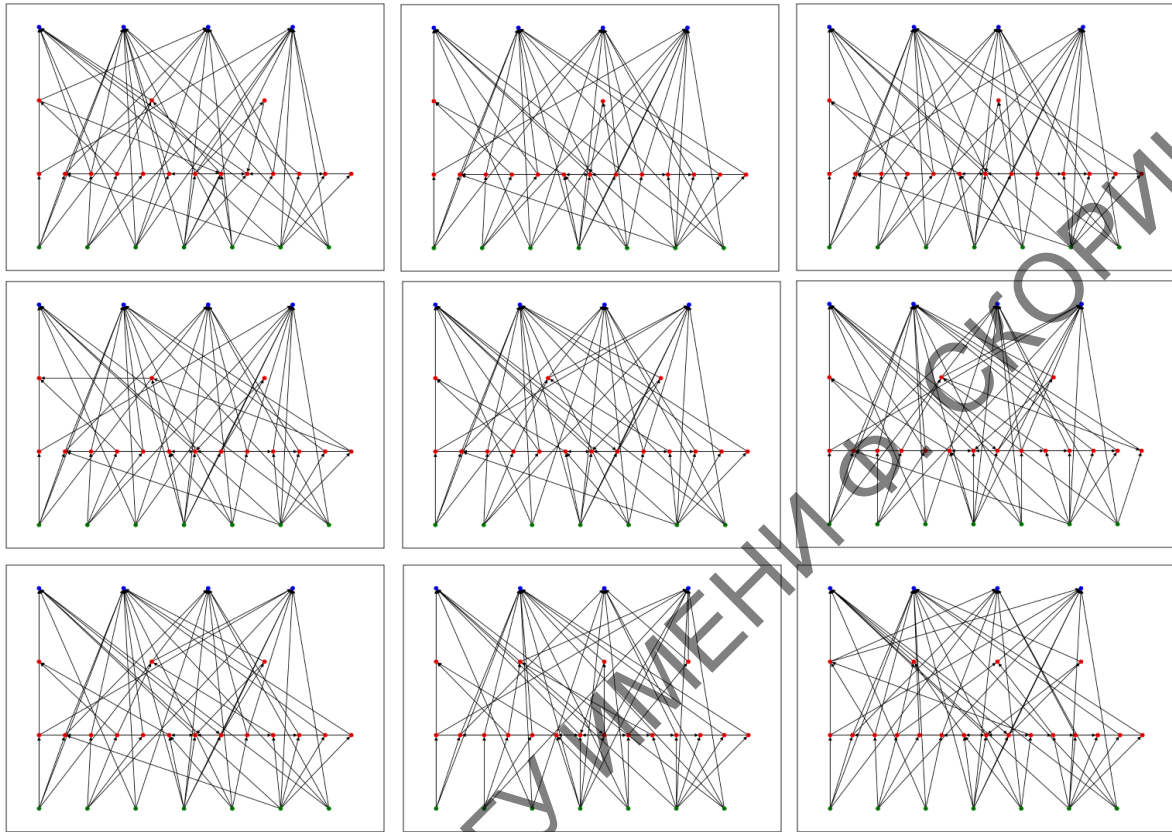


Рисунок 1 – Структура лучшего нейроконтроллера в популяции через каждые 10 итераций

На рисунке 2 показаны результаты оценки лучшего члена популяции на протяжении 75 поколений. Первый график – оценка качества управления, второй – число завершений эпизодов управления достижением целевого состояния, третий – число отказов.

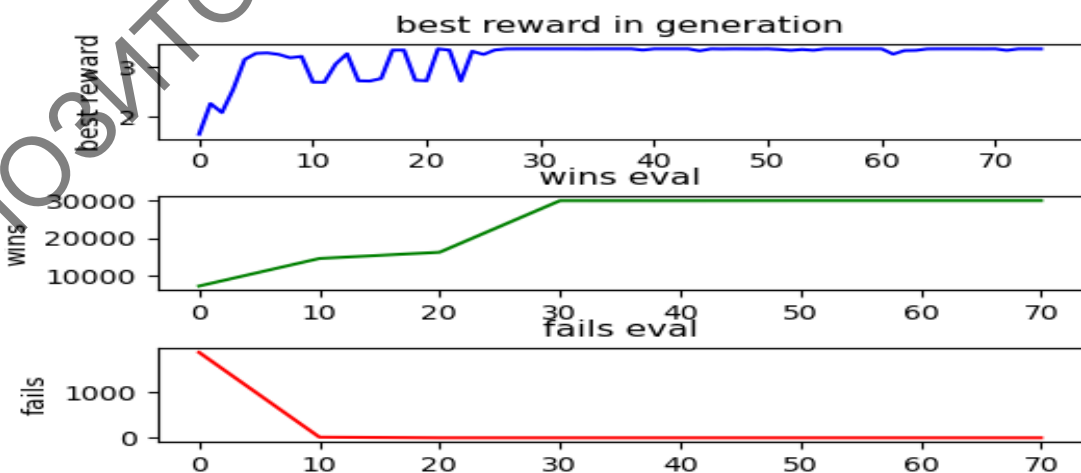


Рисунок 2 – Оценка лучшего члена популяции на протяжении 75 поколений

Предложенный подход к построению нейроконтроллера для управления технологической системой позволяет частично автоматизировать сложную процедуру поиска модели и ее параметров при решении задачи поиска оптимальной траектории на фазовой плоскости состояний технологической системы.

Список использованных источников

1 Смородин, В. С. Метод построения модели нейрорегулятора при оптимизации структуры управления технологическим циклом / В. С. Смородин, В. А. Прохоренко // Доклады БГУИР. – 2019. – №7–8. – С. 125–132.

2 Stanley, K. Designing neural networks through neuroevolution / K. Stanley, J. Clune, J. Lehman, R. Miikkulainen // Nature Machine Intelligence. – 2019. – Vol. 1, №1. – P. 24–35.

3 Stanley, K. Evolving neural networks through augmenting topologies / K. Stanley, R. Miikkulainen // Evol. Comput. – 2002. – № 10. – P. 99–127.

4 Miikkulainen, R. Evolving Deep Neural Networks / R. Miikkulainen, J. Liang, E. Meyerson, A. Rawal, D. Fink, O. Francon, B. Raju, H. Shahrzad, A. Navruzyan, N. Duffy, B. Hodjat // Artificial Intelligence in the Age of Neural Networks and Brain Computing. – 2018. – № 15. – P. 293–312.

В. А. Рубин, С. П. Жогаль

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

НЕЙРОННОЕ СТРУКТУРИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ В TFX

Tensor Flow Extended (далее по тексту TFX) – это бесплатная платформа с открытым исходным кодом, предназначенная для создания готовых к работе комплексных конвейеров машинного обучения. Внутри TFX ядра предлагается огромное количество механизмов для предварительной обработки данных.

Neural Structured Learning (NSL) – это фреймворк в TensorFlow, который можно использовать для обучения нейронных сетей со структурированными сигналами. Он обрабатывает структурированный ввод двумя способами: как явный граф или как неявный граф, в котором соседи динамически генерируются во время обучения модели. NSL с явным графом обычно используется для обучения нейронным графам, тогда как NSL с неявным графом обычно используется для состязательного обучения. Оба эти метода реализованы как форма регуляризации в структуре NSL. В результате они влияют только на рабочий процесс обучения, и поэтому рабочий процесс обслуживания модели остается неизменным.

Далее будет рассмотрено, как можно реализовать регуляризацию графов с использованием инфраструктуры NSL в TFX.

Рабочий процесс высокого уровня для построения модели с регуляризацией графа с использованием NSL включает в себя следующие шаги:

1. Построить граф, если он еще не доступен.
2. Использовать граф и особенности входного примера для увеличения обучающих данных.
3. Использовать расширенные данные обучения, чтобы применить регуляризацию графа к данной модели.

Эти шаги не сразу отображаются на существующие компоненты конвейера TFX. Однако TFX поддерживает настраиваемые компоненты, которые позволяют пользователям реализовывать настраиваемую обработку в своих конвейерах TFX.

Итак, чтобы создать в TFX регуляризованную модель графа, включающую описанные выше шаги, можно использовать дополнительные настраиваемые компоненты TFX.

Чтобы проиллюстрировать пример конвейера TFX с NSL, можно рассмотреть задачу классификации тональности текста.

Для построения в TFX регуляризованной модели NSL для этой задачи, необходимо определить три пользовательских компонента. Для краткости были опущены компоненты, которые обычно идут после компонента Trainer, такие как Evaluator, Pusher и т. д.

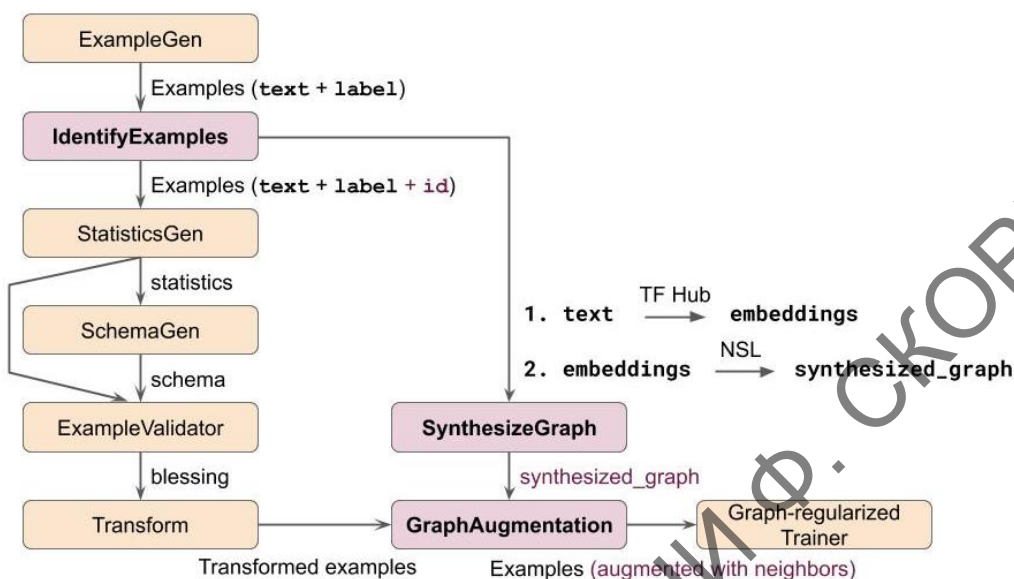


Рисунок 1 – Пример конвейера TFX для классификации текста с использованием регуляризации графа

На этом рисунке только пользовательские компоненты (выделены розовым цветом) и компонент тренера с регуляризацией графиков имеют логику, связанную с NSL. Стоит отметить, что показанные здесь пользовательские компоненты являются только иллюстративными, и можно построить функционально эквивалентный конвейер другими способами.

Как упоминалось в самом начале, еще одним аспектом нейронного структурированного обучения является состязательное обучение, когда вместо использования явных соседей из графа для регуляризации неявные соседи создаются динамически и враждебно, чтобы запутать модель.

В итоге можно заключить, что регуляризация с использованием состязательных примеров – это эффективный способ повысить надежность модели. Состязательное обучение с использованием NSL можно легко интегрировать в конвейер TFX. Для этого не требуются какие-либо пользовательские компоненты, и необходимо обновить только обучающий компонент.

О. С. Рудько, С. И. Жогаль

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ПОСТРОЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ИНТЕГРАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

С развитием глобальной сети Интернет появилось множество быстрорастущих и полезных систем с различной функциональностью и своим набором протоколов, программных интерфейсов и других средств коммуникации с пользователем, но без достаточного взаимодействия с другими системами. По причине отсутствия правильной связи и необходимых программно-аппаратных средств, пользователи данных систем вынуж-

дены выполнять долгую рутинную работу сначала в одной системе, затем, после получения результата, вносить их в другую систему. Таким образом происходит обмен данными сторонних систем с помощью вложенных усилий человека, что приводит к большому количеству ошибок и слабой оценке времени выполнения. Построение технологического комплекса интеграционного взаимодействия распределенных систем позволяет убрать из системы человеческий фактор, таким образом уменьшить количество ошибок, приблизить время выполнения поставленных задач к константе, другими словами, автоматизировать процесс взаимодействия систем.

Отличие разрабатываемого программно-технологического комплекса от других подобных систем в том, что система ориентируется на простое и интуитивно-понятное взаимодействие с пользователем, серьезным подходом к безопасности хранения личных данных пользователей, масштабируемостью, отказоустойчивостью, открытостью описания интерфейсов работы с ней и служб.

Особенностью разрабатываемого программно-технологического комплекса является то, что участниками данной распределенной системы может быть любой сервис глобальной сети, вне зависимости от его способности интегрироваться с другими сервисами, для дальнейшей автоматизации рутинных работ, развития связей и бизнеса.

Данный программно-технологический комплекс имеет большой круг применения – системы ведения отчетности, бухгалтерские системы, образовательные системы, различные торговые площадки, административные сервисы, различные контакт-центры, системы ритейлерских услуг, почтовые сервисы и другие системы с большим оборотом данных.

Преимущество данной системы в том, что она производит полную журнализацию действий пользователя, устойчива к сетевым ошибкам, масштабируема, прозрачна, имеет интуитивно-понятный интерфейс, оповещение пользователей о успешном выполнении действия.

Е. А. Ружицкая

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ОПТИМАЛЬНАЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СТАБИЛИЗАЦИЯ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Рассматривается задача стабилизации около верхнего неустойчивого положения равновесия с помощью ограниченных обратных связей двух маятников, связанных упругой связью, при малых начальных отклонениях. Математическая модель такой системы с приложенным к оси подвеса управляющим моментом $u = (u_1, u_2) \in R^2$, при $t \geq 0$, имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} (x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2} u_1, \\ \ddot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin x_2 - \frac{k}{m} (x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2} u_2. \end{cases}$$

Здесь m – масса маятников, l – длина маятников, k – коэффициент упругости пружины, связывающей маятники, x_1, x_2 – углы отклонения первого и второго маятников от верхнего вертикального положения равновесия, \dot{x}_1, \dot{x}_2 – угловые ускорения маятников, $t \geq 0$ время.

Вводится понятие дискретной (с периодом квантования $h > 0$) стабилизирующей обратной связи, для построения которой используются методы оптимального управления. Для построения стабилизирующей обратной связи используется вспомогательная задача оптимального быстрогодействия [2]:

$$t^* \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m}(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2} u_1, \\ \ddot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin x_2 - \frac{k}{m}(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2} u_2, \end{cases}$$

$$x(0) = z, x(t^*) = 0, |u_1(t)| \leq L, |u_2(t)| \leq L, t \in T = [0, t^*].$$

Реализован алгоритм построения обратной связи [2].

Список использованных источников

1 Ружицкая, Е. А. Реализация оптимальной обратной связи для малых колебаний в одной нелинейной системе четвертого порядка / Е. А. Ружицкая // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 70–73.

2 Габасов, Р. Синтез оптимальных по быстродействию систем в классе ограниченных непрерывных управлений с ограниченными производными / Р. Габасов, Е. А. Ружицкая // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1998. – № 4. – С. 75–81.

В. М. Селькин, И. В. Близнец

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОДГРУППЫ ШМИДТА

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает группу; подгруппа A группы G называется *модулярной* в G [1], если выполняются следующие условия:

- (i) $\langle X, A \cap Z \rangle = \langle X, A \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$ и
- (ii) $\langle A, Y \cap Z \rangle = \langle A, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $A \leq Z$.

Подгруппа H группы G называется \mathcal{U} -*нормальной* [2] или *строго \mathcal{U} -субнормальной* [3] в G , если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является циклическим.

Напомним также, что G называется *группой Шмидта*, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна. С изучением и применениями групп Шмидта связано большое число публикаций (см., в частности, книги [4]–[7]) и, прежде всего, это мотивировано тем, что каждая нильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта.

В работе [8] В. Н. Семенчук доказал, что если каждая подгруппа Шмидта нильпотентной группы G субнормальна в G , то G метанильпотентна, т. е. $G/F(G)$ является нильпотентной группой. Это важное наблюдение было развито в различных направлениях. В частности, В. С. Монахов и В. Н. Княгина доказали [9], что в группах G с таким условием производная подгруппа G' нильпотентна. А в работе В. А. Ведерникова [10] было получено полное описание групп с субнормальными подгруппами Шмидта. В работе [11] И. В. Близнец и В. М. Селькин установили, что если каждая подгруппа Шмидта нильпотентной группы G модулярна в G' , производная подгруппа G' нильпотентна.

В последние годы исследования многих авторов (см., например, [12]–[23]) были связаны с изучением и применениями так называемых σ -субнормальных подгрупп [12]. Напомним, что подгруппа A в G называется σ -субнормальной в G [12], если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной, т. е. $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ_i -группой для некоторого i , для всех $i = 1, \dots, n$.

Отмеченные выше результаты работ [8], [9], [11] получили дальнейшее развитие также в теории σ -субнормальных подгрупп. В частности, доказано, что если каждая подгруппа Шмидта группы G σ -субнормальна, то G' является σ -нильпотентной группой, т. е. является прямым произведением σ -примарных групп [14]. Более того, в каждой группе G' , удовлетворяющей этому условию, имеется нормальная σ -нильпотентная подгруппа N с циклической фактор-группой G/N [21]. В работе [15] было доказано, что G' является σ -нильпотентной группой и в случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы G является либо σ -субнормальной, либо модулярной в G .

В данной работе докажем следующий результат в этом направлении.

Теорема 0.1 *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо \mathfrak{U} -нормальна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 0.2 [8, теорема 2]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то $G/F(G)$ нильпотентна.*

Следствие 0.3 (см. теорему в [9]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 0.4 (см. теорему в [11]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Список использованных источников

1 Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1994 – 590 p.

2 Hu, B. Finite groups with only \mathfrak{F} -normal and \mathfrak{F} -abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

3 Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – № 550. – P. 69–85.

4 Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag. – 1967 – 793 p.

5 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 271 p.

6 Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 255 p.

7 Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Springer, Dordrecht, 2006. – Vol. 584. – 385 p.

8 Семенчук, В. Н. Конечные группы с системами минимальных не \mathfrak{F} -подгрупп / В. Н. Семенчук, в книге: Подгрупповое строение конечных групп. – Минск : Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.

9 Монахов, В. С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В. С. Монахов, В. Н. Княгина // Сибирск. матем. ж. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

10 Ведерников, В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В. А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.

11 Близнац, И. В. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И. В. Близнац, В. М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.

12 Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -per-mutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

13 Beidleman, J. C. On τ_σ -quasinormal subgroups of finite groups / J. C. Beidleman A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

14 Al-Sharo, K. A. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / K. A. Al-Sharo, A. N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.

- 15 Hu, B. On finite groups with generalized σ -subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // *Comm. Algebra.* – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.
- 16 Skiba, A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A. N. Skiba // *J. Algebra.* – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.
- 17 Skiba, A. N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A. N. Skiba // *J. Belarusian State Univ. Math. Informatics.* – 2019. – № 3. – P. 35–47.
- 18 Guo, W. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal / W. Guo, A. N. Skiba // *Sci. China Math.* – 2019. – № 62. – P. 1355–1372.
- 19 On σ -subnormality criteria in finite σ -soluble groups / A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, M. C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // *RACSAM.* – 2020. – Vol. 114, № 94. – <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4>.
- 20 On σ -subnormal subgroups of factorised finite groups / A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, M. C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // *J. Algebra.* – 2020. – № 559. – P. 195–202.
- 21 Yi, X. Finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S. F. Kamornikov // *J. Algebra.* – 2020. – № 560. – P. 181–191.
- 22 Kamornikov, S. F. On σ -subnormal subgroups of finite groups / S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyaynov // *Siberian Math. J.* – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.
- 23 Kamornikov, S. F. On σ -subnormal subgroups of finite 3'-groups / S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyaynov // *Ukrainian Math. J.* – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.

V. M. Selkin¹, A. A. Pobilovsky², S. I. Zincuk²

¹ *Gomel, F. Skorina Gomel State University*

² *Department of Mathematics and Technologies of Programming*

ON THE π -DECOMPOSABLE NORM OF A FINITE GROUP

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, \mathbb{P} is the set of all primes, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

The group G is said to be: π -decomposable (respectively p -decomposable) if $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$ (respectively $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$); meta- π -decomposable if G is an extension of a π -decomposable group by a π -decomposable group. We use \mathfrak{N}_π to denote the class of all π -decomposable groups; $\mathfrak{N}_{\{p\}}$ is the class of all p -decomposable groups.

Various classes of π -decomposable and meta- π -decomposable groups have been studied in many papers and, in particular, in the recent papers [2]–[6]. In this paper, we consider some new properties and applications of such groups.

If $1 \in \mathfrak{F}$ is the class of groups, then $G^\mathfrak{F}$ is the \mathfrak{F} -residual of G , that is, the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{F}$. In particular, $G^{\mathfrak{N}_1}$ is the nilpotent residual of G ; $G^{\mathfrak{N}_\pi}$ is the π -decomposable residual of G .

Recall that the norm $N(G)$ of G is the intersection of the normalizers of all subgroups of G . This concept was introduced by R. Baer [7] (see also [8]) and the norm and the generalized norm of a group has been studied by many authors. In particular, in the recent paper [9] the following analogues of the subgroup $N(G)$ were introduced: (i) $S(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_1})$; (ii) let $1 = S_0(G) \leq S_1(G) \leq \dots \leq S_n(G) \leq \dots$, where $S_{i+1}(G) / S_i(G) = S(G / S_i(G))$ for all $i = 0, 1, 2, \dots$. Then $S_\infty(G) = S_n(G)$, where let n is the smallest n such that $S_n(G) = S_{n+1}(G)$.

The basic properties and some applications of the subgroups $S(G)$ and $S_\infty(G)$ were considered in [9]. In this paper we consider the following generalizations of the subgroups $S(G)$ and $S_\infty(G)$.

Definition 1.1. Let $N_{\pi(G)}$ be the intersection of the normalizers of the π -decomposable residuals of all subgroups of G , that is, $N_{\pi}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\sigma_{\pi}})$. We say that $N_{\pi}(G)$ is the π -decomposable norm of G . If $\pi = \{p\}$, we write $N_p(G)$ instead of $N_{\{p\}}(G)$ and say that $N_p(G)$ is the p -decomposable norm of G .

Definition 1.2. Let

$$1 = N_{\pi}^0(G) \leq N_{\pi}^1(G) \leq N_{\pi}^2(G) \leq \dots \leq N_{\pi}^n(G) \leq \dots,$$

where

$$N_{\pi}^{i+1}(G) / N_{\pi}^i(G) = N_{\pi}(G / N_{\pi}^i(G))$$

for all $i=0,1,2,\dots$. And let n be the smallest n such that $N_{\pi}^n = N_{\pi}^{n+1}$. Then we write $N_{\pi}^{\infty}(G) = N_{\pi}^n(G)$ and say that $N_{\pi}^{\infty}(G)$ is the π -decomposable hypernorm of G .

Obviously, $N_{\pi}(G)$ and $N_{\pi}^{\infty}(G)$ are characteristic subgroups of G .

Consider the following example.

Example 1.3. (i) Let $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, where $Q \rtimes R$ is a non-abelian group of order 6 and P is a simple $F_5(Q \rtimes R)$ -module which is faithful for $Q \rtimes R$. Let $\sigma = \{\{2,5\}, \{2,5\}'\}$. Then G every proper non- π -decomposable subgroup H of G is either of the form $V \rtimes Q^x$, where $V \leq P$, or of the form $(Q \rtimes R)^y$ for some $x, y \in G$. In the former case we have $H^{\sigma_{\pi}} = V$ and $N_G(V) = PQ^x = PQ$. In the second case we have $((Q \rtimes R)^y)^{\sigma_{\pi}} = Q^y$ and $N_G(Q^y) = (Q \rtimes R)^y$. Moreover,

$$\bigcap_{y \in G} (Q \rtimes R)^y = (Q \rtimes R)_G \leq C_G(P) = P$$

and so $N_{\pi}(G) = 1 = N_{\pi}^{\infty}(G)$.

(ii) Let G and σ are the same as in (i). Let $A = G \times C_2$. Let $B = (Q \rtimes R)C_2$, where C_2 is a group of order 2. Then $B^{\sigma_{\pi}} = Q$, $C_2 \leq N_{\pi}(A)$ and $N_A(Q) = B < A$. Hence $1 < N_{\pi}(A) = C_2 = N_{\pi}^{\infty}(G) < G$.

Our main goal here is to prove the following results.

Theorem 1.4. For any group G , the subgroup $N_{\pi}^{\infty}(G)$ is σ -separable.

Theorem 1.5. The group G is meta- π -decomposable if and only if $G / N_{\pi}(G)$ is meta- π -decomposable.

Theorem 1.6. Suppose that G is p -soluble and all elements of G of order p are in $N_p(G)$. If $p > 2$, then $l_p(G) \leq 1$.

References

- 1 Guo, W. On σ -supersoluble groups and one generalization of CLT -groups / W. Guo, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – № 1. – P. 92–108.
- 2 Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436 – P. 1–16.
- 3 Skiba, A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – № 1 – P. 114–129.
- 4 Chi, Z. On Σ_t^{σ} -closed classes of finite groups / Z. Chi, A. N. Skiba // Ukrainian Math. J., 2018, in Press.

5 Chi, Z. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Commun. Algebra, in Press.

6 Chi, Z. A generalization of the Kramer's theory / Z. Chi, A. N. Skiba // Acta Math. Hungarica, in Press.

7 Baer, R. Der Kern, eine charakteristische Untergruppe / R. Baer // Compos. Math. – 1935. – Vol. 1. – P. 254–283.

8 Baer, R. Norm and hypernorm / R. Baer // Publ. Math. Debrecen. – 1956. – Vol 4 – P. 347–350.

9 Shen, Z. On the norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite group / Z. Shen, W. Shi, G. Qian // J. Algebra. – 2012. – Vol. 352 – P. 290–298.

A. N. Skiba

Gomel, F. Skorina Gomel State University

FINITE GROUPS WITH ABNORMAL SCHMIDT SUBGROUPS

All groups are finite and G always denotes a finite group.

A subgroup H of G is said to be (1) *abnormal* in G if $x \in \langle H, H^x \rangle$ for all $x \in G$.

We say that G is an *SA-group* if G is a non-nilpotent group in which every Schmidt subgroup is abnormal.

Recall that G is said to be an *SC-group* if G is soluble and the set of all Carter subgroups of G coincides with the set of all systems normalizers of G .

We proved the following two results.

Theorem 1. *G is a soluble SA-group if and only if $G = D \rtimes M$, where $D = G^{\mathfrak{N}}$ is the nilpotent residual of G , and the following conditions hold:*

(i) *D is nilpotent, $M = \langle x \rangle$ is a cyclic Sylow q -subgroup of G for some prime q dividing $|G|$, and $F(G) = D\langle x^q \rangle$.*

(ii) *For every prime p dividing $|D|$ and for the Sylow p -subgroup D_p of D we have*

(a) *$Q \leq N_G(D_p)$ and $[Q, D_p] \neq 1$.*

(b) *$D_p = (D_p Q)^{\mathfrak{N}}$.*

(c) *G has normal subgroups $Z = \Phi_t < \Phi_{t-1} < \dots < \Phi_2 < \Phi_1 < \Phi_0 = D_p$ ($t = t(p)$), where $\Phi_i = \Phi(\Phi_{i-1})$ for all $i = 1, \dots, t$, such that $[Q, Z] = 1$ and $[Q, \Phi_i] \neq 1$ for all $i < t$.*

(d) *For every i , the factor Φ_i/Φ_{i+1} , regarded as a G -module, is completely reducible.*

(e) *All chief factors H/K of G between Z and P are G -isomorphic with $C_G(H/K) = F(G)$ and $|H/K| = p^n$, where n is the smallest integer such that q divides $p^n - 1$.*

(f) *G is an SC-group and ZQ is a Carter subgroup of G and $Z = N_G(Q) \cap D \leq Z_{\infty}(G)$. Moreover, if $Z \neq 1$, then $D = D_p$ is a Sylow subgroup of G .*

Furthermore, Conditions (b), (c), (d) and (e) hold for every p -subgroup P of G such that $Q \leq N_G(P)$ and $[Q, P] \neq 1$.

(iii) *A subgroup C of G is a Carter subgroup if and only if C is a maximal abnormal subgroup of some Schmidt subgroup of G . Moreover, if H is a Schmidt subgroup of G , then a maximal abnormal subgroup of H is a Carter subgroup of G .*

Theorem 2. *Assume that G is a non-soluble SA-group. Then the following hold.*

(a) *G is quasi-simple and $|Z(G)| \in \{2, 4, 3, 9\}$.*

(b) *Every local subgroup $N_G(P)$ of G , where $|P| \notin \{2, 4, 3\}$, is soluble.*

Example. (1) Let E be an extraspecial group of order 3^7 and exponent 3. Then $\text{Aut}(E)$ contains an element α of order 7 which operates irreducibly on E/Z_E and centralizes $Z(E)$ by Lemma 20.13 in [1, Ch. A]. Let E_1 and E_2 be two copies of the group E and let $P = E_1 \vee E_2 := (E_1 \times E_2)/D$, where $D = \{(a, a^{-1}) \mid a \in Z(E)\}$ be the direct product of the groups E_1 and E_2 with joint center (see [2, p. 49]). Then α induces an automorphism of order 7 on P and for the group $G_1 = P \rtimes \langle \alpha \rangle$ all Conditions (i), (ii), (iii) and (iv) are fulfilled with $t = 1$.

(2) Let P be a cyclic group of order 29^3 . Then $\text{Aut}(E)$ contains an element α of order 7. Then Conditions (i), (ii), (iii) and (iv) are fulfilled for the group $G_2 = P \rtimes \langle \alpha \rangle$ with $t = 3$ and $Z = 1$.

(3) Let $\varphi_i: G_i \rightarrow \langle \alpha \rangle$ be an epimorphism of G_i onto $\langle \alpha \rangle$ and let $G = G_1 \wedge G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_i \in G_i, \varphi_1(g_1) = \varphi_2(g_2)\}$ be the direct product of the groups G_1 and G_2 with joint factorgroup $\langle \alpha \rangle$ (see [2, p. 50]). Then Conditions (i), (ii), (iii) and (iv) are fulfilled for G by Parts (1) and (2).

References

1 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter, Berlin–New York. – 1992. – 891 p.

2 Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag. – 1967 – 793 p.

А. Н. Скиба

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО СЛАБО СУБНОРМАЛЬНЫМИ И ЧАСТИЧНО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Все рассматриваемые в нашем сообщении группы конечны, и G всегда обозначает группу; G называется *группой Шмидта*, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа из G нильпотентна. Подгруппа H из G называется: *полуперестановочной* в G [1], если H имеет такое добавление B в G , что H перестановочна с каждой подгруппой L из B , т. е. $HL = LH$; \mathcal{U} -*нормальной* в G [2], если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является циклическим. Символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает \mathfrak{F} -*корадикал* группы G [3], т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G со свойством $G/N \in \mathfrak{F}$. Мы используем $G^{\mathfrak{N}}$ и $G^{\mathfrak{U}}$ для обозначения нильпотентного и сверхразрешимого корадикалов группы G , соответственно.

Подгруппа A группы G называется *субнормальной* в G , если $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, где $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ всех $i = 1, \dots, n$. Субнормальные и обобщенно субнормальные подгруппы нашли широкие приложения при изучении групп G с различными ограничениями на характер вложения в G выделенных систем подгрупп. В данной работе мы рассмотрим следующие два обобщения субнормальности.

Определение. Мы говорим, что подгруппа H группы G является: (i) *слабо субнормальной* в G , если $H = \langle A, B \rangle$ для **некоторой субнормальной** подгруппы A и полуперестановочной подгруппы B из G ; (ii) *частично субнормальной* в G , если $H = \langle A, B \rangle$ для **некоторой субнормальной** подгруппы A и \mathcal{U} -нормальной подгруппы B из G .

Ясно, что все субнормальные и все перестановочные подгруппы слабо субнормальны; все субнормальные подгруппы и все \mathcal{U} -нормальные подгруппы **частично субнормальны** в G . Теперь рассмотрим следующий

Пример. Пусть $7 < p < q < r < t$ – простые числа, где r делит $t - 1$. Пусть P – простой точный $F_p C_q$ -модуль и A – **подгруппа** порядка p из P . Тогда $A < P$ так как $q > p$.

(i) Пусть $G = (P \rtimes C_q) \times A_5$, где A_5 – знакопеременная группа степени 5. Пусть $H = AB$, где B – группа порядка 12 в A_5 . Тогда A субнормальна и B полуперестановочна в G , и поэтому H является слабо субнормальной в G . Поскольку $B = H \cap A_5$ не является субнормальной в A_5 , H не является субнормальной в G по [4, глава А, лемма 14.1 (b)]. Понятно, что $H_G = 1$, поэтому каждая неединичная подгруппа из H не является \mathcal{U} -нормальной в G . Следовательно, H не является частично субнормальной в G .

(ii) Пусть теперь $G = (C_7 \rtimes (C_2 \times C_3)) \times (P \rtimes C_q)$, где $C_2 \times C_3 = \text{Aut}(C_7)$. И пусть $H = AB$, где $B = C_2$. Тогда $H_G = 1$ и B является \mathcal{U} -нормальной в G , поскольку $B^G = C_7 \rtimes C_2$. Следовательно, H является частично субнормальной в G . Предположим, что H слабо субнормальна в G , т. е. $H = LT$ для **некоторой субнормальной** подгруппы L и **некоторой полуперестановочной** подгруппы T из G . Пусть V – такая подгруппа в G , что

$G = TV$ и T перестановочна со всеми подгруппами из V . Сначала предположим, что $T = H = AB$. Но тогда для каждого $x \in G$ имеет место $TC_3^x = C_3^x T$ (см. ниже лемму 2.2), и поэтому $BC_3^x = C_3^x B = C_3^x \times B$ поскольку любые две холловские $\{2, 3\}$ -подгруппы G сопряжены. Следовательно, $(C_3)^G = C_7 \rtimes C_3 \leq C_G(C_2)$. Но тогда $[C_7, C_2] = 1$, противоречие. Следовательно, $T < H$. Понятно, что H не является субнормальной в G , поэтому A является наибольшей субнормальной подгруппой группы G , содержащейся в H . Следовательно, $L = A$ и $T = B$. Теперь, применяя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что $[C_7, C_2] = 1$. Это противоречие показывает, что H не является слабо субнормальной в G .

Бэр доказал [5] (см. также [6, глава 1, теорема 1.13]), что если $G = AB$, где A и B – нормальные сверхразрешимые подгруппы в G , и производная подгруппа G' нильпотентна, то G также сверхразрешима. Этот результат был обобщен многими авторами (см., например, недавние статьи [7]–[11]). В данной работе мы докажем следующий факт в этом направлении исследований.

Теорема 1. G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G и любая подгруппа Шмидта группы G частично субнормальна в G .

Фактически, теорема 1 является следствием наших следующих двух результатов, которые, возможно, независимо интересны, поскольку они обобщают некоторые уже известные результаты.

Первая теорема обобщает вышеупомянутый результат Бэра.

Теорема 2. Предположим, что $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G . Тогда G разрешима. Более того, если производная подгруппа G' нильпотентна, тогда G сверхразрешима.

Следствие 1. (см. теорему 3.8 в [12]). Предположим, что $G = AB$, где A и B – такие сверхразрешимые подгруппы в G , что A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A . Если производная подгруппа G' нильпотентна, тогда G сверхразрешима.

Следствие 2. Если $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G , то $(G')^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.

Доказательство. Пусть $D = (G')^{\mathfrak{N}}$. Тогда гипотеза справедлива для G/D по лемме 2.1(1) ниже, поэтому G/D сверхразрешима по теореме 2. Следовательно, $G^{\mathfrak{U}} \leq D$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $D = G^{\mathfrak{U}}$. Следствие доказано.

Из следствия 4 получаем

Следствие 3. (см. теорему 2.1 в [10]). Если $G = AB$, где A и B – такие сверхразрешимые подгруппы в G , что A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A , то $(G')^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.

Следствие 4. (см. теорему 2 в [9]). Если $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые субнормальные подгруппы в G , то $(G')^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.

Теорема 3. Если каждая подгруппа Шмидта в G частично субнормальна в G , то производная подгруппа G нильпотентна.

Следствие 5. (см. теорему 2 в [13]). Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то $G/F(G)$ нильпотентна.

Следствие 6. (см. теорему в [8]). Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то $G/F(G)$ абелева.

Подгруппа M группы G называется модулярной в G , если M является модулярным элементом (в том смысле Куроша [14, стр. 43]) решетки всех подгрупп группы G , т. е. (i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$, таких, что $X \leq Z$ и (ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$, таких, что $M \leq Z$. В силу теоремы 5.2.5 монографии [14] каждая модулярная подгруппа \mathfrak{U} -нормальна в G . Из этого факта и теоремы 7 мы получаем также следующее

Следствие 7. (см. теорему 1.1 в [15]). Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G , то $G/F(G)$ абелева.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
- 2 Hu, B. Finite groups with only \wedge -normal and F-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22. – № 5. – P. 915–926.
- 3 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
- 4 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter, Berlin–New York. – 1992. – 891 p.
- 5 Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – 115–187.
- 6 Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein [ed. al.]. – Passaic, New Jersey : Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.
- 7 Васильев, А. Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Известия Вузов. Математика. – 1997. – Vol. 11. – С. 10–14.
- 8 Monakhov, V. S. On finite groups with some subnormal Schmidt subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Knyagina // Siberian Math. Zh. – 2004. – Vol. 46. – P. 353–372.
- 9 Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Siberian Math. Zh. – 2017. – Vol. 58. – № 2. – P. 271–280.
- 10 Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of mutually permutable products, Problems of Physics, Mathematics and Technics / V. S. Monakhov. – 2018. – Vol. 34. – № 1. – P. 69–70.
- 11 Monakhov, V. S. Finite groups with two supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2019. Vol. 22. – № 2. – P. 297–312.
- 12 Asaad, M. On the supersolvability of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–226.
- 13 Семенчук, В. Н. Конечные группы с системами минимальных не F-подгрупп, в книге: Подгрупповое строение конечных групп / В. Н. Семенчук // Наука и Техника, Минск, 1981. – С. 138–149.
- 14 Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1994 – 590 p.
- 15 Близнац, И. В. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И. В. Близнац, В. М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4(41). – С. 36–38.

И. Л. Сохор

г. Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ $E_{\mathfrak{F}}$ -ГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1].

Группа G называется $E_{\mathfrak{F}}$ -группой, если G не принадлежит \mathfrak{F} и в G каждая нетривиальная подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна или \mathfrak{F} -абнормальна. Строение таких групп изучалось в работах многих авторов, см. литературу в [2].

В отличие от формационной субнормальности и формационной абнормальности, формационная субнормальность и абнормальность не являются альтернативными понятиями. Например, в симметрической группе степени 4 силовская 2-подгруппа одновременно формационно субнормальна и абнормальна.

В. С. Монахов [3] описал группы, все примарные подгруппы которых абнормальны или сверхразрешимо субнормальны, и показал, что класс таких групп значительно шире класса $E_{\mathcal{U}}$ -групп.

Развивая данную тематику, мы получили следующий результат.

Теорема. Пусть \mathcal{F} – насыщенная наследственная сверхрадикальная формация, содержащая все нильпотентные группы. В разрешимой группе G , не принадлежащей \mathcal{F} , каждая циклическая примарная подгруппа абнормальна или \mathcal{F} -субнормальна тогда и только тогда, когда G представима в виде полупрямого произведения коммутанта и циклической силовой подгруппы, являющейся подгруппой Картера, а каждая собственная подгруппа группы G , содержащая коммутант G' , принадлежит \mathcal{F} .

Напомним, формация \mathcal{F} называется сверхрадикальной, если она нормально наследственная и любая группа, представляемая в виде произведения двух \mathcal{F} -субнормальных \mathcal{F} -подгрупп, принадлежит \mathcal{F} .

Следствие. Пусть \mathcal{F} – насыщенная наследственная сверхрадикальная формация, содержащая все нильпотентные группы. В разрешимой группе G каждая циклическая примарная подгруппа \mathcal{F} -субнормальна или абнормальна тогда и только тогда, когда каждая неабнормальная в группе G подгруппа принадлежит \mathcal{F} и \mathcal{F} -субнормальна в G .

Список использованных источников

1 Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin Heidelberg-New York : Springer, 1967. – 793 p.

2 Skiba, A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A. N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

3 Монахов, В. С. Конечные группы с абнормальными и \mathcal{U} -субнормальными подгруппами / В. С. Монахов // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

Н. А. Старовойтова

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛЕКСИКИ У ИНОСТРАННЫХ СЛУШАТЕЛЕЙ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Конечной целью обучения математике иностранных слушателей подготовительного отделения является возможность успешно обучаться в вузе в одном потоке с русскоговорящими студентами независимо от выбранной специальности. Поэтому помимо закрепления школьных знаний и ликвидации имеющихся пробелов, очень важным аспектом учебной деятельности на довузовском этапе является формирование у иностранных слушателей математической лексики. Несмотря на то, что язык математики наиболее формализован по сравнению с другими науками (использует большое количество стандартных символов, знаков, формул, обозначений, речевых оборотов), слушатели испытывают большие трудности в восприятии математических текстов в виду малого словарного запаса, так как к изучению предмета приступают всего лишь через два-три месяца изучения русского языка. Опыт работы с иностранными слушателями на этапе довузовской подготовки позволяет выделить ряд основных аспектов работы по формированию у них математической лексики.

По каждой новой теме слушателям предоставляются опорные конспекты, адаптированные преподавателем. Занятие начинается с разъяснения новых слов, терминов, знание которых необходимо для понимания темы. Лексический минимум первоначально составляется преподавателем и выносится в виде словаря по теме, а затем дополняется слушателями в соответствии с их уровнем знания русского языка. Также параллельно с объяснением материала ведётся работа над синонимами терминов, часто употребляемых

как в пособиях, учебниках, так и устной речи. Обращается внимание на возможность использования нескольких терминов для обозначения одного и того же понятия. Например: одинаковые = равные; исходный = первоначальный; операция = действие; переменная = аргумент; уменьшить = вычесть = найти разность; увеличить = прибавить; утроенное = в три раза больше; составляют = равны (пример: 80 % от числа a составляют 16 % от 40). Немаловажно обращение внимания слушателей на многозначные слова, значения которых в математике отличаются от значений бытового языка. Такая работа помогает лучше понять все тонкости русского языка и подготовиться к восприятию не только стандартных выражений, но и неадаптированной речи, с которой слушателям придётся столкнуться в дальнейшем на лекциях.

Большое значение имеет форма подачи материала, обеспечивающая наилучшее его понимание и усвоение. Это схемы, структурирование текста, графические изображения с подписями, изложение информации в виде таблиц. С одной стороны, это облегчает восприятие и запоминание материала, а с другой стороны, способствует развитию мышления слушателей и расширению их языковых навыков. Ведь для ответа на вопрос преподавателя необходимо осмыслить символическую информацию, подобрать нужные слова и сформулировать ответ на вопрос.

Особое место в учебном процессе отводится математическим диктантам. Математический диктант является обязательным элементом занятия и абсолютно новой формой работы для самих слушателей, с которой они раньше не встречались. Данная форма проверки знаний позволяет активизировать домашнюю работу слушателей над терминами, способствует повышению качества запоминания изучаемого лексического материала, повышению математической культуры слушателей, обогащению их математического языка, более добросовестному отношению к учебному процессу. Математический диктант помогает тренировать оперативную память, умение воспринимать речь на слух, умение выражать письменно свои знания по предмету. В диктантах могут содержаться операционные задания, в которых нужно выполнять преобразования, получив информацию на слух, логические задания, в которых необходимо оценить истинность высказывания, для чего требуется умение слушать, слышать и анализировать данные, задания, предназначенные для усвоения математической терминологии. Поскольку группы довузовской подготовки немногочисленные, для проведения диктанта достаточно одного варианта, при этом исчезает лишняя слуховая нагрузка на слушателей.

Так как процесс обучения ограничен сжатыми временными рамками, нами активно используются авторские презентации, которые позволяют уменьшить трудности понимания русского языка, увеличить скорость подачи материала, улучшить понимание иностранными слушателями информации по предмету. Яркий визуальный ряд, использование различных видов шрифтов, выделение впервые встречающихся терминов, определение в математическом тексте смысловых единиц, понятий, ключевых слов обеспечивают с одной стороны ускорение осмысления математического материала, а с другой стороны, позволяют сформировать у слушателей умение видеть и выделять главное, снимают напряжение и страх перед информацией на русском языке.

Приведём некоторые примеры заданий для работы над терминами по теме «Действия над числами».

Задание 1. Закончите предложения.

- 1) Результат сложения – это
- 2) Результат вычитания – это
- 3) Результат умножения – это
- 4) Результат деления – это

Задание 2. Добавьте нужную информацию.

№	Действие	Пишем	Читаем	Компоненты	Результат
1.		$a + b = c$		a и b – это слагаемые	
2.			a минус b равно c		
3.	умножение				
4.					частное

Задание 3. Прочитайте, запишите действие и ответ:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) сложить числа 17 и 13; | 5) запишите сумму чисел 9 и 32; |
| 2) вычтеть из числа 28 число 19; | 6) запишите разность чисел 43 и 12; |
| 3) умножить 7 на 12; | 7) запишите произведение чисел 9 и 21; |
| 4) разделить число 124 на 6; | 8) запишите частное чисел 56 и 8. |

В заключении отметим, что грамотное сочетание различных методов обучения, форм организации занятий и контроля знаний позволяет активизировать учебную деятельность иностранных слушателей. А это, в конечном итоге, ведёт к лучшему овладению ими лексическим материалом как в устной форме, так и в письменном виде, что способствует более быстрому процессу адаптации и более успешному обучению их на первом курсе в вузе.

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Д. А. Волков

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА – ПАДЕ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Множество k -мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ – это сумма $|m| = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}_+$, мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и полагаем $n_j = n + |m| - m_j$ для $j = 1, 2, \dots, k$.

Рассмотрим систему целых функций

$$F_\gamma^j(z) = {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

где параметр $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$, $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1) \times \dots \times (\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю комплексных чисел (при $k=1$ считаем, что $\lambda_1 = 1$). Ряды вида (1) принято называть гипергеометрическими рядами, а их суммы – вырожденными гипергеометрическими функциями. Напомним (см. [1]), что функция Миттаг-Леффлера задаётся степенным рядом

$$E_{\rho, \beta}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\rho^{-1} + \beta)} \quad (\rho > 0, \beta \in \mathbb{C})$$

и является обобщением показательной функции. Принимая во внимание известное равенство $(\gamma)_p = \Gamma(p+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, где как и в предыдущей формуле $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, видим, что функции (1) являются функциями Миттаг-Леффлера. Поэтому координаты вектор-функции $F_\gamma^\lambda = \{F_\gamma^1(z), \dots, F_\gamma^k(z)\}$ являются функциями Миттаг-Леффлера.

Если $\gamma = 1$, то вектор-функция F_1^λ является упорядоченным набором экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

Аппроксимациями Эрмита – Паде типа (n, \vec{m}) системы F_γ^λ называют рациональные дроби $\pi_{n, \vec{m}}^j(z) = \pi_{n, \vec{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda) = \frac{P_{n, \vec{m}}^j(z)}{Q_{n, \vec{m}}(z)}$, $j = 1, 2, \dots, k$, где алгебраические многочлены

$Q_{n, \vec{m}}(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; F_\gamma^\lambda)$, $P_{n, \vec{m}}^j(z) = P_{n, \vec{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda)$, $\deg Q_{n, \vec{m}} \leq m$, $\deg P_{n, \vec{m}}^j \leq n_j$ удовлетворяют условиям

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) = R_{n, \vec{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda) = Q_{n, \vec{m}}(z)F_\gamma^j(z) - P_{n, \vec{m}}^j(z) = A_j z^{n+|m|+1} + \dots$$

$Q_{n,\bar{m}}, P_{n,\bar{m}}^j$ называют [2] *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для системы F_γ^λ* . Впервые такие многочлены появились в работе Эрмита [3] для системы экспонент F_1^λ в виде интегралов, которые называют *интегралами Эрмита*. Хорошо известна решающая роль этих интегралов в доказательствах трансцендентности чисел e, π (см. [4]).

При $k=1$ (в этом случае $\bar{m}=m_1=m$, а $\pi_{n,m}(z; F_\gamma^1) := \pi_{n,\bar{m}}^1(z)$) называют *аппроксимациями Паде функции F_γ^1* явные выражения для остаточной функции $R_{n,m}(z) := R_{n,\bar{m}}^1(z; F_\gamma^1)$ и знаменателя $Q_m(z; F_\gamma^1)$ найдены ван Россумом [5]: при $n \geq m-1$

$$Q_m(z; F_\gamma^1) = {}_1F_1(-m, -n-m-\gamma; -z),$$

$$R_{n,m}(z; F_\gamma^1) = \frac{(-1)^m m! z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} {}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z). \quad (2)$$

Напомним, что

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \frac{z^p}{p!}.$$

Для системы F_λ^γ аналоги представлений Эрмита получены А. И. Аптекаревым [6]: при $n \geq m_j - 1$ и $j=1, 2, \dots, k$,

$$Q_{n,\bar{m}}(z; F_\gamma^\lambda) = \frac{z^{n+m+\gamma}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^{\infty} T(x) e^{-zx} dx,$$

$$R_{n,\bar{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{\lambda_j^{\gamma-1} (\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} T(x) e^{-zx} dx, \quad (3)$$

где $T(x) = x^{n+\gamma-1} \prod_{v=1}^k (x-\lambda_v)^{m_v}$ и $\gamma \neq 1$. Условие $n \geq m_j - 1$ является необходимым (см. [7]).

В интеграле (3), определяющем остаточную функцию $R_{n,\bar{m}}^j$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j . Здесь и далее для комплексных величин w, τ считаем, что $w^\tau = e^{\tau \ln w}$, где однозначная ветвь логарифма задается равенством $\ln w = \ln |w| + i \arg_0 w$, $\arg_0 w \in (-\pi, \pi]$. В [6] доказано следующее асимптотическое равенство: при $n+|m| \rightarrow +\infty$

$$Q_{n,\bar{m}}(z; F_\gamma^\lambda) = \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1} z \right\} (1+o(1)). \quad (4)$$

В (4), как и в других аналогичных равенствах предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по z на компактах в \mathbb{C} .

Де Брюен [8] при $k=1$, А. И. Аптекарев [6] при $k>1$ показали, что при $n \geq m_j - 1$, $j=1, \dots, k$ и $n+|m| \rightarrow \infty$ дроби $\pi_{n,\bar{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda)$ сходятся к $F_\gamma^j(z)$ равномерно на компактах в \mathbb{C} . В настоящее время весьма актуальной является задача описания скорости этой сходимости (подробнее, см. [7]).

Скорость сходимости аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z; F_\gamma^1)$ установлена в [9]: при $n \geq m-1$ и $n+m \rightarrow \infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma^1) = (-1)^m \frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (5)$$

Из равенств (4), (5) и тождества (2) следует, что при $n + m \rightarrow \infty$

$${}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z) = \exp\left\{\frac{mz}{n+m}\right\} (1 + o(1)).$$

В случае $k > 1$, имеющиеся результаты о скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде относятся в основном к диагональному случаю и получены при условии, что числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – действительные, а $\gamma = 1$. По существу, единственным методом в таких исследованиях является метод перевала. Для комплексных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ и в недиагональном случае применение метода перевала крайне затруднено. В такой ситуации в работе [7] применён новый подход, в своей существенной части опирающийся на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала.

В данной статье сформулирован многомерный аналог теоремы 4 из работы [7], в которой рассматривался случай $k = 2$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$, $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных отличных от нуля комплексных чисел и $n \geq m_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, k$. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) / \sqrt{n} = 0$, то равномерно по всем таким \bar{m} , что $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow +\infty$

$$F_\gamma^j(z) - \pi_{n, \bar{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda) = (-1)^{|m|} \lambda_j^{n+m_j+1} \Omega_j(k) \frac{m_j!(\gamma)_n z^{n+|m|+1}}{(\gamma)_{n+|m|} (\gamma)_{n+m_j+1}} (1 + o(1)),$$

где $\Omega_j(1) = 1$, $\Omega_j(k) = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j}}^k (\lambda_v - \lambda_j)^{m_v}$, если $k > 1$.

Заметим, что при сделанных в теореме 1 предположениях, из (4) следует, что $Q_{n, \bar{m}}(z) = (1 + o(1))$ при $n + |m| \rightarrow \infty$. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно найти асимптотику функций $R_{n, \bar{m}}^j$.

Теорема 2. При любом $k \geq 1$ и $j = 1, 2, \dots, k$

$$R_{n, \bar{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda) = (-1)^{|m|} \lambda_j^{n+m_j+1} \Omega_j(k) \frac{\Gamma(n+\gamma) z^{n+|m|+1}}{(\gamma)_{n+|m|}} \times \\ \times \sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l \frac{(m_j+l)!}{\Gamma(n+m_j+l+\gamma+1)!} {}_1F_1(m_j+l+1, n+m_j+l+\gamma+1; \lambda_j z),$$

где $a_0 = 1$, а при $l \geq 1$

$$a_l = \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_k - t_j = l \\ t_v \geq 0}} \left\{ \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j}}^k C_{m_v}^{t_v} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_v - \lambda_j} \right)^{t_v} \right\}.$$

В теореме 2 найден аналог тождества ван Россума (2) при $k > 1$.

В условиях теоремы 1 имеются существенные ограничения на рост порядка мультииндекса: $|m| = o(\sqrt{n})$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим один частный случай, когда эти ограничения удаётся снять.

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – корни уравнения $z^k = 1$, т. е.

$$\lambda_j = e^{\frac{i^{2\pi(j-1)}}{k}}, j = 1, 2, \dots, k, \quad (6)$$

где i – мнимая единица. Заметим, что для любого $j = 1, 2, \dots, k$

$$\lambda_j \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j}}^k (\lambda_v - \lambda_j) = \prod_{v=2}^k (\lambda_v - 1) = (-1)^{k-1} k. \quad (7)$$

Равенства (7) легко обосновать, если в левой и правой частях тождества $\frac{z^k - \lambda_j^k}{z - \lambda_j} = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j}}^k (z - \lambda_v)$ перейти к пределу при $z \rightarrow \lambda_j$.

Рассмотрим систему функций F_γ^λ , где $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$, а λ_j определяются равенствами (6). В работе [7] в диагональном случае, когда $n = m_1 = \dots = m_k$, с помощью метода перевала получены следующие асимптотические равенства: при $k > 1$ и $j = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} & F_\gamma^j(z) - \pi_{n, \bar{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda) = \\ & = (-1)^n \lambda_j^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \right)^{\gamma-1} G_k(n) \frac{z^{n+kn+1}}{(\gamma)_{n+kn}} e^{\lambda_j(1-\sqrt[k]{1/(k+1)})z} (1+o(1)), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$G_k(n) := \sqrt{\frac{2\pi}{n^k \sqrt{(k+1)^{k+2}}} \left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}} \right)^n}.$$

Теорема 3. Пусть $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $m_1 = \dots = m_k = m$, а $n \in \mathbb{Z}_+^1$. Тогда для любого $k \geq 1$ при $n+m \rightarrow \infty$ и $j = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} & F_\gamma^j(z) - \pi_{n, \bar{m}}^j(z; F_\gamma^\lambda) = (-1)^m \lambda_j^{n+1} \times \\ & \times \frac{1}{k} B\left(m+1; \frac{n+\gamma}{k}\right) \frac{z^{n+kn+1}}{(\gamma)_{n+kn}} e^{\lambda_j(1-\sqrt[k]{n/(n+km)})z} e^{\frac{(m \sum_{v=1}^k \lambda_v)z}{(n+km)}} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (9)$$

В заключение сделаем два замечания.

При $n \rightarrow \infty$ $\frac{1}{k} B\left(m+1; \frac{n+\gamma}{k}\right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \right)^{\gamma-1} G_k(n)$. Поэтому, если $m = n$, то асимпто-

тические равенства (8) и (9) совпадают. Таким образом, теорема 1 работы [7] является следствием теоремы 3. Обращаем внимание на то, что эти теоремы доказаны совершенно разными методами.

Далее, нетрудно показать, что если $m = o(\sqrt{n})$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{k} B\left(m+1; \frac{n+\gamma}{k}\right) \sim k^m \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m+1}}. \quad (10)$$

Принимая во внимание равенства (7), при $m_1 = \dots = m_k = m$ получаем, что $(-1)^{|m|} \lambda_j^{n+m_j+1} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j}}^k (\lambda_v - \lambda_j)^{m_v} = (-1)^m \lambda_j^{n+1} k^m$. Поэтому при соответствующих параметрах m_j и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ теоремы 1 и 3 согласуются. Отметим также, что если при $n \rightarrow \infty$ условие $m = o(\sqrt{n})$ не выполняется, то эквивалентность в (10) нарушается. Это значит, что условие $m = o(\sqrt{n})$ в теореме 1 необходимо.

Список использованных источников

- 1 Mittag-Leffler, G. Sur la nouvelle fonction $E(x)$ / G. Mittag-Leffler // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1903. – № 137. – P. 554–558.
- 2 Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Electron. Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 195–222.
- 3 Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1873. – № 77. – P. 18–293.
- 4 Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. / Ф. Клейн. – изд. 4-е. – Москва : Наука, 1987. – Т. 1 : Арифметика, алгебра, анализ. – 432 с.
- 5 Van Rossum, H. Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – № 58. – P. 517–534, 675–682.
- 6 Аптекарев, А. И. Об аппроксимациях Паде к набору $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \}_{i=1}^k$ / А. И. Аптекарев // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.
- 7 Старовойтов, А. П. Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера / А. П. Старовойтов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова РАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.
- 8 De Bruin, M. G. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1; c; x)$ / M. G. De Bruin // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1976. – № 79. – P. 408–418.
- 9 Старовойтов, А. П. Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера / А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова // Математический сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, Д. А. Волков

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Введение. В последние годы объектом повышенного внимания являются многочлены, удовлетворяющие нестандартным соотношениям ортогональности. Такие многочлены естественным образом возникают в качестве знаменателя аппроксимаций Паде для системы марковских функций [1]. В этом контексте их принято называть *полиортогональными* многочленами. Для полиортогональных многочленов соотношения ортогональности распределены между несколькими мерами μ_1, \dots, μ_k . Особый интерес представляют меры, для которых общую теорию ортогональных многочленов можно распространить на полиортогональные многочлены. Ряд основополагающих результатов в этом направлении исследований получен в [2]–[5]. Будем рассматривать близкую по постановке задачу. В классической теории ортогональных многочленов хорошо известно представление ортогонального многочлена Q_n в виде:

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где

$$s_i = \int_{\Delta} x^i d\mu(x) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

– последовательность степенных моментов меры μ с носителем Δ . Тожество (1) устанавливается [1] в результате процесса ортогонализации Грамма–Шмидта линейно независимой системы $1, x, \dots, x^n$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ . В данной работе доказывается, что аналогичное представление справедливо и для полиортогонального многочлена. В частности, найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности полиортогонального многочлена, при выполнении которых он представляется в детерминантном виде.

Полиортогональные многочлены. Определения и свойства.

Множество k – мерных мультииндексов (индексов) $n = (n_1, \dots, n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + \dots + n_k$.

Пусть $s = (s_0, s_1, \dots)$ – произвольная последовательность комплексных чисел. В комплексном линейном пространстве \mathcal{P}_C , состоящем из многочленов, определим линейный функционал \mathfrak{S}_s : если $T \in \mathcal{P}_C$, $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и

$$T(z) = t_0 + t_1 z + \dots + t_n z^n,$$

то полагаем $\mathfrak{S}_s(T(z)) := t_0 s_0 + t_1 s_1 + \dots + t_n s_n$.

Определение 1. Тожественно не равный нулю многочлен Q , $\deg Q \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ будем называть n -ым ортогональным многочленом относительно последовательности S , если

$$\mathfrak{S}_s(Q(z) \cdot z^\nu) = 0, \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

При $n = 0$ 0-ым ортогональным многочленом по определению считаем многочлен $Q(z) \equiv 1$.

Рассмотрим теперь k произвольных последовательностей $s^j = (f_0^j, f_1^j, \dots)$ и соответствующий им набор (систему) $f = (f_1, \dots, f_k)$, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, j = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Обозначим через \mathfrak{S}_{s^j} функционал, соответствующий последовательности s^j .

Определение 2. Пусть $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Тожественно не равный нулю многочлен $Q = Q_n$, $\deg Q \leq |n|$ будем называть n -ым полиортогональным многочленом (II-го типа) для набора формальных степенных рядов (2), если

$$\mathfrak{S}_{s^j}(Q(z) \cdot z^\nu) = 0, \nu = 0, 1, \dots, n_j - 1; j = 1, \dots, k \quad (3)$$

Здесь предполагается, что $n_j \neq 0$. Если $n_{j_0} = 0$, то в (3) индекс j пробегает значения $\{1, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots, k\}$, т. е. последовательность s^{j_0} и ряд f_{j_0} в определении полиортогонального многочлена не участвуют. Для $n = (0, \dots, 0)$ 0-ым полиортогональным многочленом по определению считаем $Q(z) \equiv 1$.

В том случае, когда μ_j при каждом $j = 1, \dots, k$ является положительной борелевской мерой на вещественной прямой с компактным бесконечным спектром, носителем которой являются отрезок Δ_j , а

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j, j=1, \dots, k$$

– соответствующий набор марковских функций, соотношения ортогональности (3) принимают привычный вид:

$$\int_{\Delta_j} Q(x) \cdot x^v d\mu_j(x) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n_j - 1; \quad j = 1, \dots, k.$$

При этом функция f_j представляется соответствующим рядом (2), где

$$f_i^j = \int_{\Delta_j} x^i d\mu_j(x), \quad i = 0, 1, \dots$$

Полиортогональный многочлен Q условиями (3) определяется не однозначно, а с точностью до числового множителя. Эта неединственность может быть и более существенной.

Определение 3. Будем говорить, что n -ый полиортогональный многочлен Q однозначно определяется условиями (3), если для любых двух таких многочленов Q', Q'' найдётся комплексное число λ , что $Q'' \equiv \lambda Q'$.

Центральными в теории полиортогональных многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы.

Определение 4. Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ называется нормальным для системы f , если для любого n -го полиортогонального многочлена Q имеем $\deg Q = |n|$.

Хорошо известно [1], что при $k = 1$ индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ является нормальным тогда и только тогда, когда определитель Ганкеля H_n , элементами которого являются коэффициенты ряда f_1 ,

$$H_0 = 1, H_1 = f_0^1, H_n = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-2}^1 \end{vmatrix}, \quad n > 1$$

отличен от нуля. Для $k > 1$ критерий нормальности индекса нам неизвестен.

Определение 5. Система f называется совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для f .

Нормальность индекса n является достаточным условием единственности n -го полиортогонального многочлена. Легко привести пример, который показывает, что нормальность индекса n , вообще говоря, не является необходимым условием единственности многочлена Q .

Критерий единственности. Явный вид полиортогонального многочлена.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для $n_j \neq 0$ определим матрицы порядка $n_j \times (|n| + 1)$

$$F^j = \begin{pmatrix} f_0^j & f_1^j & \dots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \dots & f_{|n|+1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \dots & f_{|n|+n_j-1}^j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, k;$$

а затем матрицу порядка $|n| \times (|n| + 1)$ $F_n = [F^1 \ F^2 \ \dots \ F^k]^T$.

При $n_j = 0$ матрица F_n не содержит блок-матрицу F^j . Если к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку $E(z) = (1 \ z \ \dots \ z^{|n|-1} \ z^{|n}|)$, то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид $\det [F^1 \ F^2 \ \dots \ F^k \ E(z)]^T$.

Определение 6. Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ будем называть допустимым для f , если ранг матрицы F_n равен $|n|$.

Определение 7. Систему f будем называть почти совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются допустимыми для f .

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. Для того, чтобы для ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и системы f n -ый полиортогональный многочлен $Q_{|n|}$ определялся условиями (3) однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был допустимым для f , т. е. $\text{rang} F_n = |n|$.

Если $\text{rang} F_n = |n|$, то при определённом выборе мультипликативного множителя полиортогональный многочлен $Q_{|n|}$ представляется в виде

$$Q_{|n|}(z) = \det [F^1 \ F^2 \ \dots \ F^k \ E(z)]^T. \quad (4)$$

Замечания и следствия.

В первую очередь следует сказать, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является допустимым для f , то многочлен $Q_{|n|}$, определённый равенством (4), не является n -м полиортогональным многочленом для f . Так для системы функций (f_1, f_2)

$$f_1(z) = -f_2(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \dots$$

$Q_2(z) = (a+bz) - (a+2b)z^2/4$. Однако, если этот многочлен находить по формуле (4), то получим, что $Q_2(z) \equiv 0$.

Легко заметить, что компонента n_j мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ определяет число коэффициентов ряда f_j , которое учитывается при построении многочленов $Q_{|n|}$. Если, например, $n = (n_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то $|n| = n_1$. отождествляя n_1 с n получим представление в точности совпадающее с классической формулой (1).

Опираясь на теорему 1, нетрудно получить критерий нормальности индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ при $k > 1$.

Следствие 1. Ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным для f тогда и только тогда, когда определитель

$$H_n^k = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следствие 2. Полиортогональный многочлен Q_n определен однозначно для всех мультииндексов $n \in \mathbb{Z}_+^k$ тогда и только тогда, когда система f является почти совершенной.

Следствие 3. Пусть ненулевой мультииндекс $n = (n_1, \dots, n_k)$ является допустимым для системы f . Тогда

$$\deg P_n^j = |n| - 1 \Leftrightarrow H_n^k \cdot f_0^j \neq 0.$$

Список использованных источников

- 1 Никишин, Е. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин. – Москва : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
- 2 Aptekarev, A. I. Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi-Bessel polynomials / A. I. Aptekarev, F. Marcellán, I. J. Rocha // Approx. Theory. – 1997. – № 90 (1). – P. 117–146.
- 3 Aptekarev, A. I. Multiple orthogonal polynomials / A. I. Aptekarev // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – № 99 (1–2). – P. 423–447.
- 4 Van Assche, W. Some classical multiple orthogonal polynomials / W. Van Assche, E. Coussement // J. Comput. Appl. Math. – 2001 – Vol. 127. – P. 317–347.
- 5 Aptekarev, A. I. Multiple orthogonal polynomials for classical weights / A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – Vol. 355 (10). – P. 3887–3914.

Е. И. Сукач, Ю. В. Жердецкий, М. А. Бужан, А. А. Кончиц
г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

МЕТОД И СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Введение. Для оценки надёжности электроэнергетических систем структурно-сложной организации используются различные математические модели, при которых исследуемая система формализуется в виде графовой структуры, имеющей один вход (начальная вершина) и один выход (конечная вершина). Это ограничивает применение моделей при рассмотрении систем в виде многосвязных структур, имеющих множество терминальных вершин (входов/выходов). Поэтому является актуальной и практически востребованной разработка методов и программных средств автоматизации, позволяющих получать точные вероятностные оценки надёжности многосвязных графовых систем.

В статье излагается метод вероятностно-алгебраического моделирования надёжности электроэнергетических систем большой размерности, интерпретируемых в виде структур n -полосников, позволяющий рассчитать результирующие вероятности состояний надёжности систем по вероятностям надёжности составляющих их элементов.

Этапы метода оценки надёжности структурно-сложных электроэнергетических систем. Метод реализуется последовательностью этапов (таблица 1), включающих создание и эксплуатацию вероятностно-алгебраических моделей электроэнергетических систем с использованием одной из разработанных схем формализации [1].

Этап 1. Формализация электроэнергетической системы. На первом этапе формируется структурная схема исследуемой системы, определяются параметры надёжности элементов и критерии выбора варианта функционирования объекта.

Шаг 1.1 Содержательное описание исследуемой системы. Выбирается уровень детализации системы, соответствующий целям исследования, определяется состав элементов $K=\{K_i\}$ и описываются связи между ними $N=\{N_j\}$.

Шаг 1.2 Выбор схемы формализации системы. Устанавливается число входов/выходов системы, которое определяет способ представления системы, а именно: в виде структуры-трёхполюсника с тремя терминальными вершинами; в виде структуры-четырёхполюсника с терминальными вершинами. В зависимости от целей исследования, элементам системы ставятся в соответствие либо ребра графа (схема формализации «элементы-ребра»), либо вершины (схема «элементы-вершины»).

Шаг 1.3 Определение параметров моделирования. Указывается вид показателя надёжности (время наработки на отказ, вероятность безотказной работы, коэффициент готовности и др.) и определяется число состояний элементов.

Шаг 1.4 Задание критериев надёжной работы системы. Надёжность функционирования системы определяется итоговым состоянием системы, вероятность которого должна находиться в допустимых пределах.

Таблица 1 – Этапы метода оценки надёжности структурно-сложных электроэнергетических систем

Название этапа	Содержание этапа
1 Формализация электроэнергетической системы	1.1 Содержательное описание исследуемой системы
	1.2 Выбор схемы формализации системы
	1.3 Определение параметров моделирования
	1.4 Задание критериев надёжной работы системы
2 Задание исходных данных моделирования	
3 Определение структурной сложности системы и выбор способа расчёта её надёжности	3.1 Реализация методик расчёта надёжности систем ограниченной размерности
	3.2 Подготовка модели системы для её редуцирования
4 Сокращение размерности системы за счёт редуцирования исходного графа G вероятностной модели системы	4.1 Исключение цепочек последовательно связанных элементов
	4.2 Исключение цепочек параллельно расположенных элементов
	4.3 Исключение замкнутых фрагментов графа
	4.4 Исключение фрагментов графа замкнутых на две вершины (фрагментов-двухполюсников)
	4.5 Оценка размера полученной графовой структуры G'
5 Сокращение размерности модели за счёт разрезания графа системы	
6 Расчёт надёжности в структур n -полюсников, выделенных в процессе разрезания графа	
7 Вероятностно-алгебраическое моделирование агрегированной электроэнергетической системы	7.1 Преобразование алгебраической модели в вероятностную форму
	7.2 Реализация вероятностно-алгебраического умножения n -полюсников
8 Расчёт статистических характеристик по результатам моделирования и визуализация полученных зависимостей	
9 Выбор проектных решений	

Правила составления содержательного описания и принципы формализации системы являются средствами малой автоматизации, которые позволяют облегчить разработку новых и модификацию существующих моделей из библиотеки моделей в составе ControlSyst.

Этап 2. Задание исходных данных моделирования. На втором этапе с использованием специализированных программных средств осуществляется ввод подготовленных исходных данных (структурных схем, параметров моделирования, критериев надёжности) в базу данных системы моделирования ControlSyst.

Этап 3. Определение структурной сложности электроэнергетической системы и выбор способа расчёта её надёжности. В результате анализа исходных данных и автоматической проверки связности графа G реализуется одно из направлений моделирования.

Шаг 3.1. Реализация методик расчёта надёжности систем ограниченной размерности. В том случае, когда число элементов объекта исследования находится в допустимых пределах ($m \leq 20$), реализуются расчёты надёжности по методикам для многосвязных систем, представленным в виде структур n -полюсников ($n = 3, 4$), в которых элементам могут соответствовать как вершины графа, так и его рёбра.

Шаг 3.2. Подготовка модели системы для её редуцирования.

Этап 4. Сокращение размерности системы за счёт редуцирования исходного графа G вероятностной модели системы. С целью уменьшения размерности модели реализуется пошаговый алгоритм редукиции, который сопровождается вероятностными расчётами надёжности, сокращаемых участков. При этом графовая структура модели преобразуется в эквивалентную структуру меньшей размерности: $G \rightarrow G'$. Этап полностью автоматизирован за счёт использования программных средств системы ControlSyst.

Этап 5. Сокращение размерности модели за счёт разрезания графа системы на структуры n -полюсники. Этап реализуется итерационным алгоритмом в составе встроенной интеллектуальной подсистемы инструментария ControlSyst. В результате разрезания граф G' преобразуется в вариант агрегированной структуры исследуемой системы G'' . Элементами крупной схемы являются сложные вершины, замещающие графовые структуры n -полюсники ($n=3, 4$). Результат в виде агрегированной схемы G'' значительно сокращает размерность модели исследуемой системы, позволяет представить её как композицию n -полюсников и описать модель в алгебраической форме вида:

$$AF = (Z_1 \circ Z_2) \circ (Z_3 \circ Z_4) \circ Z_7 \circ \dots \circ (Z_{k-1} \circ Z_k) \quad (1)$$

где $Z_i, i = \overline{1, q}$ структуры n -полюсники, \circ – операции вероятностно-алгебраического моделирования, q – число выделенных n -полюсников. Для структур четырёхполюсников определены три операции: CSC, SKS, PRL. Для структур трёхполюсников определена операция параллельного соединения PRL3.

Этап 6. Расчёт надёжности структур n -полюсников, выделенных в процессе разрезания графа. Для совокупности выделенных структур n -полюсников $\{Z_i\}$ из базы данных системы ControlSyst автоматически загружаются данные, характеризующие надёжность их внутренних элементов. С целью расчёта их надёжности реализуется последовательный анализ их свойств, включающий расчёт размерности выделенных структур n -полюсников $\{Z_i\}$, определение их структурной сложности. При этом реализуется возврат на 3 этап метода, но для очередной структуры n -полюсника из множества $\{Z_i\}$.

Итогом реализации этапа являются рассчитанные вектора вероятностей, характеризующие надёжность структур n -полюсников. Они автоматически сохраняются в базе данных системы ControlSyst и являются исходными для вероятностно-алгебраического умножения n -полюсников.

Этап 7. Вероятностно-алгебраическое моделирование агрегированной электроэнергетической системы. На этом этапе реализуется расчётная вероятностная форма агрегированной модели системы, представленной в виде структуры n -полюсника.

Шаг 7.1. Преобразование алгебраической модели в вероятностную форму. На этом шаге реализуется автоматическое преобразование алгебраической формы модели (1) в её вероятностную форму, реализующую расчёты вероятностных показателей надёжности системы:

$$P^S = P(\{P^i, AF\}, i = \overline{1, q}), \quad (2)$$

где P^i – векторы вероятностей состояний n -полюсников $\{Z_i\}$, составляющих исследуемую систему, q -число выделенных n -полюсников, P^s – результирующий вектор вероятностей состояний системы, AF– алгебраическая модель исследуемой системы.

Шаг 7.2. Реализация вероятностно-алгебраического умножения n -полюсников. Вероятностно-алгебраическое умножение n -полюсников выполняется путём последовательного умножения векторов вероятностей, характеризующих, соответственно, надёжность структур трёхполюсников и четырёхполюсников, с учётом уровня вложенности операций и коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования.

При вероятностно-алгебраическом умножении четырёхполюсников используется формула:

$$P_k^3 = \sum_{j=1}^{15} \sum_{i=1}^{15} a_{ij}^k P_i^1 P_j^2, \quad (3)$$

где $P^1 = (P_1^1, P_2^1, \dots, P_{15}^1)$, $P^2 = (P_1^2, P_2^2, \dots, P_{15}^2)$ и $P^3 = (P_1^3, P_2^3, \dots, P_{15}^3)$ вектора вероятностей надёжности соответственно первого, второго и результирующего четырёхполюсников $i, j, k = \overline{1,15}$.

Коэффициенты вероятностно-алгебраического умножения a_{ij}^k определяются по формуле:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & \text{если } \sigma^k = \sigma^i \circ \sigma^j \\ a_{ij}^k = 0, & \text{если } \sigma^k \neq \sigma^i \circ \sigma^j \end{cases} \quad (4)$$

где \circ –операция вероятностно-алгебраического моделирования (CSC, SRS, PRL, PRL3), векторы $\sigma^i, \sigma^j, \sigma^k$ – базисные векторы пространств R^{15} или R^5 , соответственно, для четырёхполюсников и трёхполюсников.

Этап 8. Расчёт статистических характеристик по результатам моделирования и визуализация полученных зависимостей. Этап реализуется с использованием подсистемы ControlSyst, обеспечивающей расчёт статистических характеристик по результатам моделирования и их визуализацию в виде графиков и диаграмм.

Этап 9. Выбор проектных решений. На завершающем этапе вероятностно-алгебраического моделирования реализуется технология анализа вероятностных характеристик структурно-сложных электроэнергетических систем большой размерности, в ходе которой полученные результаты автоматизированного вероятностно-алгебраического моделирования n -полюсников и расчёты показателей их надёжности используются для выработки и обоснования необходимых управленческих решений.

Заключение. К положительным свойствам метода средствам автоматизации относятся: универсальность метода и программного инструментария, автоматизирующего расчёты; гибкость и простота модификации и развития модели системы; поддержка иерархичности; единое вероятностное представление надёжности элементов и всей системы; наличие методик и программных средств автоматического редуцирования графовой модели системы.

Список использованных источников

1 Сукач, Е. И. Один из подходов к оценке надёжности электроэнергетических систем с вероятностными параметрами функционирования / Е. И. Сукач, Ю. В. Жердецкий, М. А. Бужан, А. А. Кончиц // Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems: Proceedings of the Sixteenth International Scientific Conference MASR – 2020 (Saint-Petersburg, Russia, June 23–25, 2020). – Санкт-Петербург : ГУАП-2020. – С. 77–83.

Б. Э. Эшматов

г. Карши, Каршинский инженерно-экономический институт, Узбекистан

ЗАДАЧА С ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теория уравнений смешанного типа является одним из центральных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Интерес к этим вопросам связан как с теоретической значимостью получаемых результатов, так и с выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обуславливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных.

Многие задачи тепло- и массообмена в капиллярно-пористых средах также сводятся к краевым задачам для смешанных парабола-гиперболических уравнений, вообще говоря, с разрывными коэффициентами.

Исследования по краевым задачам для уравнений смешанного типа в области с отходом от характеристики (с нехарактеристической границей) берут свое начало с основополагающих работ А. В. Бицадзе [1].

Для смешанного парабола-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа задачи с отходом от характеристики (в том числе задачи с наклонной производной) изучены в работах А.С. Бердышева [3].

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками $AA_0, A_0B_0, BB_0, A(0,0), A_0(0,1), B(1,0), B_0(1,1)$, а при $y < 0$ - гладкой кривой $AD: y = -\gamma(x), 0 \leq x \leq \ell$, где $0,5 < \ell \leq 1, \gamma(0) = 0, \ell + \gamma(\ell) = 1$, расположенной внутри характеристического треугольника $ABC: 0 \leq x + y < x - y \leq 1$, и отрезком характеристики $BC: x - y = 1, \ell \leq x \leq 1$, уравнения смешанного парабола-гиперболического типа

$$\mathcal{L}u = f(x, y), \quad (1)$$

где
$$\mathcal{L}u = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases}$$

Относительно кривой AD будем предполагать, что ни в одной своей точке она не имеет характеристического направления, принадлежит классу функций $C^1[0, \ell]$ и $\gamma(0) = 0, 0 < x \leq \ell < 1, \ell + \gamma(\ell) = 1$, функция $x + \gamma(x)$ монотонно возрастает.

Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА TN. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AA_0 \cup BB_0} = 0, \quad (2)$$

$$u_x + u_y + c(x, y)u|_{AD} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{BD} = 0. \quad (4)$$

Под регулярным решением задачи TN назовем ограниченную функцию $u(x, y)$ из класса $C(\overline{\Omega} \setminus A) \cap C^1(\Omega \cup AD) \cap C^{2,1}(\Omega_0) \cap C^{2,2}(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_0 \cup \Omega_1$ и краевым условиям (2), (3) и (4).

Задача TN является аналогом задач, впервые рассмотренных в [2] для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Аналог этой задачи в случае, когда $c(x, y) = 0$, для смешанного парабола-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа изучен в работе [4].

В этой работе рассматривается в случае когда $C(x,y) \neq 0$ и доказывается разрешимость задачи TN.

Теорема. Для любой функции $f(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$ существует единственное регулярное решение задачи TN из класса $C^1(\bar{\Omega} \setminus A) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega}_0 \setminus A) \cap C^{2,2}(\bar{\Omega}_1 \setminus A)$.

Список использованных источников

1 Бицадзе, А. В. К проблеме уравнений смешанного типа / А. В. Бицадзе. – Труды МИ АН СССР. – 1953. – Т.41. – 59 с.

2 Кальменов, Т. Ш. О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / Т. Ш. Кальменов, Б. У. Аубакиров // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 4. – С. 700–702.

3 Бердышев, А. С. О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения / А. С. Бердышев // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. – 1989. – № 3. – С. 14–18.

4 Эшматов, Б. Э. О задаче с наклонной производной в области с отходом от характеристики для смешанного параболо-гиперболического уравнения / Б. Э. Эшматов // Труды международной научно-практической конференции «Казахстан в новом мире и проблемы национального образования», посвященной 10-летию университета «Сырдария» (16–18 мая 2008). – Том III : Естественные науки, 2018 – Жетісай – 267 с.



I. Sulym¹, I. Petryk¹, V. Gaishun², M. Borysenko¹

¹ Kyiv, Ukrain, Chuiko Institute of Surface Chemistry of NAS of Ukraine

² Gomel, Francisk Skorina Gomel State University

STUDY OF OPTICAL AND STRUCTURAL PROPERTIES OF Ho³⁺/Yb³⁺ CO-DOPED SOL-GEL SILICA GLASSES

Recently, there has been a great interest focused on luminescent materials doped with rare earth (RE) ions because of their potential applications in solid state lighting, lasers, optical sensors, telecommunications, photovoltaics, color displays [1, p. 8]. Among the rare earth ions, ions like Yb³⁺ and Ho³⁺ are especially attractive because of the wide range of emission in UV–Visible, NIR and Mid-IR [2, p. 215]. The choice of suitable host glass matrix for the RE ion dopants is a key factor [3, p. 1515].

In this work, we investigated the influence of Ho³⁺ ions on the optical and structural features of Ho³⁺/Yb³⁺ co-doped silica glasses synthesized using a modified sol-gel method [4]. Highly dispersed silica, modified by nanoparticles of RE oxides, of a defined size and concentration, was used as an activator-filler of the sol-gel synthesis. The method enabled to obtain transparent and homogeneous materials with having yellow-colored hue that we marked as HoYbSi1, HoYbSi2 and HoYbSi3 with molar ratio of Ho₂O₃:Yb₂O₃ like 0.1:0.8, 0.2:0.8, and 0.4:0.8, respectively. The undoped silica glass was obtained for comparison. Prepared samples were polished to get smooth and uniform surface for optical measurements (disks diameter ~ 15 mm and height ~1 mm).

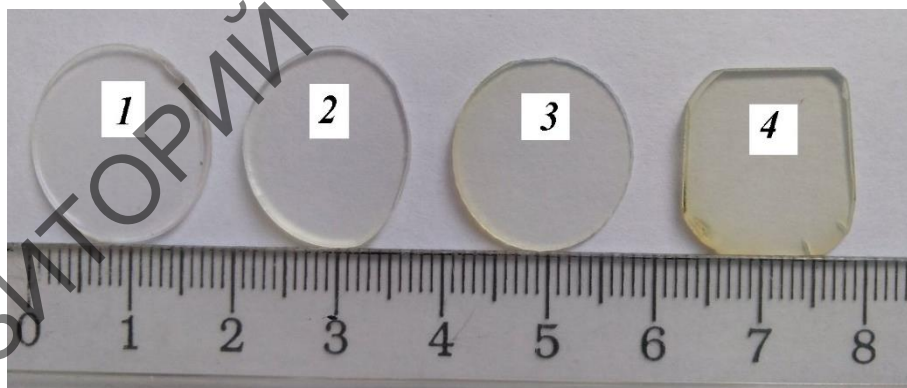


Figure 1 – The photographs of undoped (1) and co-doped sol-gel silica glasses with Ho³⁺/Yb³⁺ (2–4)

All glasses were amorphous in the nature, as confirmed by X-ray diffraction patterns. FTIR spectra for undoped and co-doped sol-gel silica glasses are shown in Figure 2. A broad band with a maximum at 3660 cm⁻¹ for QV sample (Quartz optical glass, Gus'-Khrustal'nyy, Russia) refers to the stretching vibrations of structural O-H bonds present in the silicon-oxygen framework. The integral absorption of OH groups in undoped (Figure 2, *curve 1*) sol-gel silica glass is 3.5 times greater than in QV (Figure 2, *curve QV*). The concentration is proportional to the absorption, and C_{OH} in the QV fused glass is ~ 0.1 wt. % [4]. C_{OH} in co-doped glasses varied between 0.6 – 0.9 wt. %.

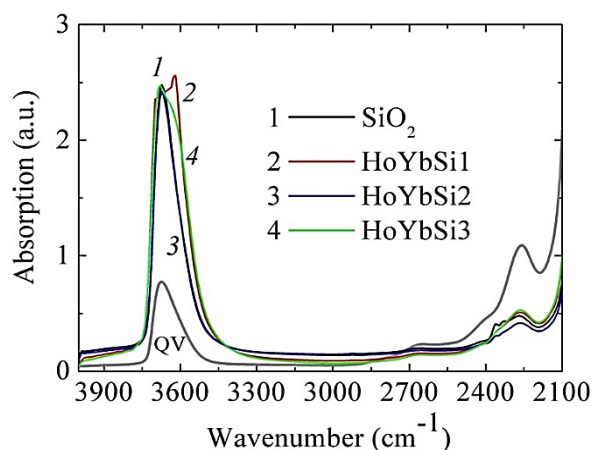


Figure 2 – FTIR spectra for QV fused silica (QV), undoped (1) and co-doped sol-gel silica glasses with $\text{Ho}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$ (2–4)

Figure 3 presents the typical absorption spectra of undoped and $\text{Ho}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$ co-doped sol-gel silica glasses. The absorption spectrum of undoped glass does not contain any peak in the range of 350 – 1000 nm. In the absorption spectrum of $\text{Ho}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$ silica glasses, one absorption peak of ytterbium in the range of 875–1000 nm is visible, split into two maxima at 930 and 975 nm. This peak is assigned to the $^2\text{F}_{7/2} \rightarrow ^2\text{F}_{5/2}$ transition of Yb^{3+} ion; the splitting into two maxima is caused by the Stark effect. Several less pronounced absorption peaks of holmium can also be found in the spectrum; they are assigned to transitions of Ho^{3+} ions, namely $^5\text{I}_8 \rightarrow ^5\text{H}_6$ (362 nm), $^5\text{I}_8 \rightarrow ^5\text{G}_6 + ^3\text{K}_8 + ^5\text{F}_2$ (overlapping peaks at 418, 452 and 485 nm), $^5\text{I}_8 \rightarrow ^5\text{F}_4$ (537 nm) and $^5\text{I}_8 \rightarrow ^5\text{F}_5$ (642 nm).

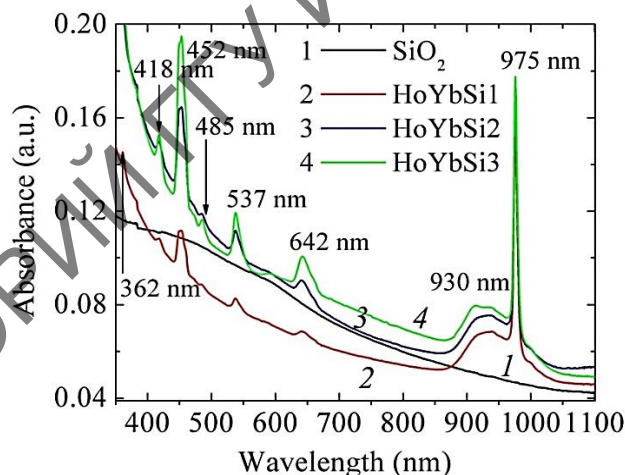


Figure 3 – Absorption spectra of undoped (1) and $\text{Ho}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$ co-doped silica glasses (2–4)

References

- 1 Seshadri, M. Study of optical absorption, visible emission and NIR–vis luminescence spectra of $\text{Tm}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$, $\text{Ho}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$ and $\text{Tm}^{3+}/\text{Ho}^{3+}/\text{Yb}^{3+}$ doped tellurite glasses / M. Seshadri, L. C. Barbosa, C. M. B. Cordeiro, M. Radha, F. A. Sigoli, Y. C. Ratnakaram // Journal of Luminescence. – 2015. – Vol. 166. – P. 8–16.
- 2 Talewar, R. A. Sensitization of $\text{Er}^{3+}/\text{Ho}^{3+}$ visible and NIR emission in $\text{NaY}(\text{MoO}_4)_2$ phosphors / R. A. Talewar, V. M. Gaikwad, P. K. Tawalare, S. V. Moharil // Optics and Laser Technology. – 2015. – Vol. 115. P. 215–221.

3 Manzani, D. Yb³⁺, Tm³⁺ and Ho³⁺ triply-doped tellurite core-cladding optical fiber for white light generation / D. Manzani, Y. Ledemi, I. Skripachev, Y. Messaddeq, S. J. L. Ribeiro, R. E. P. de Oliveira, C. J. S. de Matos // Optical Materials Express. – 2011. – Vol. 1. – P. 1515–1526.

4 Poddenezhny, E. N. Synthesis of Optical Silica Glasses / E. N. Poddenezhny, A. A. Boiko – Gomel : Sukhoi GGTU, 2002. – 210 p.

И. Э. Абдирахимов¹, М. У. Каримов²

¹ г. Карши, Узбекистан, Каршинский инженерно-экономический институт

² г. Ташкент, Узбекистан, ТНИИХТ

ПРИРОДНЫЕ БИТУМЫ И ТЯЖЕЛЫЕ НЕФТИ, ПРОБЛЕМЫ ИХ ОСВОЕНИЯ

На протяжении более ста лет самым важным, необходимым и востребованным полезным ископаемым во всем мире является нефть. Нефть как источник восполнения минерально-сырьевой базы, как продукт, без которого невозможно представить такие отрасли промышленности, как химическая, топливно-энергетическая, пищевая, текстильная и др. Потребность в нефти с каждым годом возрастает, следовательно, должна увеличиваться и добыча.

По мере истощения запасов легких и средних нефтей важным сырьевым источником для удовлетворения растущих потребностей в топливе и продуктах нефтехимии становятся тяжелые высоковязкие нефти и природные битумы. По разным оценкам запасы высоковязких тяжелых нефтей и природных битумов составляют от 790 млрд. т. до 1 трлн. т., что в 5–6 раз больше остаточных извлекаемых запасов нефтей малой и средней вязкости, составляющих примерно 162 млрд. тонн [5, с. 213]. Разведанных запасов тяжелых нефтей и природных битумов гораздо меньше, но все же больше известных на данное время запасов легких и средних нефтей (рис.1).

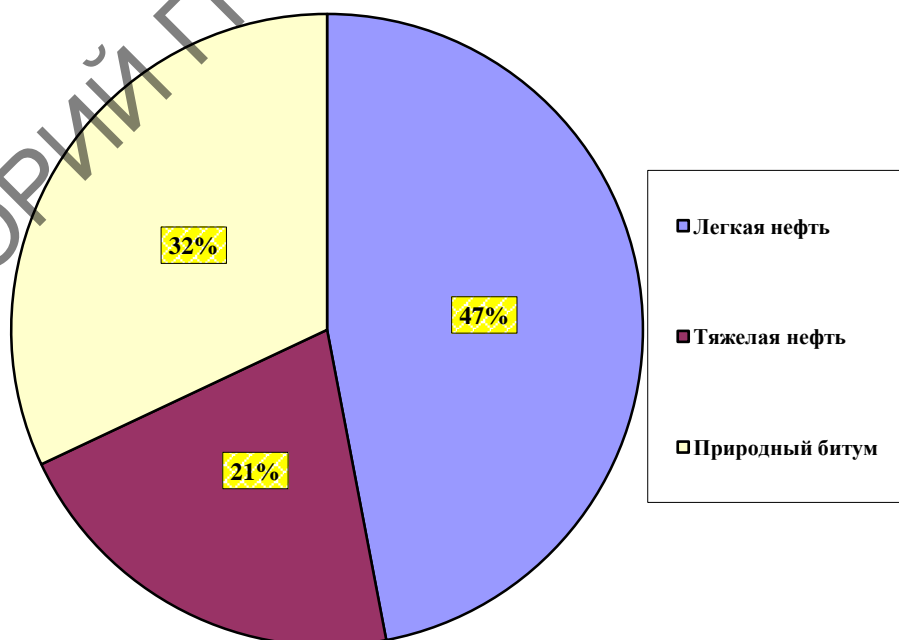


Рисунок 1 – Соотношение разведанных запасов нефти, тяжелой нефти и природного битума

Наиболее крупными запасами располагают Канада (386 млрд. т, из которых 25 млрд. т. извлекаемые) и Венесуэла (335 млрд. т, из них 70 млрд. т. извлекаемые), значительные запасы также имеют Мексика, США, Россия, Кувейт и Китай. На территории Республики Узбекистан основная часть ресурсов тяжелых нефтей и природных битумов приурочена к месторождениям Бухара-Хивинского, Ферганского и Сурхандарьинского региона, их ресурсы по разным оценкам составляют более 250 млн. тонн. Вопрос их освоения особенно актуален сейчас, в связи со снижением в последнее время объемов запасов кондиционных нефтей [2, с. 154; 6, с. 345].

Тяжелые нефти и природные битумы отличаются от обычных нефтей повышенной вязкостью и многокомпонентным составом. Вследствие последнего, они рассматриваются не только как энергетический источник, но и как комплексное сырье XXI века.

В настоящее время существует три основные проблемы, связанные с производством и комплексным использованием ПБ, и в конечном итоге, влияющие на экономическую эффективность вовлечения их в хозяйственный оборот нефтегазодобывающих компаний:

- низкий уровень разведанности месторождений ПБ;
- низкие (сравнительно с нефтяными месторождениями) технико-экономические показатели добычи битуминозной нефти;
- слабое развитие технико-экономической базы переработки ПБ (в первую очередь, процессов глубокой переработки) и извлечения металлов – микроэлементов.

Экономически целесообразной и возможной добыча тяжелых высоковязких нефтей и природных битумов представляется только благодаря развитию и применению эффективных технологий их переработки с получением товарных нефтепродуктов с высоким отличием рыночной цены от себестоимости. Что позволит окупить дорогостоящие технологии их добычи, многократно превышающие аналогичные затраты при добычи кондиционных нефтей [1, с. 168].

Аномальность физико-химических свойств тяжелых углеводородов и прежде всего их высокие вязкость (низкая текучесть или ее отсутствие) и плотность приводят к тому, что традиционные методы извлечения часто оказываются неэффективными и в ряде случаев совершенно непригодными для добычи тяжелых нефтей и природных битумов. Так, широко применяемое заводнение, при вязкости нефти свыше 80 мПа·с становится трудно осуществимым.

В связи с вышеизложенным необходим анализ накопленного в мире опыта в решении проблемы освоения трудноизвлекаемых запасов нефти и природных битумов. На сегодняшний день известно достаточно много технологий извлечения тяжелых нефтей и природных битумов, которые на практике доказали свою эффективность. Для добычи этого углеводородного сырья применяется широкий спектр методов как скважинных, так и рудничных (карьерных и шахтных).

При этом метод добычи тем или иным образом влияет на свойства углеводородов и на сохранение попутных компонентов. Это негативное влияние необходимо учитывать при выборе способов разработки ТН и ПБ.

Степень извлечения битума зависит от метода добычи и составляет: при карьерном методе – 65–85 %, при скважинном – 25–40 %. Максимальный экономический эффект достигается при открытой разработке, позволяющей наиболее полно использовать все компоненты битуминозных пород: углеводороды, серу, металлы и собственно породу (И. М. Климушин, 1988г.).

При реализации скважинных способов тяжелые нефти или природные битумы подвергаются предварительному разжижению путем подогрева пласта или закачки растворителя в пласт, а затем поднимаются на дневную поверхность через скважины. Разогрев углеводородов может быть осуществлен нагнетанием теплоносителей, внутрипластовым горением (ВПГ), электрическим током и другими модификациями вышеописанных методов.

Особенностью тепловых методов является изменение физико-химических характеристик добываемой продукции. Данные показывают существенное влияние метода добычи на свойства углеводородов и сохранение попутных компонентов. Аналогичное отмечается, когда в результате применения метода внутрислоевого горения происходит безвозвратная потеря металлов в добываемой нефти. Среднее содержание ванадия и никеля (в % от исходного) в нефти при осуществлении ВПГ в зоне сильного воздействия составляет 39,5 и 38,6, среднего – 64,24–77,2, слабого – 81,5 и 91,7 и без воздействия – 100 и 100. При реализации метода ПТВ на пласт потери попутных компонентов не превышают 10–15 % [4, с. 87].

При рудничных способах добычи нефти- или битумонасыщенная порода извлекаются на поверхность, а углеводороды из нее экстрагируются растворителями, горячей водой и паром с добавкой моющих средств и другими агентами. При этом достигается наиболее высокий коэффициент нефтеизвлечения и появляется возможность комплексного использования сырья.

Отмеченное способствует восстановлению интереса к рудничным методам, которые имеют большую историю и применялись еще тогда, когда не было буровой техники, а затраты труда и цена не имели решающего значения при добыче нефти. Мировой опыт свидетельствует о возможности эффективной разработки месторождений битуминозных пород, и тяжелых нефтей шахтным и открытым способами.

Карьерный метод в крупном промышленном масштабе применяется в Канаде, США. Положительные результаты открытой разработки получены на месторождении Кир маку в Азербайджане.

Таким образом, для промышленного освоения месторождений ТН и ПБ необходимы учитывающие их особенности специальные технологии добычи, транспортировки, первичной подготовки (сепарации, деэмульсации, обессоливания) и переработки, которые требуют, как правило, повышенных энергетических и материальных затрат.

Сказанное выше показывает, что дальнейшее продвижение в решении проблем освоения месторождений высоковязких нефтей и природных битумов требует интеграции наук, что возможно только при плодотворном сотрудничестве специалистов как по разработке нефтяных месторождений, так и представителей смежных отраслей, при более тесном слиянии науки и практики нефтедобычи.

Список использованных источников

1 Анисимова, Е. В. Высоковязкие нефти и природные битумы: проблемы и повышение эффективности разведки и разработки месторождений / Е. В. Анисимова // Экологический вестник России. – 2014. – № 6. – С. 22–28.

2 Муслимов, Р. Х. Стратегия развития нефтебитумного комплекса Татарстана в направлении воспроизводства ресурсной базы / Р. Х. Муслимов, Г. В. Романов, Г. П. Каюкова, Т. Н. Юсупова, Н. И. Искрицкая, С. М. Петров // Нефть. Газ. Новации. – 2012. – № 2. – С. 21–29.

3 Муслимов, Р. Х. Перспективы тяжелых нефтей / Р. Х. Муслимов, Г. В. Романов, Г. П. Каюкова, Т. Н. Юсупова, С. М. Петров // ЭКО. – 2012. – № 1. С. 35–40.

4 Николин, И. Г. Методы разработки тяжелых нефтей и природных битумов / И. Г. Николин // Наука-фундамент решения технологических проблем развития России. – 2007. – № 2. – С. 31–34.

5 Скважинный источник упругих колебаний : пат. 2248591 Российская Федерация, G01U 1/157 / Е. П. Большаков, Д. Н. Дмитриев, Б. А. Иванов, А. А. Молчанов, О. П. Печерский, В. В. Сидора, Б. П. Яценко. – 2003100022/28. – Бюл. № 8. – Заявл. 04.01.2003. – Оpubл. 20.03. 05.

И. Э. Абдирахимов¹, М. У. Каримов²

¹ г. Карши, Узбекистан, Каршинский инженерно-экономический институт

² г. Ташкент, Узбекистан, ТНИИХТ

СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕЭМУЛЬГАТОРОВ НА ОСНОВЕ БЛОКСОПОЛИМЕРОВ ПОЛИКАРБОКСИЛАТОВ И ОКСИ ЭТИЛЕНА

Водонефтяные эмульсии – это широкая область, и на эту тему написано несколько книг, в частности [3, 4, 15, 17–19]. Вследствие поступления к забою скважины подстилающей воды или той воды, которая закачивается в пласт для поддержания давления, в нефти появляется вода. При движении нефти и пластовой воды по трубопроводам и стволу скважины и их взаимного перемешивания происходит дробление (этот процесс называют диспергированием), в результате чего образуются водонефтяные эмульсии. Эмульсия представляет собой смесь двух взаимно нерастворимых жидкостей, одна из которых диспергирована в другой в виде мелких капелек (глобул). Диспергированная жидкость – это дисперсная фаза (внутренняя), а жидкость, в которой она находится – дисперсионная среда (внешняя).

Нефтяные эмульсии подразделяются на следующие три группы [3, 6, 17, 20, 21]: **I группа** – вода в нефти (эмульсии обратного типа), в которой содержание воды (дисперсной фазы) в нефти (дисперсионной среде) колеблется от следов до 90–95 % об. **II группа** – нефть в воде (эмульсии прямого типа), которые образуются в процессах деэмульсации нефти, т. е. при разрушения обратных водонефтяных эмульсий. **III группа** представляет собой множественные эмульсии, которые отличаются высоким содержанием мех примесей.

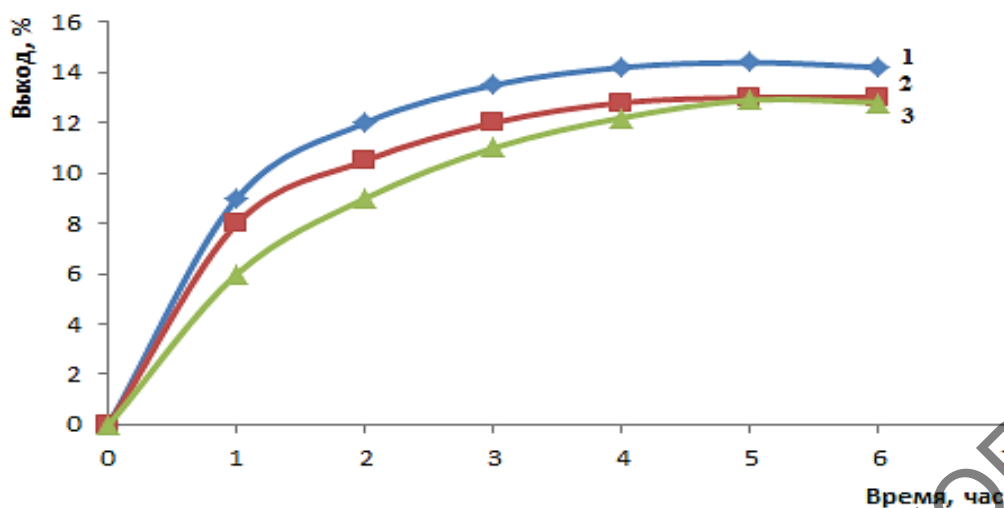
Исследования [4, 22–25] показывают, что множественные эмульсии в отличие от эмульсий обратного и прямого типа содержат большое количество мех примесей. Дисперсная фаза (вода) таких эмульсий сама является эмульсией, в которой содержатся частицы другой фазы (частицы нефти). Множественные эмульсии в основном относятся к так называемым «ловушечным» водонефтяным эмульсиям, которые образуются в процессе подготовки нефти на промыслах [4]

Для синтеза ДЭ-2 использован гидролизированный полиакрилонитрил. В отличие от предыдущего гидролизованного полиакрилонитрила, был проведен гидролиз полиакрилонитрила полностью, до образования COONa групп, но в структуре полученного присутствует – CONH₂. Потом была проведена нейтрализация полученного гидролизованного полиакрилонитрила до pH 8–9 соляной кислотой. При этом образуется – COOH группы, которые легко реагируют с окисью этилена.

В производстве химических продуктов важную роль играет и время проведения реакции. Для этого случая также было выбрано четыре соотношения начальных продуктов. Ниже на рисунке 1 показана зависимость выхода ДЭ-2 от времени реакции при температуре 80 °С.

Как видно на рисунке 1, 14.4 %-ный выход ДЭ-2 получается при проведении реакции при оптимальных условиях в течение 5 часов. Дальнейшее продолжение реакции при этих условиях приводит к уменьшению выхода. Это обусловливается усилением параллельных реакций (таких как сшивание, разложение, межмолекулярное взаимодействие и др.), которые приводят к снижению деэмульгирующего эффекта олигомерных деэмульгаторов.

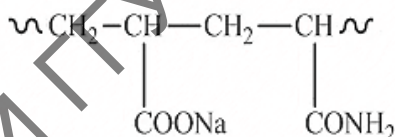
Таким образом, оптимальными условиями получения ДЭ-2, является проведение реакции при температуре 80 °С в течение 5 часов при соотношении начальных продуктов 1:8. Продукт, полученный при этих условиях, имеет очень хороший деэмульгирующий эффект. Дальнейшее исследование влияния ДЭ-2 на свойства нефтяной эмульсии проводятся продуктом, полученным при выше указанных условиях.



Соотношение гидролизованного полиакрилонитрила и окиси этилена,
1 – 1:8; 2 – 1:5; 3 – 1:2

Рисунок 1 – Зависимость выхода ДЭ-2 от времени

Как видно на ИК-спектре гидролизованного полиакрилонитрила полосы поглощения, проявляющиеся в области $1550\text{--}1610\text{ см}^{-1}$, характерны для асимметрических валентных колебаний функциональных групп – COONa. У функциональной группы – COONa имеются полосы поглощения, характерные для симметрических валентных колебаний в области 1400 см^{-1} . Кроме того, проявляющиеся полосы поглощения в области $3000\text{--}3200\text{ см}^{-1}$ показывают, что в структуре сырья имеются функциональные группы – CONH₂. Исходя из ИК – спектра гидролизованного полиакрилонитрила можно сказать, что в структуре сырья имеются, в основном, следующие функциональные группы.



Как видно на рисунке 2, полосы поглощения, проявляющиеся в области $1550\text{--}1610\text{ см}^{-1}$, характерны для асимметрических валентных колебаний функциональных групп – COONa. Эти функциональные группы не вступают в реакцию с окисью этилена.

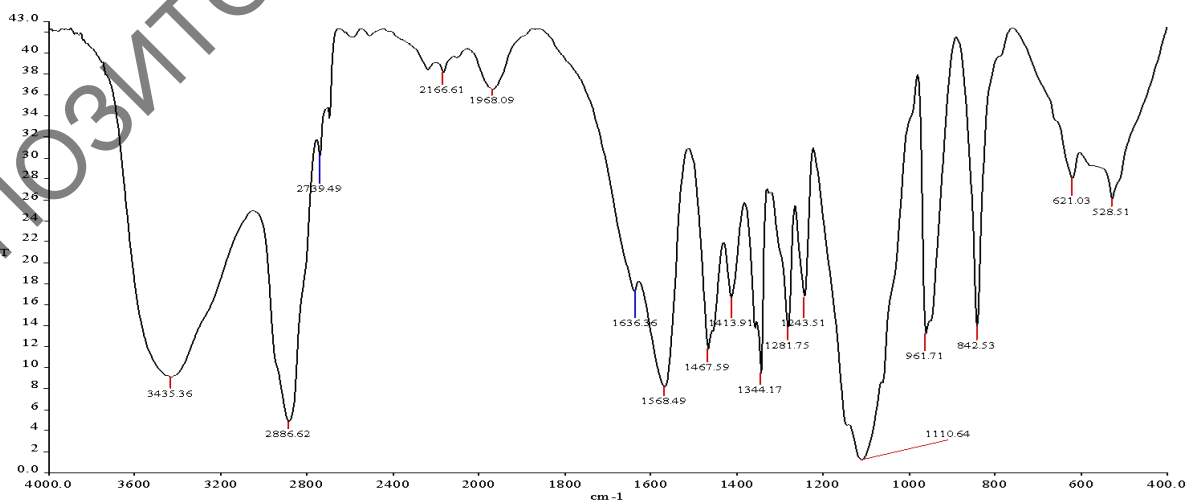


Рисунок 2 – ИК-спектр полученного демульгатора

Полосы поглощения в области 1300–1200 и 1413 см⁻¹, характерны для функциональных групп – COOH. Эти функциональные группы вступают в реакцию с окисью этилена, но не полностью. Полосы поглощения в области 1243 см⁻¹, характерны для сложных эфирных групп, которые образовались при взаимодействии функциональных групп – COOH с окисью этилена. Полосы поглощения в области 1150–1070 см⁻¹, характерны для простых эфирных связей, которые образовали между собой две молекулы окиси этилена.

Результаты исследований, помещенные в таблице 1, показывают, что хорошие результаты по обессоливанию и обезвоживанию типовой нефти могут быть получены при использовании ДЭ-2 в количестве 30–40 г/т. Степень обессоливания и обезвоживания зависит, в первую очередь, от первоначального содержания солей и воды в нефти. Так, при содержании солей 505 мг/л нефти удается обессолить нефть на 91,1 %, при содержании солей 775 и 1438 мг/л только лишь на 57,7 и 69,3 %. Увеличение расхода деэмульгатора выше 40 г/т несущественно уменьшает остаточное содержание солей, оставляя его достаточно высоким (35–51 мг/л). Применение деэмульгатора позволяет получить нефть с содержанием солей 14 мг/л при расходе ДЭ-2 в количестве 20 г/т и 10 % промывной воды.

Таблица 1 – Результаты обессоливания и обезвоживания нефти

№	Исходная нефть		Деэмульгатор	Количество деэмульгатора, г/т	Содержание после обессоливания		Удалено	
	соль, мг/л	вода, %			солей, мг/л	воды, %	солей, %	воды, % к исходной
Обессоливание термохимическое при 60° С								
1	505	3,26	ДЭ-2	20	45,0	0,25	91,1	92,4
2	1438	5,20	ДЭ-2	20	441,0	1,90	69,3	63,2
3	775	4,00	ДЭ-2	20	327,9	1,85	57,7	53,8
4	505	3,26	ДЭ-2	30	5,6	0,54	98,9	83,4
5	1438	5,20	ДЭ-2	30	441,0	1,95	69,4	62,5
6	775	4,00	ДЭ-2	30	170,5	1,00	78,0	75,0
7	775	4,00	ДЭ-2	40	59,6	0,42	92,3	89,5
8	775	4,00	ДЭ-2	50	51,6	0,42	93,5	89,5
9	505	3,26	ДЭ-2	0	147,0	1,19	70,9	63,5
10	1108	4,60	ДЭ-2	30	1066,0	4,00	4,0	12,8
11	775	4,00	ДЭ-2	30	95,7	0,60	87,8	85,0

Полученный деэмульгатор оказался эффективнее, чем остальных деэмульгаторов.

1 Для обессоливания нефти может быть применен ДЭ-2.

2 При расходе ДЭ-2 30–40 г/г и воды–10% весовых обессоливание в одну ступень позволяет подготовить нефть до содержания солей 14–15 мг/л.

В результате проведенных экспериментов установлено, что на первой стадии термохимической обработки получена нефть, соответствующая первой группе подготовленной нефти [8]. После повторной термохимической обработке при тех же условиях была получена нефть, готовая к дальнейшей переработке на НПЗ.

В таблице 2 также приведены условия обработки водонефтяных эмульсий и свойства обработанных нефтей при использовании деэмульгаторов разработанного нами. Приведенные данные показывают, что степень подготовки всех типов нефти при использовании разработанного нами деэмульгатора выше, чем известного.

Деэмульгаторы, предназначенные для внедрения на объектах добычи, сбора, подготовки и транспорта углеводородного сырья месторождения тошли, были испытаны в лабораторных условиях. Деэмульгаторы являются многотипными, пригодны для разрушения различных типов водонефтяных эмульсий. Представляют собой композиционные составы на основе поверхностно-активных веществ, растворенных в органических растворителях. Испытуемый деэмульгатор представляет собой композиционный состав на основе блок сополимеров окиси этилена и предназначен для обезвоживания и обессоливания нефтяных эмульсий в процессе сбора и подготовки нефти на промыслах.

Таблица 2 – Эффективности действия деэмульгаторов

Показатели	Нефть							
	Подготовленная нефть Зап. Тошли		Сырая нефть месторождения Вос. Тошли		Водонефтяная эмульсия месторождения Сев. Памук		Подготовленная нефть месторождения Сев. шурган	
Температура, °С	80	80	80	80	60	60	80	80
Давление, атм	1	1	1	1	1	1	1	1
Расходная норма, г/т	10	5	30	30	30	30	14	10
Степень обезвоживания, %	93	95,5	86	96	93,4	98	92	95
Остаточное содержание солей в обезвоженной нефти, мг/дм ³	<2	<2	67	51	39	20	<2	<2
Время разделения эмульсии, мин	60	60	60	60	180	180	120	120

Таким образом, разработана технология получения деэмульгатора на основе местных сырьевых ресурсов. В результате исследования синтеза деэмульгаторов выбраны оптимальные режимы производства. По техническим показателям деэмульгаторы соответствуют всем требованиям ГОСТ.

Список использованных источников

- 1 Каспарянц, К. С. Промысловая подготовка нефти / К. С. Каспарянц. – Москва : Недра, 1973. – 376 с.
- 2 Левченко, Д. Н. Эмульсии нефти с водой и методы их разрушения / Д. Н. Левченко, Н. В. Бергштейн, А. Д. Худякова, Н. М. Николаева. – Москва : Химия, 1967. – 200 с.
- 3 Позднышев, Г. Н. Стабилизация и разрушение нефтяных эмульсий / Г. Н. Позднышев. – Москва : Недра, 1982. – 224 с.
- 4 Обезвоживание и обессоливание нефти: Химическая энциклопедия / Ф. М. Хуторянский. – Москва : Научн. изд. Большая российская энциклопедия, 1992. – Т. 3. – С. 608–610.
- 5 Левченко, Д. Н. Технология обессоливания нефтей на нефтеперерабатывающих предприятиях / Д. Н. Левченко, Н. В. Бергштейн, Н. М. Николаева. – Москва : Химия, 1985. – 168 с.
- 6 Хуторянский, Ф. М. Комплексная программа подготовки нефти и химико-технологической защиты от коррозии конденсационно-холодильного оборудования установок первичной переработки нефти / Ф. М. Хуторянский и др. // Мир нефтепродуктов. – Москва – 2002. – №3. – С. 17–22.

Е. В. Воробьева¹, Е. Н. Волнянко²

¹г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

²г. Гомель, ИММС имени В. А. Белого

ТЕРМООКСИЛИТЕЛЬНАЯ СТОЙКОСТЬ ИНГИБИРОВАННОГО ПОЛИЭТИЛЕНА, НАПОЛНЕННОГО НАНОЧАСТИЦАМИ ОКСИДА ЖЕЛЕЗА

Особые свойства наноразмерных частиц позволяют создавать материалы с качественно новыми характеристиками, расширять области их применения. В представленной работе использовали наноразмерные частицы двойного оксида железа Fe₃O₄ или FeO·Fe₂O₃. Известно, что оксид железа (II, III) традиционно используют при создании электродов, в качестве наполнителей для композиционных материалов, поглощающих электромагнитные волны, в пищевой промышленности и медицине [1]. В настоящее время, благодаря ценовой

доступности и биосовместимости, наноразмерные частицы Fe_3O_4 нашли применение в магнитно-жидкостной гипертермии при лечении поврежденных клеток или для удаления патогенных микроорганизмов, для разрушения бактериальных биопленок [2], в качестве диагностических и терапевтических средств [3]. Значительное количество исследований посвящено созданию полимерных нанокомпозитов на основе полиэтилена, содержащих в качестве наполнителя наночастицы Fe_3O_4 . При действии переменного магнитного поля они обеспечивают локальный нагрев, что используется для создания теплопроводных и электропроводящих материалов. Предложенные учеными термоэмиссионные и автоэмиссионные модели композитов полиэтилен-оксид железа дают хорошее объяснение электропроводности в образцах, при этом доказано, что центры захвата в аморфной области полиэтилена высокой плотности играют важную роль в электропроводности композита [4, 5].

При создании композитов полиэтилен-оксид железа, безусловно, встает вопрос об их термоокислительной стойкости. Известно, что железо и его соединения, являются активными катализаторами процесса окисления полиэтилена [6, 7], а температура многократно ускоряет течение всех каталитических реакций. Обычно ингибирование процессов окисления обеспечивается введением антиокислительных добавок или антиоксидантов, однако термоокислительная стойкость конечного композита может изменяться не аддитивно, вследствие антагонистических и синергических эффектов. Кроме того, малопредсказуемо поведение антиоксидантов при воздействии ультразвука, который применяется при распределении наночастиц в композите. Поэтому цель работы – исследование термоокислительной стойкости полиэтилена, наполненного наночастицами оксида железа и содержащего антиоксидант фенольного типа.

В исследованиях применяли порошкообразный полиэтилен высокой плотности (ГОСТ 16338, марка 20308-005), антиоксидант фенольного типа ирганокс 1010 (эфир 3,5-дитретбутил-4-гидроксифенилпропионовой кислоты и пентаэритрита), и наноразмерный порошок Fe_3O_4 (размер частиц 20–30 нм, чистота 99 %). Полимерные композиции получали путем приготовления точных навесок порошка полиэтилена, антиоксидантов и нанонаполнителей. С целью равномерного распределения наночастиц в полимерной матрице применяли ультразвуковое облучение частотой 20 кГц в течение 3 минут на установке УЗДН -1-1УЧ.2. После испарения растворителя (аcetона) композицию еще раз перемешивали и получали пленочные образцы методом термического прессования.

Термоокислительную стойкость оценивали методом ИК-спектроскопии, исследуя контрольную полосу поглощения 1720 см^{-1} , и характеризовали величиной продолжительности индукционного периода окисления (ИПО) полимера при термовоздействии. ИК-спектры снимали на ИК-Фурье-спектрофотометре Vertex 70, расчет площадей полос поглощения вели по методу базовой линии, используя для этого стандартный пакет программ OPUS 7.0.

Результаты исследований представлены графически на рисунке 1. Полиэтиленовая пленка, содержащая только антиоксидант ирганокс 1010 характеризуется достаточно высокой термоокислительной стойкостью, ее ИПО составляет 31–32 часа (рисунок 1, кривая 1). Аналогичный полимерный образец содержащий антиоксидант, но полученный без воздействия ультразвука характеризуется примерно таким же по продолжительности ИПО.

Образцы с нанонаполнителем Fe_3O_4 и антиоксидантом ирганоксом 1010 имеют более низкую термоокислительную стойкость – ИПО пленок сокращается с 32 до 20–8 часов (рисунок 1, кривые 2–5). То есть нанонаполнитель, оксид железа, проявляет каталитическое влияние на окислительные превращения полиэтилена. С ростом концентрации нанонаполнителя ИПО композитов сокращается, коэффициент корреляции Пирсона между этими показателями составляет -0,94544. Тем не менее, образец, содержащий 1 % Fe_3O_4 , имеет ИПО почти в 10 раз выше, чем матричный полимер, имеющий значение ИПО 2 часа.

Таким образом, термоокислительная стойкость трехкомпонентных композитов полиэтилен-оксид железа-ирианокс1010 существенно зависит от концентрации нанонаполнителя в его составе, при концентрациях 1–10 % такая зависимость близка к линейной. Для нанокомпозитов полиэтилен-оксид железа по прежнему актуальным является поиск синергических эффектов и новых антиоксидантов, позволяющих дезактивировать каталитическое влияние металлсодержащего наполнителя.

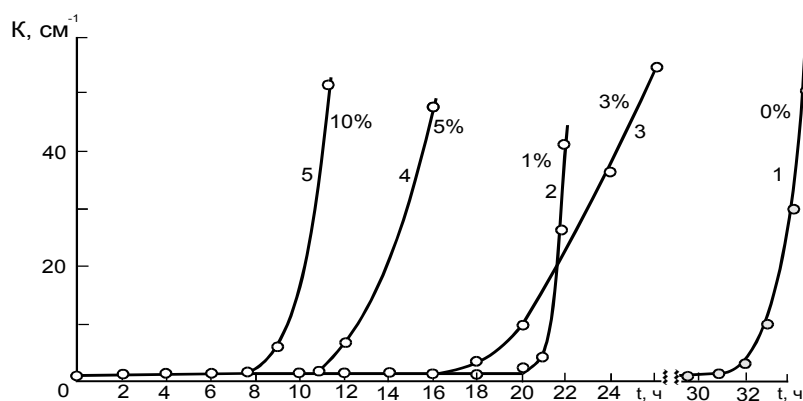


Рисунок 1 – Зависимость показателя экстинкции полосы поглощения 1720 см^{-1} $K_{1720}(\text{см}^{-1})$ в ИК-спектрах полиэтиленовых пленок, содержащих 0,1 % масс. Ирганокса 1010 и нанонаполнитель оксид железа (концентрация отмечена на кривых) от продолжительности термоокисления пленок t (ч) при 150 °C на подложках из KBr. Формирование образцов проводили при использовании ультразвука

Список использованных источников

- 1 Блайт, Э. Р. Электрические свойства полимеров / Э. Р. Блайт, Д. Блур. – Москва : ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – 376 с.
- 2 Reactive Extrusion Strategies to Fabricate Magnetite–Polyethylene Nanocomposites with Enhanced Mechanical and Magnetic Hyperthermia Properties / S. F. Situ, J Cao, C. Chen, E. C. Abenojar, J. M. Maia and A. C. Samia // *Macromol. Mater. Eng.* – 2016. – Vol. 301. – P. 1525–1536. doi:10.1002/mame.201600249
- 3 Structural effects on the magnetic hyperthermia properties of iron oxide nanoparticles / Eric C. Abenojar, Sameera Wickramasinghe, Jesbaniris Bas-Concepcion, Anna Cristina S. Samia // *Progress in Natural Science: Materials International.* – 2016. – Vol. 26, Issue 5. – P. 440–448.
- 4 Lee, S. H. The electrical properties of magnetite loaded polyethylene composites / S. H. Lee, G. Heo, K. H. Kim, J. S. Choi // *J. Appl. Polym.* – 1987. – Vol. 34. – P. 2537–2545. doi:10.1002/app.1987.0703407117
- 5 Transport properties of magnetite-high density polyethylene composites / K. H. Kim, S. H. Lee, G. Heo, J. S. Choi // *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* – 1987. – Vol. 48, Issue 10. – P. 895–901
- 6 Lin, D. G. Solid phase oxidation of polyethylene coatings on metals / D. G. Lin // *J. Appl. Polym. Sci.* – 1994. – Vol. 54. – P. 1789–1793. doi:10.1002/app.1994.070541201
- 7 Калнинь, М. М. О температурно-временной зависимости процесса образования адгезионной связи системы наполненный полиэтилен-сталь / М. М. Калнинь, Е. О. Метнидзе, В. П. Карливан // *Высокомолек. соед. Сер. А.* – 1971. – Т. 13, № 1. – С. 38–43.

В. И. Жукалов¹, В. А. Гольдаде², С. В. Зотов³

¹г. Гомель, Гомельский филиал УГЗ МЧС Беларуси

²г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

³г. Гомель, ИММС НАН Беларуси

СОРБЦИОННЫЕ СВОЙСТВА МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВОЛОКНИСТО-ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ ПОЛИПРОПИЛЕНА

Для борьбы с крупномасштабными разливами нефти и нефтепродуктов применяются различные технологии. Одним из эффективных методов ликвидации последствий разливов нефти и нефтепродуктов является применение специальных сорбционных материалов.

Нетканый волокнисто-пористый материал из полипропилена обладает высокой сорбционной способностью по отношению к нефтепродуктам, что обусловлено физико-химическим сродством полипропилена к углеводородам [1]. Полученные методом пневмоэкструзии (mel-tblowing) полимерные волокнистые материалы обладают уникальным сочетанием свойств, благодаря чему применяются при фильтрации многофазных сред от загрязнений. К настоящему времени достигнут некоторый предел технологических возможностей по обеспечению уровня свойств этих материалов. Поэтому модифицирование волокон с тем, чтобы повысить эксплуатационные характеристики волокнистых фильтров, сорбентов и других технических изделий, является актуальной задачей [2].

Известно существование в полимерных пневмоэкструзионных материалах явления электрической поляризации за счет интенсивного термоокисления формирующихся волокон в процессе распыления расплава. Обработка последних в физических полях усиливает это явление [3, с. 126–133], особенно в окисленном поверхностном слое волокон.

Для оценки взаимосвязи поляризационных эффектов в волокнах, получаемых на пневмоэкструзионной установке из гранулированного полипропилена марки Borealis, были изготовлены исходные неполяризованные и поляризованные образцы волокнисто-пористого материала с диаметром волоком 1–5 мкм. Поляризованные образцы материала модифицировали на стадии диспергирования расплава в отрицательном и положительном поле коронного разряда с напряженностью 25 кВ/см. В результате поляризации на волокнах материала формировался электретный заряд с эффективной поверхностной плотностью $\sigma_{эф} = 15 - 20$ нКл/см². Неполяризованные и поляризованные образцы материала дополнительно обрабатывали в низкотемпературной кислородной плазме тлеющего разряда с частотой 35 кГц.

Изучение поровой структуры волокон образцов материала проводили методом растровой электронной микроскопии на микроскопе VEGA II LSH Tescan.

Для изучения сорбционной и удерживающей способности волокнисто-пористых материалов образец размерами 110x20x15 мм выдерживали в течение 10 минут в емкости с дизельным топливом для заполнения пор образца и удаления пузырьков воздуха. Заполненный жидкостью образец подвешивали на штативе 2, установленном на весах 3, соединенных с компьютером (рисунок 1). В качестве сорбируемой жидкости использовалось дизельное топливо марки ДТ-Л-К5.

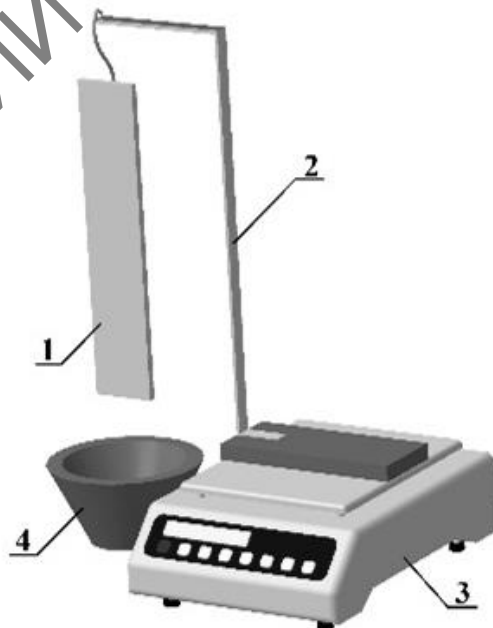


Рисунок 1 – Схема испытательного стенда:

1 – испытуемый образец материала; 2 – штатив; 3 – электронные весы, подключённые к компьютеру; 4 – емкость с дизельным топливом

Текущую массу образца, измеряемую весами, фиксировали с помощью специализированного программного обеспечения и записывали в файл. Далее проводили математическую обработку полученных данных.

На основании проведенных экспериментов строили графики зависимости снижения массы образцов от времени (рисунок 2).

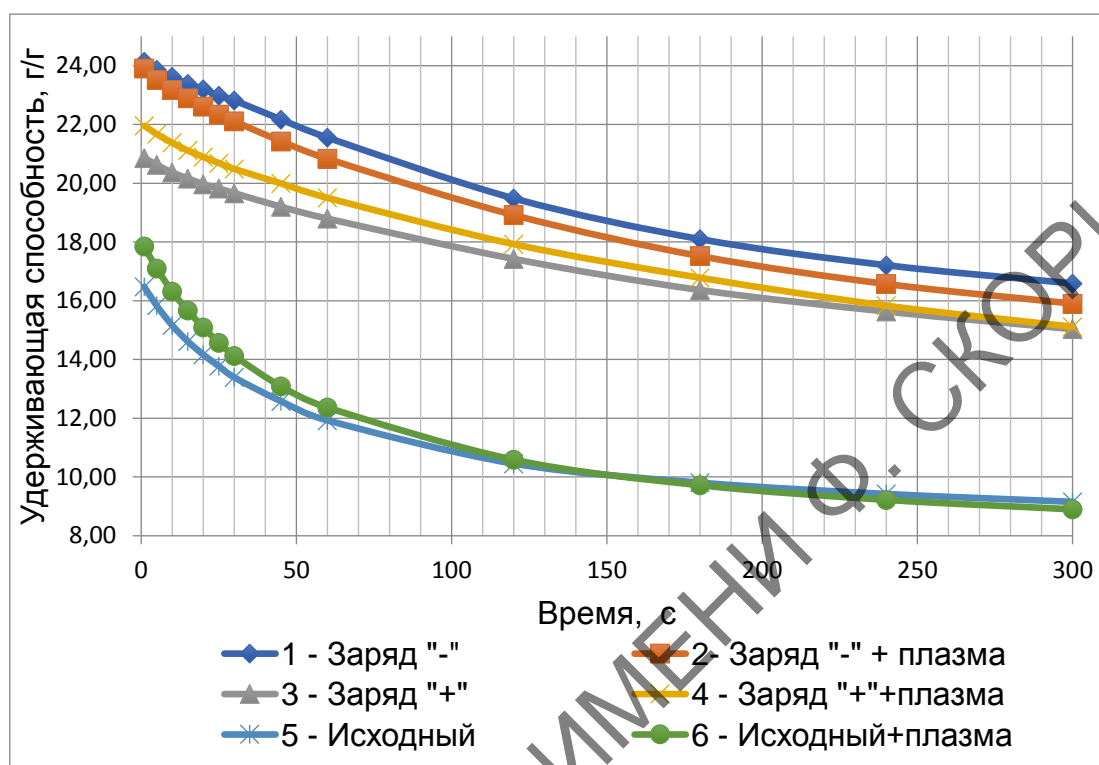


Рисунок 2 – График зависимости снижения удерживающей способности образцов по дизельному топливу от времени:

- 1 – образец, сформированный в поле отрицательного разряда;
- 2 – образец, сформированный в поле отрицательного разряда и обработанный в плазме;
- 3 – образец, сформированный в поле положительного разряда;
- 4 – образец, сформированный в поле положительного разряда и обработанный в плазме;
- 5 – исходный образец;
- 6 – исходный образец, обработанный в плазме.

Из графиков видно, что лучшей сорбционной и удерживающей способностью к дизельному топливу обладает образец полимерного волокнисто-пористого материала 1, обработанный в поле отрицательного коронного разряда, причем дополнительная обработка образца в низкотемпературной плазме практически не влияет на удерживающую способность (кривая 2).

Более выражено снижение удерживающей способности во времени (примерно в первые 30 секунд) образцов 5 и 6, в отличие от образцов 1–4, демонстрирующих плавное снижение веса на всем протяжении эксперимента. Такая зависимость по снижению веса у 1–4 образцов свидетельствует о влиянии поляризации на удерживающую способность волокнисто-пористых материалов.

Исходя из данных рисунка 2 видно, что образцы 1–4 волокнистого материала из полипропилена, полученные в поле отрицательного и положительного коронного разряда обладают лучшими свойствами по удерживанию в своем объеме дизельного топлива. Так же на рисунке 2 видно, что образцы 2, 4 и 6, обработанные в кислородной плазме, имеют несколько худшее значение удерживающей способности по сравнению с исходными образцами 1, 3 и 5 соответственно.

Для дальнейшего изучения электретных свойств образцов волокнисто-пористого материала использовали метод электретно-термического анализа с получением спектров термостимулированных токов (ТСТ). Спектры ТСТ (рисунок 3) иллюстрируют специфическую картину деполяризации образцов.

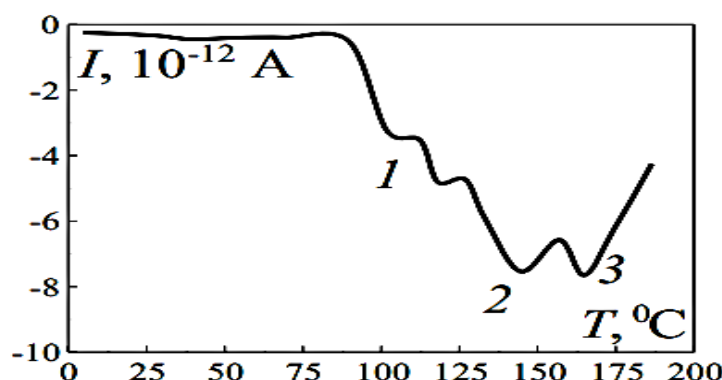


Рисунок 3 – Области деполяризации (1, 2 и 3) на характерном спектре термостимулированного тока волокон из полипропилена

В температурном диапазоне до 100 °С не наблюдается токовых пиков, отвечающих за высвобождение заряда. Однако после 100 °С происходит медленный, слегка ступенчатый рост тока отрицательной полярности до величины примерно 7 пА около 150 °С, т. е. при температуре на 15 °С ниже температуры плавления кристаллической фазы полипропилена, пик которого (близкий по интенсивности) фиксируется при 165 °С. Можно выделить последовательные процессы:

- 1) ступенчатая релаксация зарядов, связанных с окисленными группами поверхностного слоя волокон;
- 2) экстремальное завершение этой релаксации;
- 3) релаксация всех оставшихся зарядов.

Спектры волокон, подвергнутых разным видам модифицирования, демонстрируют отличия в количестве локальных экстремумов процесса (1) и в сравнительной величине пиков (2) и (3) на рисунке 3. Таким образом, модифицирование полипропилена специфически влияет на перераспределение зарядов в окисленном поверхностном слое волокон. Электретный заряд, существующий в различных формах, будет особым образом реагировать на любые поляризующиеся (диэлектрические) объекты. Это создает предпосылки для формирования в волокнисто-пористом материале многоуровневой фильтрующе-сорбирующей среды.

Заключение

Таким образом, метод модифицирования материалов в поле отрицательного коронного разряда является предпочтительным при изготовлении волокнисто-пористых сорбционных материалов. Выявленные закономерности обрисовывают перспективу повышения эффективности полимерных волокнисто-пористых материалов в качестве сорбентов нефти и нефтепродуктов. Очевидна и практическая значимость применения подобных материалов:

- при решении задач МЧС (сорбция некоторых фракций нефти);
- в инженерной экологии (фильтрация жидкостей от загрязнений диэлектрической природы) [3, с. 126–133];
- при мероприятиях по радиационной безопасности (фильтрация воздуха от содержащей радиоактивные частицы ионизированной пыли);
- в пищевой индустрии (очистка растительных масел, являющихся диэлектрическими средами с поляризованными компонентами) [4];
- в медицине и биологии (целевое разделение биологических жидкостей, содержащих диэлектрические и/или электретные компоненты).

Список использованных источников

1 Goldade, V. Fibrous sorbents for gathering of oil and petroleum products. ISJ / V. Goldade, V. Zhukalov, S. Zotov // Theoretical & Applied Science. – 2018. – Vol. 62, № 6. – P. 139–149. Doi: <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.06.62.26>. Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-62-26>

2 Бобрышева, С. Н. Комбинированный сорбент нефти и нефтепродуктов на основе полимерного волокнистого melt-blown материала / С. Н. Бобрышева, М. М. Журов, В. И. Жукалов // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2017. – №4. – С. 90–96.

3 Кравцов, А. Г. Полимерные волокнистые фильтры для преодоления экологических последствий чрезвычайных ситуаций / А. Г. Кравцов, С. А. Марченко, С. В. Зотов, под общ. ред. А. Г. Кравцова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 279 с.

4 Кадолич, Ж. В. Иллюстрация возможностей метода электротно-термического анализа при исследовании растительных масел / Ж. В. Кадолич, С. В. Зотов // Стандартизация. – 2018. – № 4. – С. 61–68.

А. В. Киселёв

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ВНЕДРЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В АВТОМАТИЗИРОВАННУЮ СИСТЕМУ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА ЛЕСНЫХ МАССИВОВ

Постоянный мониторинг лесного массива на наличие источников дыма и огня является первостепенной задачей для раннего обнаружения ландшафтных пожаров и обеспечения экологической безопасности населения особенно в зоне отчуждения Чернобыльской АЭС и других радиоактивно загрязненных территориях. В настоящее время широкое распространение получили автоматизированные системы мониторинга, которые обеспечивают автоматическое распознавание признаков возникновения пожара по информации с видеокamer с помощью специальных программных детекторов дыма и огня с выдачей тревожных сообщений на пульт оператора [1, 2]. Для подтверждения оператором обнаруженных автоматизированными системами потенциально опасных объектов требуется дальнейшее детальное обследование территории возможных очагов возгорания. Как правило, операторы таких систем вынуждены отправлять наземный служебный транспорт для поиска и установления точных GPS координат очагов возгорания. Однако, при работе наземной техники в лесных массивах не всегда есть возможность организации подъездных путей, что существенно увеличивает время по обнаружению и реальной оценки сложившейся пожароопасной ситуации, для принятия оперативных мер по ее ликвидации.

С целью усовершенствования автоматизированных систем мониторинга, уменьшения времени по поиску и оценке пожароопасной ситуации, скорейшему обнаружению лесных пожаров и снижению нагрузок на персонал лесной отрасли необходимо обеспечить дополнительный дистанционный контроль с возможностью оперативного облета подконтрольной территории с помощью беспилотных летательных аппаратов (БПЛА или квадрокоптеров). Таким образом, был предложен принцип интеграции БПЛА [3, 4]. Как правило, все современные автоматизированные системы экологического мониторинга работают по принципу клиент-серверных Интернет приложений, а информацию собирают и обрабатывают с помощью скоростных управляемых IP видеокamer. Соответственно, использование современных клиент-серверных Интернет приложений и основного транспортного протокола TCP/IP позволяет без особых сложностей интегрировать БПЛА в систему. Такая интеграция предоставляет дополнительные возможности оператору по управлению, сбору и обработке данных о состоянии лесного массива в режиме реального времени с оперативной передачей фото- и видеоинформации на пульт управления, используя современные IP технологии. На Рисунке 1 приведен пример обнаружения очага возгорания с помощью IP камеры на пульте оператора.

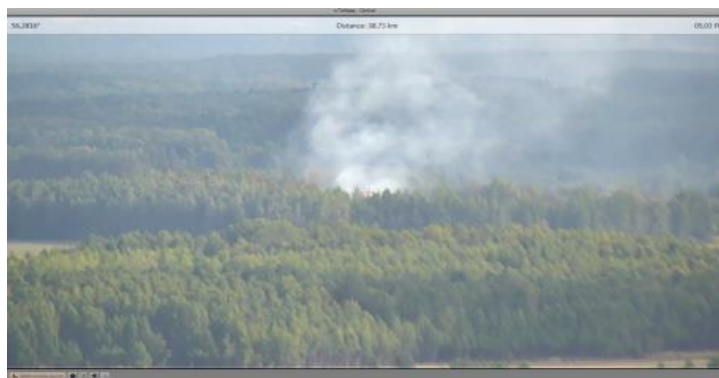


Рисунок 1 – Изображение очага возгорания на мониторе пульта управления

Информация со всех камер БПЛА передается на сервер со специализированным ПО для автоматизированной обработки данных. Видеоизображения, заснятые в режиме облета контролируемой территории, сохраняются в архиве на жестких дисках сервера и доступны в любой момент к просмотру оператором. Фотосъемка также передается и накладывается отдельным слоем на любую открытую и общедоступную карту из геоинформационных систем (Рисунок 2).



Рисунок 2 – Пример облета БПЛА контролируемой территории с уточнением GPS координат и возможностью подсчета площади очага поражения

Интеграция БПЛА в автоматизированные системы мониторинга и экологического контроля с использованием современных технологий компьютерного зрения, ГИС-технологий, технологий распределенных вычислений, клиент-серверных Интернет-технологий, является важной составной частью комплекса мер по охране лесов от пожаров. Использование таких интегрированных систем существенно увеличат скорость обнаружения и точность определения GPS координат, а также позволяет оперативно рассчитать площади возгораний, что на практике позволит уменьшить время, трудовые, материальные и финансовые затраты на мероприятия по локализации и ликвидации лесных пожаров, снизить экономический и экологический ущерб от случайных и сезонных возгораний.

Существенным положительным эффектом от интеграции БПЛА в автоматизированные системы мониторинга является снижение дозовой нагрузки на работников лесного хозяйства, осуществляющих противопожарное патрулирование территории с помощью наземного транспорта, а также улучшение качества контроля доступа населения на участки лесного фонда в пожароопасный сезон.

Список использованных источников

1 Ипатов, Ю. А. Проектирование распределенной наземной системы мониторинга за лесными пожарами / Ю. А. Ипатов, А. В. Кривецкий, В. О. Шмакин // Кибернетика и программирование. – 2013. – № 2. – С. 20–28. DOI: 10.7256/2306-4196.2013.2.8309. – Режим доступа : http://e-notabene.ru/kp/article_8309.html. – Дата доступа : 0808.09.2020.

2 Кудрин, А. Ю. Современные методы обнаружения и мониторинга лесных пожаров / А. Ю. Кудрин, Л. И. Запорожец, Ю. В. Подрезов // Технологии гражданской безопасности. – 2006. – №4 (10) – С. 66–67. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/sovremennye-metody-obnaruzheniya-i-monitoringa-lesnyh-pozharov>. – Дата доступа : 24.07.2020.

3 Многоцелевой авиационный комплекс мониторинга, предупреждения и защиты от стихийных бедствий на базе беспилотного летательного аппарата «нарт» / М. Т. Абшаев, А. М. Абшаев, М. А. Анаев, В. В. Соловьев, С. И. Шагин // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2011. – №3(113). – С. 229–238. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogotselevoy-aviatsionnyy-kompleks-monitoringa-preduprezhdeniya-i-zaschity-ot-stihiynyh-bedstviy-na-baze-bespilotnogo-letatel'nogo>. – Дата доступа : 15.09.2020.

4 Шепелёва, И. С. Видеомониторинг – один из способов обнаружения лесных пожаров / И. С. Шепелёва // Лесохозяйственная информация. – 2015. – № 4. – С. 46–50. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/videomonitoring-odin-iz-sposobov-obnaruzheniya-lesnyh-pozharov>. – Дата доступа : 04.10.2020.

**Я. А. Косенок¹, О. И. Тюленкова¹, В. Е. Гайшун¹, Т. А. Савицкая²,
И. М. Кимленко², И. А. Старостенко³**

¹Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

²Минск, БГУ

³Гомель, ОАО «Гомельстройматериалы»

РАЗРАБОТКА НОВЫХ ГИДРОФОБИЗИРУЮЩИХ ЭМУЛЬСИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЛУЧШЕННЫМИ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Введение

В последние десятилетия во всем мире активно ведутся работы по улучшению качества и расширению номенклатуры теплоизоляционных материалов, поскольку их использование является одним из наиболее эффективных путей сокращения потерь тепла через ограждающие конструкции зданий, сооружений и промышленного оборудования. Известны два основных пути решения данной проблемы: модификация минерального волокна (например, получение сверхтонкого волокна) или модификация связующего с целью улучшения адгезии к волокнистой массе и т. п. [1]. В настоящее время наиболее используемым связующим по-прежнему остается фенолформальдегидная смола (ФФС), несмотря на то что для производства теплоизоляционных материалов предложен ряд альтернативных экологически безопасных связующих [2, 3]. Модификация ФФС направлена как на снижение содержания летучих органических веществ, повышение стабильности во времени и при высоких температурах [3], так и на улучшение адгезионных свойств. Один из способов модификации связующего на основе ФФС – введение в его

состав полиметилсилоксановой жидкости (ПМС) в виде эмульсии. Преимуществом использования ПМС является широкий диапазон рабочих температур от $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $+300\text{ }^{\circ}\text{C}$, при которых она сохраняет стабильность, в том числе и по таким показателям, как вязкость и сжимаемость [4, 5]. Однако ее эмульсии, полученные классическим методом диспергирования в воде, не обладают достаточной стабильностью, что затрудняет их использование. Традиционно применяемые для стабилизации эмульсий типа «масло в воде» низкомолекулярные поверхностно-активные вещества, как и диоксид кремния, не способны стабилизировать эмульсии ПМС в течение длительного времени [5, 6]. В работе [7] описано использование комбинации твердых частиц и полимеров для эффективной стабилизации эмульсий силиконового масла в воде. С нашей точки зрения, наибольший интерес в качестве полимерного компонента для стабилизации эмульсий представляет гидроксиэтилцеллюлоза (ГЭЦ) [8], которую из-за особенностей химического строения можно отнести к неионогенным поверхностно-активным веществам. Основными достоинствами ее применения являются экологическая безвредность, обусловленная полным биологическим разложением в окружающей среде, и хорошая растворимость в воде. Тем не менее анализ литературы показывает, что стабилизация ПМС добавками ГЭЦ, особенно в сочетании с диоксидом кремния, изучена недостаточно.

1. Материалы и методика эксперимента

Для получения эмульсий были использованы следующие химические вещества: силиконовое масло; полидиметилсилоксан (ПДМС-200); SiO_2 – водная суспензия наночастиц аэросила ОХ-50 (СПС-54, 16 масс. %); гидроксиэтилцеллюлоза (ГЭЦ); бидистиллированная вода. Оптимальное мольное соотношение составило: СПС-54: ПДМС – 5:1.

Стадии получения гидрофобизирующей эмульсии включают добавление силиконового масла и ультразвуковое диспергирование. Использование ультразвукового диспергирования на стадии образования водной эмульсии ПДМС-200 позволило предотвратить фазовое разделение системы ПДМС – SiO_2 – ПАВ. ПДМС-200 – полидиметилсилоксан, органо-неорганический полимер, не растворяющийся в воде и полярных органических растворителях, обладающий поверхностной активностью и способностью понижать поверхностное натяжение воды. Составы на его основе безопасны для окружающей среды и здоровья человека, поскольку ПДМС-200 не токсичен и не ядовит, не пожаро- и не взрывоопасен, трудногорюч (воспламеняется при температуре выше $300\text{ }^{\circ}\text{C}$). Наиболее стабильная эмульсия образуется при добавлении гидроксиэтилцеллюлозы при соотношении компонентов 1:0,045. Образующаяся система может быть отнесена к типу многофазных эмульсий.

Для приготовления раствора связующего смешивают смолу с гидрофобизирующей эмульсией и остальными компонентами в необходимых пропорциях. Смесь из расходных баков поступает в объемные дозаторы, затем в промежуточный бак с мешалкой, далее в расходный бак с мешалкой, откуда по трубопроводу с помощью насосов раствор связующего подается для нанесения его на минеральные волокна.

Испытания разработанной гидрофобизирующей эмульсии проведены в производственных условиях ОАО «Гомельстройматериалы».

2. Обсуждение результатов

Одним из важнейших свойств дисперсных систем является их устойчивость. Устойчивость гидрофобизирующей эмульсии на основе SiO_2 характеризуется временем ее жизни в практически неизменном состоянии. Наибольшее теоретическое и практическое значение имеет седиментационная устойчивость, которая характеризует способность системы к равномерному распределению частиц по всему объему системы. Коллоидные системы, особенно лиозоли, имеющие частицы малого размера, обладают достаточно высокой седиментационной устойчивостью [9].

Седиментация, возникающая за счёт силы тяжести, является формой неустойчивости при хранении эмульсий. Благодаря этому на дне контейнера формируется очень концентрированный вязкий слой. В некоторых случаях появляется отчетливо различимый граничный слой, между двумя слоями жидкости, что является подтверждением формирования коацервата [10].

Для выбора наиболее устойчивой гидрофобизирующей эмульсии для введения в состав связующего теплоизоляционных плит была исследована седиментация композиций с различным процентным содержанием аэросила ОХ-50 (рисунок 1).

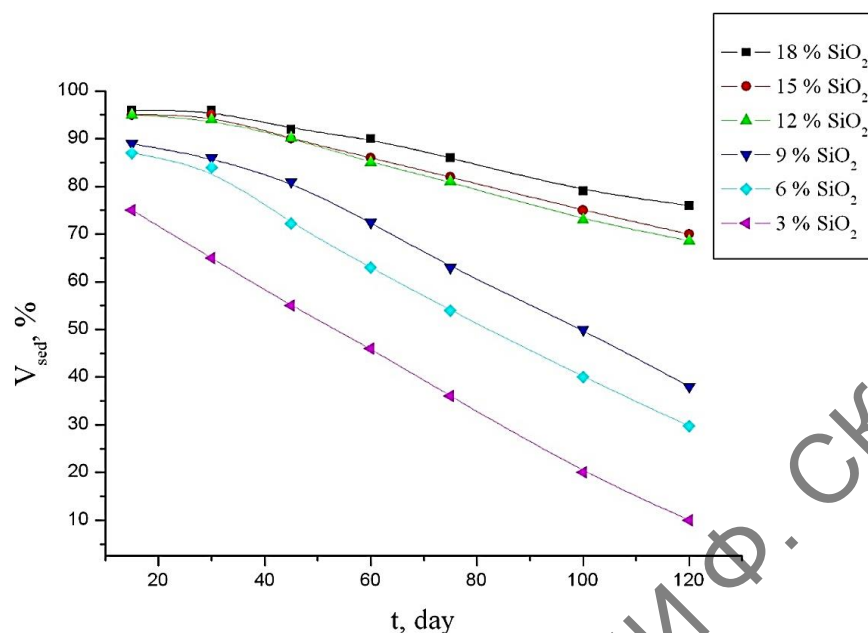


Рисунок 1 – Зависимость седиментационного объема от времени оседания для эмульсии при различных концентрациях SiO₂

В разбавленных эмульсиях на первом этапе оседают крупные агрегаты частиц, агломераты и grit, причём сохраняется непрозрачность (мутность) раствора над осадками после того, как их объёмы не изменяются во времени. Это указывает на то, что некоторая часть SiO₂ находится во взвешенном состоянии и в условиях постоянной разницы между плотностью дисперсной среды и плотностью эмульсии в системе установилось динамическое седиментационное равновесие, характерное для частиц коллоидных размеров [11]. В концентрированных (18 масс. % SiO₂) эмульсиях осадок формируется в результате оседания крупных агломератов и хлопьев с захватом мелких фракций частиц с одновременным уплотнением (оседанием) сплошной рыхлой коагуляционной структуры, происходящим с самого начала процесса, когда начинает фиксироваться чёткая верхняя граница эмульсии.

На ОАО «Гомельстройматериалы» проведены производственные испытания разработанной гидрофобизирующей эмульсии при добавлении её в раствор связующего плит минераловатных теплоизоляционных, исследованы характеристики плит минераловатных теплоизоляционных, изготовленных с использованием гидрофобизирующей эмульсии. По результатам исследований плотность образцов минераловатных плит составила 120–130 кг/м³, прочность на сжатие при 10 %-ной линейной деформации – 0,04 МПа, прочность на изгиб – 0,1 МПа. Водопоглощение всех образцов минераловатных плит составило не более 4 % по массе. Теплопроводность при температуре (298±5) К измеренных образцов минераловатных плит составила не более 0,04 Вт/(м·К).

Испытания образцов минераловатных плит на возгораемость на базе НПЦ Учреждения «Гомельское областное управление МЧС», для которых при приготовлении связующего использовалась разработанная эмульсия, позволили установить, что получаемые плиты относятся к группе негорючих материалов.

Заключение

Методика приготовления кинетически стабильных эмульсий полиметилсилоксановой жидкости, предназначенных для гидрофобизации связующего для теплоизоляционных материалов на основе фенолформальдегидной смолы, отличается использованием в

качестве стабилизатора композиции гидроксиэтилцеллюлозы и ультрадисперсного диоксида кремния. Совместное применение добавки и кремнийорганической жидкости приводит к образованию гидрофобной кремнийорганической системы, которая обеспечивает защиту материала от влаги, повышая срок службы и эксплуатационные свойства изделия.

Максимальная температура эксплуатации теплоизоляционных плит, для которых при приготовлении связующего использовалась разработанная эмульсия, возрастает с 600 оС до 700 оС.

Таким образом, разработанная новая гидрофобизирующая эмульсия при введении в состав связующего минераловатных плит повышает водоотталкивающие свойства теплоизоляционных изделий без повышения их горючести, а также повышает антистатические и водоотталкивающие свойства плит. Использование эмульсии позволит отказаться от дефицитных и дорогостоящих импортных компонент, применяемых в настоящее время в процессе производства минераловатных плит и повысить конкурентоспособность выпускаемой продукции.

Список использованных источников

1 Теплоизоляционные материалы и конструкции : учебник для средних профессионально-технических учебных заведений / Ю. Л. Бобров, Е. Г. Овчаренко, Б. М. Шойхет, Е. Ю. Петухова – Москва : ИНФРА-М, 2003. – 268 с.

2 Юнусов, Р. И. Обзор экологически чистых связующих для производства теплоизоляционных материалов / Р. И. Юнусов // Базальтовые технологии. – 2013. – № 1. – С. 64–67.

3 Новое связующее для минераловатных теплоизоляционных и огнезащитных материалов / А. Н. Левичев, П. М. Валецкий, Н. Г. Павлюкович, И. П. Сторожук // Полимерные материалы и технологии. – 2017. – Т. 3, № 1. – С. 78–81.

4 Kawaguchi, Masami Silicone oil emulsions stabilized by polymers and solid particles / Masami Kawaguchi // Advances in Colloid and Interface Science. – 2016. – Vol. 233. – P. 186–199.

5 Стабилизация гидрофобизованной фенолформальдегидной смолы поверхностно-активными веществами / Т. А. Савицкая, И. М. Кимленко, В. Е. Гайшун, Я. А. Косенок // Свиридовские чтения : 8-я Международная конференция по химии и химическому образованию, Минск, 27–29 янв. 2011 г. : сб. тез. докл. ; редкол.: Т. Н. Воробьева, Е. И. Василевская – Минск : Krasico-Print, 2018. – С. 113.

6 Sugita, N. Rheological and interfacial properties of silicone oil emulsions stabilized by silica particles / N. Sugita, S. Nomura, M. Kawaguchi // J. Dispers. Sci. Technol. – 2008. – Vol. 29. – P. 931–936.

7 Suzuki, T. Effects of surface properties on rheological and interfacial properties of Pickering emulsions prepared by fumed silica suspensions pre-adsorbed poly(N-isopropylacrylamide) / T. Suzuki, C. Morishita, M. Kawaguchi // J. Dispers. Sci. Technol. – 2010. – Vol. 31. – P. 1479–1488.

8 Oil-in-water emulsions stabilized by hydrophobically modified hydroxyethyl cellulose: Adsorption and thickening effect / Wenbin Sun, Dejun Sun, Yunping Wei [et al.]. // J. Colloid Interface Sci. – 2007. – Vol. 311. – P. 228–236.

9 Урьев, Н. Б. Структурированные дисперсные системы / Н. Б. Урьев // Соровский образовательный журнал. – 1998. – № 6. – С. 42–47.

10 Айлер, Р. Химия кремнезёма / Р. Айлер. – Москва : Мир, 1982. – Ч. 2. – 1128 с.

11 Рузавин, И. Г. Изучение коллоидно-химических свойств водных дисперсий аэросила для разработки композиций химико-механического полирования полупроводников / И. Г. Рузавин, А. С. Артёмов // Химия, физика и технология модифицирования поверхности: авторефераты докладов Всеукраинской конференции с межд. участием. – Киев, 2009. – С. 188–189.

И. И. Кузьмар¹, Л. К. Кушнер¹, Д. Ю. Гульпа¹, А. М. Гиро¹, А. В. Левко¹,
Д. В. Жигулин²

¹ г. Минск, БГУИР

² г. Минск, ОАО «ИНТЕГРАЛ»

ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТАКТОВ

Введение. При изготовлении печатных плат к поверхности финишного покрытия предъявляются строгие требования. Они должны обладать способностью к смачиванию припоем и длительное время сохранять эту способность; покрытия компонентов и финишные покрытия печатных плат должны хорошо сочетаться, поскольку при пайке они находятся в одинаковых условиях по припою, по флюсу, по температурно-временным режимам [1].

Особенно это актуально при использовании технологий бессвинцового монтажа компонентов, поскольку смачиваемость бессвинцовых припоев несколько хуже. При серийном производстве, кроме хорошей сочетаемости покрытий компонентов и плат, немаловажным фактором является еще и стоимость покрытия, поскольку она может существенно повлиять на конечную стоимость партии электронных изделий. Поэтому, несмотря на достаточно большое разнообразие финишных покрытий сложно выбрать один вариант, соответствующий всем требованиям по стоимости, смачиваемости, долговременности [2].

Производителям печатных плат хорошо известны проблемы традиционных финишных покрытий оловом. Это миграционные процессы, связанные с диффузией меди и олова, образование интерметаллидов на границе медь-олово, рекристаллизация олова и, как следствие, рост дендридов, потеря паяемости после непродолжительного хранения [3].

С переходом на бессвинцовую технологию одним из перспективных материалов для электрических контактов и компонентов является сплав на основе олова *Sn-Ag-Cu*. Он проявляет функциональную эквивалентность эвтектическому сплаву *SnPb(Ag)*. Наиболее удачным для замены оловянно-свинцового припоя *Sn37Pb* является близкий по свойствам сплав *Sn3,8Ag0,7Cu*. Он применяется для пайки оплавлением при поверхностном монтаже элементов.

Процентное соотношение металлов в сплаве может быть разным – до сих пор нет строгого мнения по этому вопросу. Несмотря на это, большую часть в сплаве занимает олово (95–97 %). Температура расплавления данного сплава составляет 217–221°C. Чтобы он был пригоден для пайки волной, в него вводят небольшой процент сурьмы (0,5 %). Наличие в сплаве серебра улучшает механические свойства пайки. Тестами доказано, что припой, содержащий серебро, делает пайку более прочной, чем аналогичные свинецсодержащие. Кроме того, серебро обладает хорошей проводимостью. Такие сплавы применяются в промышленной электронике и системах связи, где механическая надёжность и качество соединения очень важно [4].

Экспериментальная часть. Проблема электрохимического получения трехкомпонентного сплава, содержащего олово, медь, серебро, в первую очередь обусловлена большой разницей их стандартных потенциалов. Для олова $E_0 = -0,141$ В, для меди $E_0 = 0,338$ В, для серебра $E_0 = 0,799$ В. Для получения сплава необходимо сблизить их, используя либо модификацию электролита, либо подобрав токовые режимы. Также существует возможность контактного выделения серебра и нестабильность электролита оловянирования по ионам олова – в растворе присутствует система Sn^{2+}/Sn^{4+} .

Опираясь на ранее проведенные исследования, проанализировав литературные источники и обобщив современные подходы к существующей проблеме, для электрохимического формирования бессвинцового трехкомпонентного сплава на основе олова опробовали несколько вариантов электролитов: исследования проводили из сернокислого электролита с тиомочевинной и с *AgNO* (рисунок 1а) и *K[Ag(CN)₂]* (рисунок 2), и пирофосфатных электролитов с *AgNO* (рисунок 1б) и *K[Ag(CN)₂]* (рисунок 1в) [5].

На рисунке 1 приведены РЭМ изображения поверхности электрохимических покрытий сплавами *Sn-Ag-Cu*, полученных из различных электролитов. Для исследований использовали растровый электронный микроскоп S-4800.

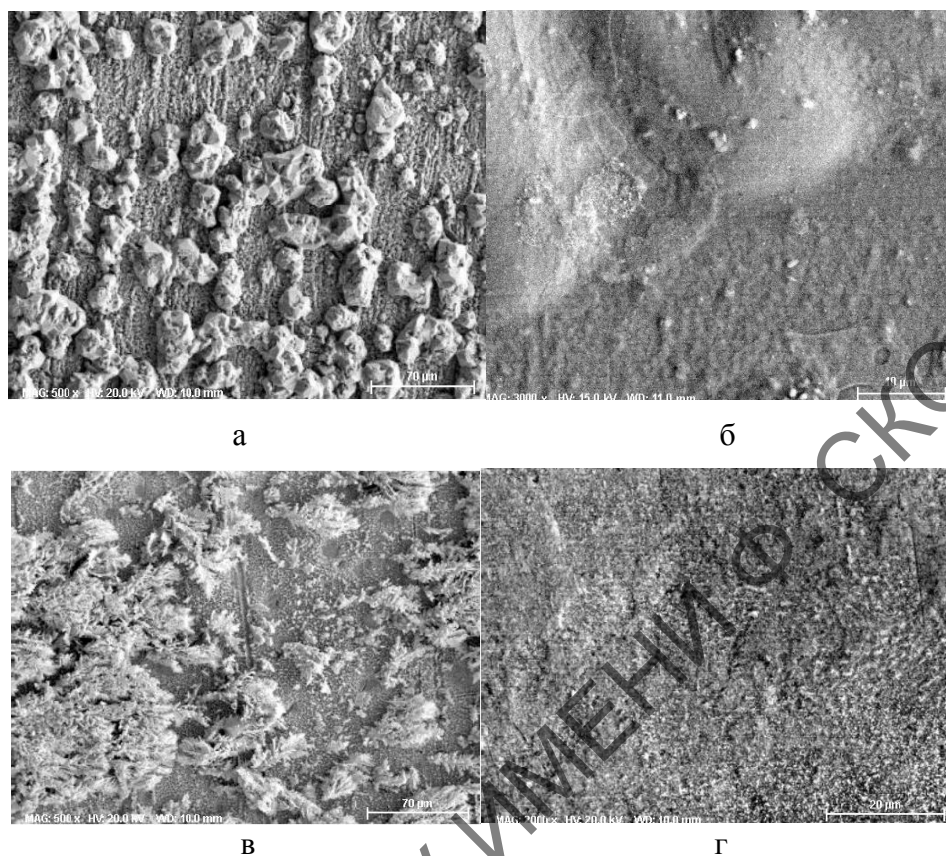


Рисунок 1 – РЭМ изображение поверхности электрохимических покрытий сплавами *Sn-Ag-Cu*, полученных из различных электролитов:

- а – сернокислый с тиомочевинной и $AgNO_3$,
- б – сернокислый с тиомочевинной и $KAg(CN)_2$,
- в – пиррофосфатный с $AgNO_3$, г – пиррофосфатный с $KAg(CN)_2$

Для снижения гидролиза и восстановления двухвалентного олова до четырехвалентного и повышения стабильности электролита в состав раствора ввели гидрохинон и оптимизировали содержание серной кислоты. Присутствие тиомочевины необходимо для стабилизации гальванической ванны. Тиомочевина адсорбируется на компонентах сплава с подавлением последующего соосаждения [6].

Проведенные исследования позволили оптимизировать состав электролита для электрохимического соосаждения сплава *Sn-Ag-Cu* с эвтектической композицией и равномерной поверхностью. Критериями оптимизации были следующие ограничения: избыток меди в сплаве понижает температуру плавления, а избыток серебра и меди существенно ухудшает его текучесть, что может привести к образованию микротрещин на этапе отверждения [3].

На рисунке 2 представлено распределение элементов олово и серебра (рисунок 2а) и серебра и меди (рисунок 2б) по поверхности покрытия. Исследования проводили рентгенофлуоресцентным методом на спектрометре ElvaX.

Наряду с модификацией состава гальванической ванны метод нестационарного электролиза доказал свою эффективность для управления состав, структурой, функциональными свойствами тонкопленочных материалов [4–5].

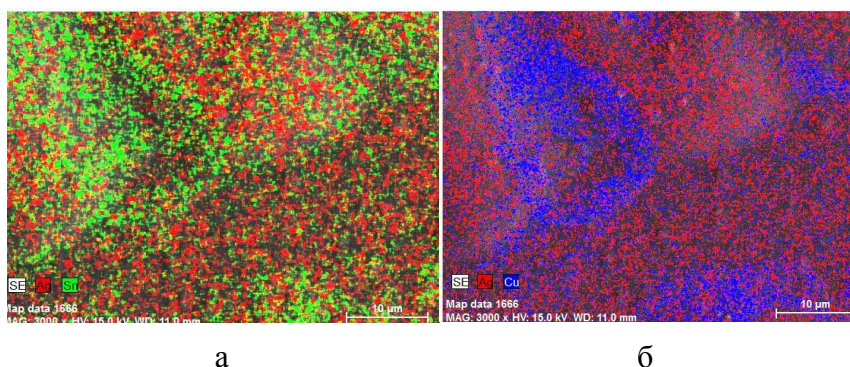


Рисунок 2 – Распределение элементов сплава по поверхности (олово и серебра (а) и серебра и меди (б)), полученное методом EDX на спектрометре ElvaX

Для реализации метода импульсного электролиза был разработан и изготовлен программно-аппаратный технологический комплекс, позволяющий вести процессы, как под управлением персонального компьютера, так и в автономном режиме (рисунок 3). В автономном режиме можно использовать одну из десяти программ, записанных в энерго-независимую память прибора.



Рисунок 3 – Программно аппаратный технологический комплекс

Возможности, заложенные в разработанное оборудование, позволили установить влияние амплитуды поляризующего тока, частоты импульсно-реверсированного тока, соотношения длительности прямого и обратного импульсов, чередования импульсов различной полярности на состав и морфологию поверхности электрохимического сплава. На рисунках 4, 4 и 5 представлены РЭМ изображения и результаты EDX-анализа покрытий, полученных при различных формах тока.

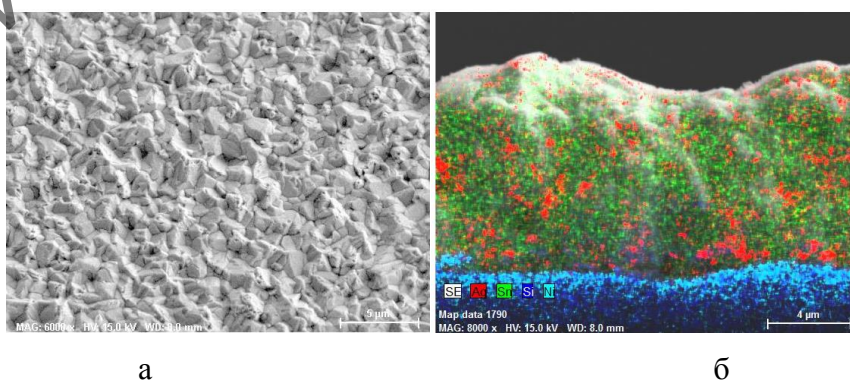


Рисунок 4 – РЭМ изображение поверхности (а) и распределения элементов на сколе (б) сплава Sn-Cu-Ag, полученного методом электрохимического осаждения при использовании реверсированного тока

Заключение. Поиск новых перспективных, альтернативных свинецсодержащим, покрытий под пайку, способов их получения, их комплексное изучение является актуальной задачей, так как позволит увеличить число эффективных методов управления свойствами тонких электрохимических систем металлизации и значительно расширит возможности специалистов при разработке новых бессвинцовых технологий.

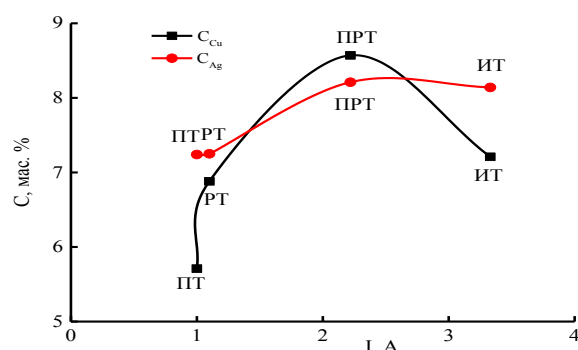


Рисунок 5 – Влияние условий электроосаждения (ПТ – постоянный ток, ИТ – импульсный ток, РТ – реверсированный ток, ПРТ – программноизменяемый ток) на распределение компонентов в сплаве Sn-Cu-Ag (исследования методом EDX)

Список использованных источников

- 1 Смертина, Т. Иммерсионное олово как финишное покрытие. Надежность – прежде всего! / Т. Смертина // Технологии в электронной промышленности. 2007. – № 4. – С. 16–19.
- 2 Барановский, И. Современный дизайн и технологии печатных плат: вопрос-ответ Финишные покрытия плат. Особенности применения / И. Барановский // CHIP NEWS Украина. – 2009, май. – № 4 (84) – С. 28–31.
- 3 Шкундина, С. Финишные покрытия под поверхностный монтаж современной элементной базы / С. Шкундина // Технологии. – 2011. – №2 (00031). – С. 150–160.
- 4 Кузьмар, И. И. Особенности формирования паяемых и стабильных при хранении покрытий сплавами на основе олова / И. И. Кузьмар, Л. К. Кушнер, А. А. Хмыля, В. К. Василец, А. М. Гиро, Д. Ю. Гульпа // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. – 2018. – Т. 18. – № 2. – С. 501–504.
- 5 Кузьмар, И. И. Электрохимическое формирование покрытий сплавом олово-медь-серебро / И. И. Кузьмар, Л. К. Кушнер, А. А. Хмыль, Т. Н. Воробьева, Д. Ю. Гульпа // Материалы докладов Международной научно-технической конференции «Современные электрохимические технологии и оборудование». – БГТУ, г. Минск, Республика Беларусь, 2019. – С. 365–369.
- 6 Ozga, P. Electrodeposition of Sn-Ag and Sn-Ag-Cu alloys from thiourea aqueous solutions / P. Ozga // Archives of metallurgy and materials. – 2006. – Issue 3. – Vol. 51. – P. 413–421.

Е. А. Кулеш

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ ГРАДИЕНТНЫХ ТИТАН-УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

Стабильно высокие эксплуатационные свойства поверхности упрочненных деталей и инструмента достигаются при определенных параметрах твердости основы и упрочняющего покрытия [1, с. 224]. При упрочнении поверхности твердыми алмазоподобными покрытиями происходит резкий переход от относительно мягкой инструментальной основы

к высокотвердому покрытию. Образование резкой границы изменения механических свойств, таких как микротвердость, коэффициент термического расширения, приводит к росту внутренних напряжений и, следовательно, активации процесса разрушения покрытия при возникновении контактного давления в процессе трения [2, с. 883]. Использование градиентных покрытий, реализующих плавное изменение структуры от мягкого к твердому, приводит к снижению эффектов, вызванных резким скачком механических свойств [3, с. 145].

При помощи метода конденсации в условиях ионной обработки и импульсного дугового метода были получены покрытия на основе углерода и титана с различным отношением атомов Ti и C. Также с целью изменения структуры и реализации плазмохимических реакций на стадиях роста и осаждения конденсация полученных покрытий происходила в среде молекулярного азота (парциальное давление азота в камере 10^{-2} Па) при следующих режимах осаждения:

1 Ti/a-C(5...20 Гц):Ti на подслое титана толщиной 120 нм осаждали нанокomпозиционные углерод-титановые слои, с увеличением частоты следования импульсов разряда углеродного источника от 5 до 20 Гц (шаг 5 Гц) и токе дугового испарителя 80 А с катодом из титана, что позволило осуществить изменения отношения C/Ti от 0,1 до 1,4;

2 Ti/a-C(5...20 Гц):Ti/a-C – отличие от образца Ti/a-C(5...20 Гц):Ti в наличие верхнего слоя a-C;

3 Ti/a-C(5...20 Гц):Ti:N₂/a-C:N₂ – осаждение Ti/a-C(5...20 Гц):Ti/a-C покрытия осуществляли в среде молекулярного азота.

Микротвердость покрытий измерялась с помощью микротвердомера DM-8 с использованием алмазного индентора Кнупа. Твердость оценивалась при различных нагрузках на индентор (рисунок 1). На основе диаметра отпечатка d и соотношения геометрических параметров, характерных для индентора Кнупа, были проведены расчёты глубины вдавливания h индентора в покрытие, нанесенное на кремниевую подложку (таблица 1).

Таблица 1 – Оценка глубины вдавливания h индентора (по Кнупу) в градиентное углеродное покрытие

Нагрузка, мН	Режимы формирования и конструкция покрытия					
	Ti/a-C(5...20 Гц):Ti		Ti/a-C(5...20 Гц):Ti:N ₂ /a-C:N ₂		Ti/a-C(5...20 Гц):Ti/a-C	
	d, мкм	h, мкм	d, мкм	h, мкм	d, мкм	h, мкм
98,1	12,31	0,43	11,55	0,40	11,25	0,39
245,2	18,45	0,64	17,01	0,59	17,39	0,61
490,3	27,18	0,95	24,43	0,85	25,18	0,88
980,7	39,79	1,39	36,62	1,28	37,34	1,30

Как видно из данных, приведенных в таблице 1, глубина вдавливания индентора, превышает толщину покрытия (по данным СЭМ толщина покрытий не превышала 450 нм), поэтому микротвёрдость в данном случае определялась как композиционная микротвердость системы «покрытие-подложка».

На рисунке 1 приведена зависимость микротвёрдости покрытий от нагрузки на индентор. Изменяя величину нагрузки можно косвенным методом определить зависимость микротвёрдости от толщины покрытия.

Из анализа данных рисунка 1 следует, что максимальная твердость для градиентных покрытий характерна при нагрузке 245,2 мН. При более высокой твердости происходит прокалывание верхнего углеродного слоя с высоким содержанием sp³-фазы, что приводит к снижению значений микротвердости. При низкой нагрузке 98,07 мН характерно минимальное значение микротвердости, на измеряемые значения которой оказывает влияние верхний поверхностный слой (главным образом, наличие в нем оксидов).

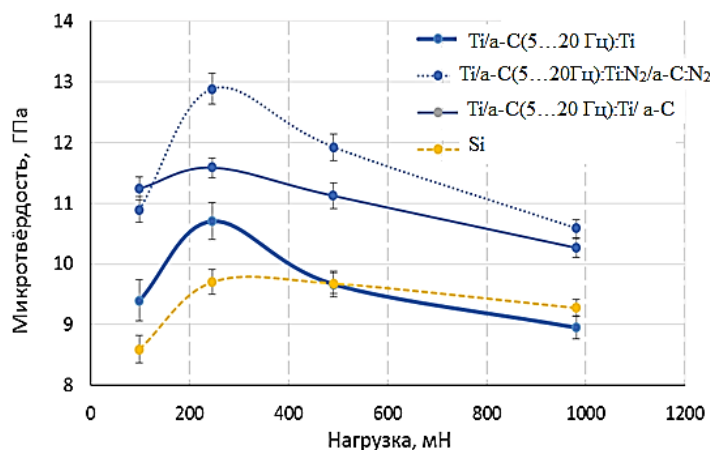


Рисунок 1 – Зависимость микротвердости градиентных покрытий от величины нагрузки при индентировании

При введении в покрытие титана и азота происходит увеличение микротвердости покрытий, полученных при различной нагрузке, что свидетельствует об образовании слоев нитрида титана и карбонитрида в объеме покрытия. Для покрытия Ti/a-C(5...20 Гц):Ti характерно снижение микротвердости с ростом нагрузки, что свойственно для композиционных титан-углеродных покрытий [4, с. 4]. Такое снижение микротвердости определяется наличием металлической фазы титана в покрытии, а также наличием соединений оксида титана в поверхностном слое покрытия.

С целью определения неоднородности механических свойств градиентных покрытий были проведены исследования микротвердости по поверхности образца при нагрузке на индентор 245,2 мН, при которой микротвердость покрытия максимальна.

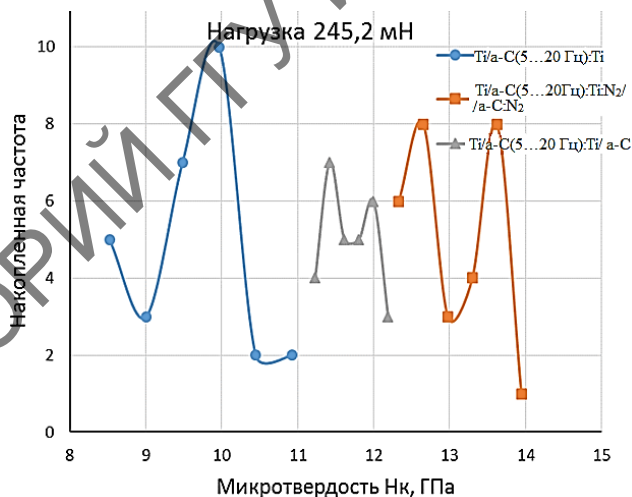


Рисунок 2 – Распределение значений твёрдости градиентных покрытий, полученных при нагрузке 245,2 мН

При легировании титаном на кривой распределения числа измерений по значению твердости (рисунок 2) существует только один максимум, который определяет значения микротвердости, характерные для карбида титана. Такое распределение означает высокую однородность поверхности Ti/a-C(5...20 Гц):Ti покрытия и свидетельствует о преимущественном формировании в объеме покрытия соединений типа TiC. Для покрытий Ti/a-C(5...20 Гц):TiN₂/a-C:N₂ и Ti/a-C(5...20 Гц):Ti/a-C на кривой распределения значений микротвердости характерно наличие двух максимумов, которые можно соотнести со значениями микротвердости чистого углеродного слоя (~12,5 ГПа), карбида

титана (~11,5 ГПа) (для Ti/a-C(5...20 Гц):Ti/a-C покрытия) и фазы Csp^3-N/TiN (для покрытия Ti/a-C(5...20Гц):Ti:N₂/a-C:N₂). Высокие значения твердости покрытия Ti/a-C(5...20Гц):Ti:N₂/a-C:N₂ объясняются наличием фазы нитрида титана: на их поверхности образуется твердый карбидный слой, формирование которого возможно при взаимодействии микрокапель титана с термически активированными атомами углерода на стадии совместного осаждения [5, с. 31].

Таким образом, максимальные значения микротвёрдости (12,8 ГПа) характерны для градиентных покрытий, легированных азотом и титаном, что обусловлено протеканием химических реакций в процессе синтеза покрытий, приводящих к образованию фазы нитрида титана.

Список использованных источников

1 Siegman, S. The role of nano-particles in the field of thermal spray coating technology / S. Siegman, M. Leparoux, L. Rohr // Materials of the Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. – Dublin, 2005. – P. 224–231.

2 Cherradi, N. Worldwide trends in functional gradient materials research and development / N. Cherradi, A. Kawasaki, M. Gasik // Composites Engineering. – 1994. – Vol. 4. – P. 883–894.

3 Study of the mechanical properties of tetrahedral amorphous carbon films by nanoindentation and nanowear measurements / E. Martinez [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2001. – Vol. 10. – P. 145–152.

4 A strategy for increased carbon ionization in magnetron sputtering discharges / A. Aijaz [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2012. – Vol. 23. – P. 1–4.

5 Microstructure, mechanical and tribological characterization of 300 CrN/DLC/Cr DLC multilayer coating with improved adhesive wear resistance / X. Sui [et al.] // Applied Surface Science. – 2018. – Vol. 439. – P. 24–32.

Е. А. Кулеш¹, В. А. Емельянов², Н. Н. Федосенко¹

¹г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

²г. Минск, ОАО «Интеграл»

ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ПОКРЫТИЕ НА ОСНОВЕ СЛОЕВ ОКСИДОВ ЦИРКОНИЯ И КРЕМНИЯ

Многослойные интерференционные покрытия на основе чередующихся слоев с высоким и низким показателями преломления широко применяются в качестве просветляющих покрытий, отражающих зеркал в лазерной технике и оптике [1, с. 282]. В качестве отдельных слоев оптических систем эффективно используются материалы на основе тугоплавких оксидов TiO₂, ZrO₂, SiO₂, которые имеют такие преимущества, как высокая химическая стойкость и механическая прочность. Так, в работе [2, с. 100] покрытия на основе ZrO₂-SiO₂ показали высокую устойчивость к лазерному излучению при длительности импульсов 10–14 нс. Актуальной задачей является разработка многослойного покрытия на полимерных подложках, обладающего высокими спектральными характеристиками для применения в качестве поляризующего лазерное излучение элемента при разработке полупроводниковых лазерных систем.

Напыление многослойной системы типа [ZrO₂/SiO₂]₇, представляющей 14 диэлектрических слоев, происходило при поочередном испарении производственных мишеней ZrO₂ и SiO₂ с помощью электронного пучка. В качестве подложек использовали полированные пластины кремния, пластины стекла К8 толщинами 5 мм и 12 мм,

кварца, полиметилметакрилата (ПММА), полиэтилентерефталата (ПЭТФ). Предварительно подложки подвергались травлению ионами аргона в течении 15 минут. Формирование многослойного покрытия происходило методом электронно-лучевого осаждения с использованием вакуумной установки ВУ-1А (г. Сморгонь), содержащей источник электронно-лучевого испарения УЭЛИ-1 и встраиваемую систему контроля толщины Iris0211 (СОК Iris), длина волны контроля составляла 452 нм. Формирование покрытий проводилось при следующих параметрах технологического процесса: давление в камере: $6 \cdot 10^{-3}$ Па, ток эмиссии: 80–100 мА, ток накала: 10 мА, ускоряющее напряжение: 12 кВ.

Исследование морфологии проводилось методом атомно-силовой спектроскопии (АСМ) с помощью сканирующего зондового микроскопа Solver Pro P47 (NT-MTD), обработка и анализ АСМ-изображений осуществлялось с помощью программы Gwiddyon. Оптические характеристики такие, как спектры отражения и пропускания, определялись в поляризованном свете (режим PS-поляризации) на оборудовании спектрофотометра Photon RT (Essent Optics) с использованием программного обеспечения EssentSoft 3.15. Обработка результатов и вычисление степени поляризации проводилось с помощью программы Origin 2018.

Рассчитанные на основании спектров отражения однослойных покрытий показатели преломления составили значения: $n(\text{ZrO}_2) = 2,016$ и $n(\text{SiO}_2) = 1,496$. Исходя из данных значений были определены значения оптической толщины отдельных слоёв, необходимых для проектирования многослойного покрытия $d(\text{ZrO}_2) = 59,8$ нм и $d(\text{SiO}_2) = 80,1$ нм, общая толщина поляризационного покрытия ~ 980 нм. Количество слоев составило – 14, в качестве заключающего поверхностного слоя выступал SiO_2 .

На рисунке 1 приведены АСМ-изображения топологии и фазового контраста для 14-слойного покрытия $\text{ZrO}_2/\text{SiO}_2$. Данные анализа АСМ-изображений приведены в таблице 1.

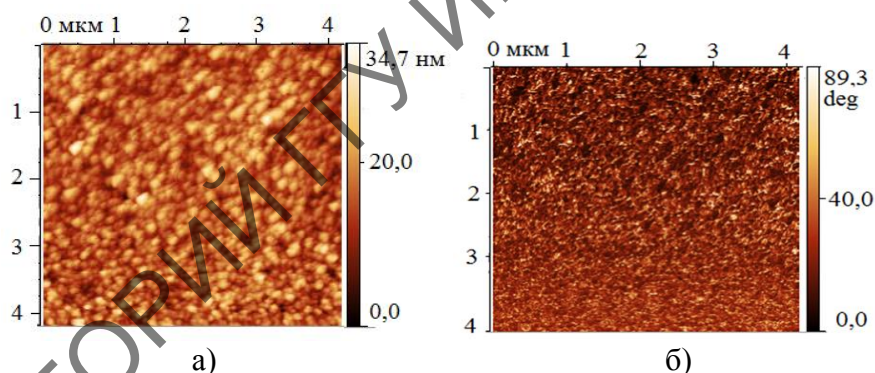


Рисунок 1 – Данные атомно-силовой микроскопии для 14-слойного покрытия на основе двуокисей циркония и кремния:
а) – топография, б) – фазовый контраст

Таблица 1 – Статистические данные топологии поверхности многослойного покрытия $\text{ZrO}_2/\text{SiO}_2$

Субшероховатость покрытия R_a , нм	Фрактальная размерность покрытия	Средний диаметр зерна, нм	Средняя высота зерна, нм	Среднее соотношение высоты зерна к его диаметру, h/D
4,24	2,73	55,69	15,96	0,286

На основании рисунка 1 и данных таблицы 1 отметим, что многослойное покрытие характеризуется равномерной зернистой структурой с одинаковой формой зерен и значением шероховатости не более 5 нм, что свидетельствует об относительно гладкой поверхности покрытия применительно к использованию его для изготовления оптических элементов видимого диапазона длин волн.

На рисунках 2 и 3 приведены спектры отражения и пропускания многослойных покрытий на непрозрачной и прозрачных подложках в зависимости от угла падения излучения к поверхности покрытия.

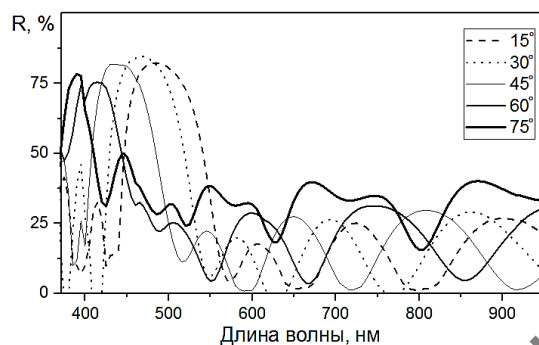


Рисунок 2 – Спектры отражения излучения для разных углов падения к поверхности покрытия, осажденного на подложку из полированного монокристалла кремния

Как видно из рисунка 2, при увеличении угла падения излучения к поверхности покрытия на кремниевой подложке от 15° до 75° с шагом 15° , пик максимального отражения смещается с шагом в 25 нм в УФ-область спектра. Таким образом, в зависимости от угла падения излучения максимумы пиков отражения определены в области от 500 нм до 550 нм и составляют 75–80 %.

На основании спектров пропускания многослойных покрытий, нанесенных на подложки различного типа, изображенных на рисунке 3, установлено, что максимальная степень пропускания наблюдается при угле падающего излучения 60° , при этом в области 500–550 нм она достигает значения 98 %, а при угле 75° максимумы пропускания смещаются в коротковолновую область и при длинах волн 480–550 нм степень поляризации достигает значения 80 %.

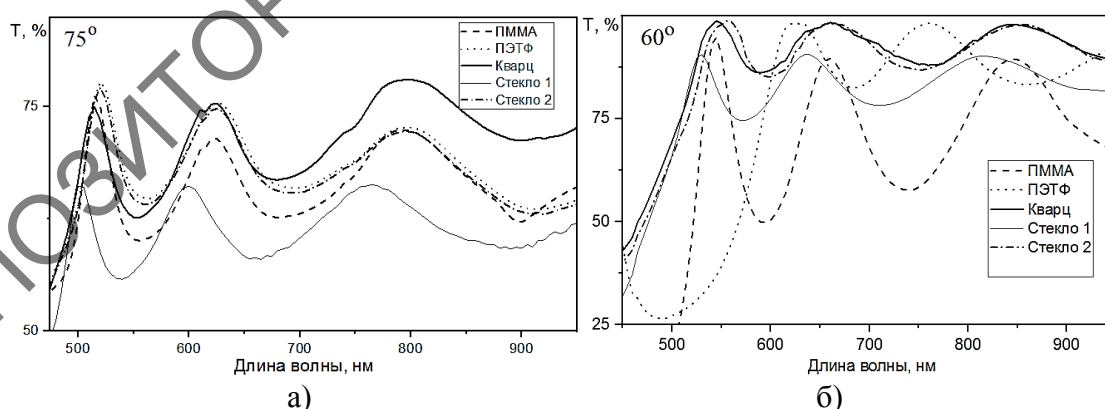


Рисунок 3 – Спектры пропускания покрытий $[\text{ZrO}_2/\text{SiO}_2]_7$ на прозрачных подложках при углах падения излучения: а) 75° и б) 60°

Диаграммы распределения рассчитанных значений степени поляризации прошедшего излучения для углов падения от 0° до 75° к поверхности покрытий, нанесенных на прозрачные подложки, приведены на рисунках 4, 5.

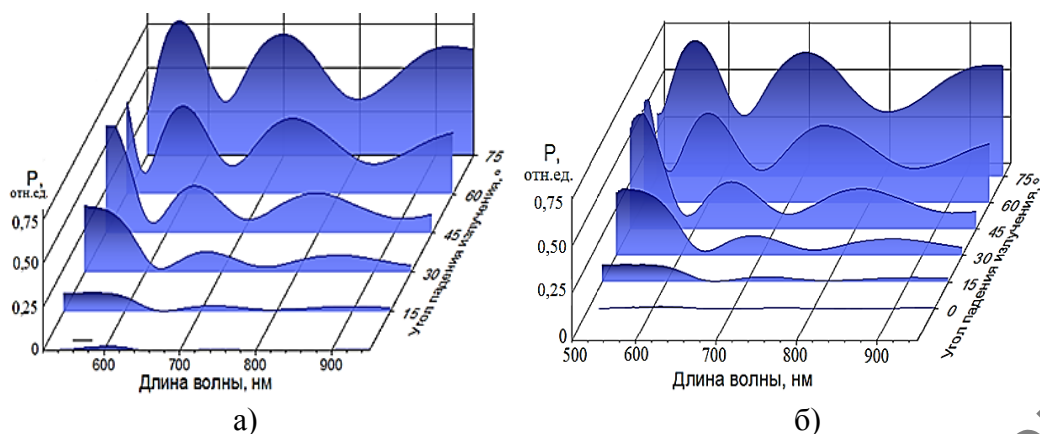


Рисунок 4 – Значения степени поляризации прошедшего излучения для разных углов падения к поверхности многослойного покрытия на полимерных подложках: а) ПММА и б) ПЭТФ

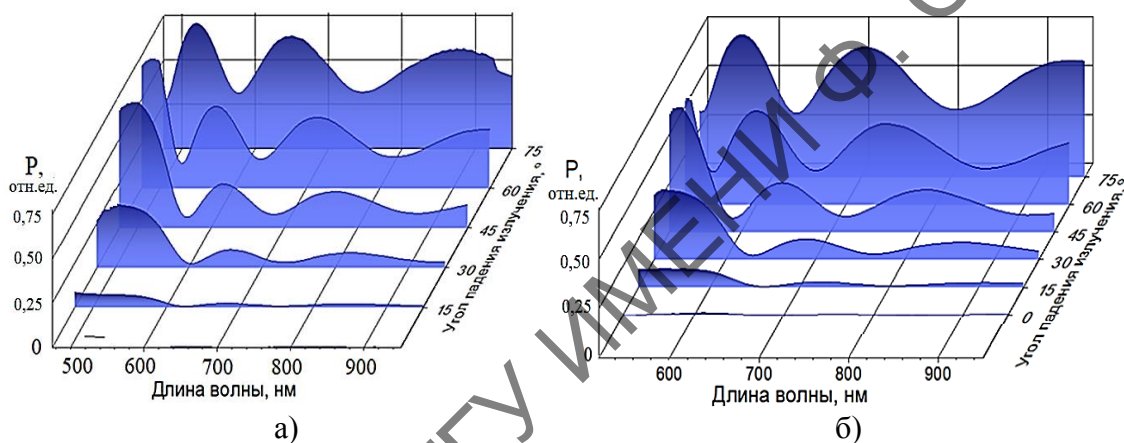


Рисунок 5 – Значения степени поляризации прошедшего излучения для разных углов падения к поверхности многослойного покрытия на а) стеклянной подложке, б) кварцевой подложке

Установлено, что наибольшая поляризационная способность прошедшего излучения наблюдается при углах падающего излучения 60° и 75° в диапазоне длин волн 480–550 нм. Так, для полимерных подложек максимальная степень поляризации наблюдается на волне 550 нм, с максимумом в 0,78 отн.ед. для покрытия на подложке из ПММА. Поляризационный пик покрытий на подложках из стекла и кварца приходится на длину волны 532 нм, с максимумом 0,70 отн.ед. на стеклянной подложке.

Таким образом, многослойные покрытия разработанной конструкции $[\text{ZrO}_2/\text{SiO}_2]_7$ обладают высокой пропускающей и поляризационной способностью на длине волны 532 нм, что соответствует рабочей длине волны зеленого лазера, что позволяет применять их в качестве поляризационных элементов в лазерной технике или оптике.

Список использованных источников

1 High damage threshold mirrors and polarizers in the $\text{ZrO}_2/\text{SiO}_2$ and $\text{HfO}_2/\text{SiO}_2$ dielectric systems / C. Fournet [et al.] // SPIE Proceedings: Laser-Induced Damage in Optical Materials. – 1992, United States. – Vol. 1624. – P. 282–293.

2 Многослойные интерференционные покрытия в квантовой электронике / Г. Я. Колодный [и др.] // Электронная промышленность. – 1981. – № 6. – С. 93–101.

М. П. Купреев¹, Л. В. Судник², К. Ф. Рудницкий²

¹г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

²г. Минск, Институт порошковой металлургии

ВЫСОКОПОРИСТЫЙ АБРАЗИВНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ШЛИФОВАНИЯ ТРУДНООБРАБАТЫВАЕМЫХ СТАЛЕЙ

Введение. При обработке некоторых сталей и сплавов эффективно применение абразивного инструмента из карбида кремния на керамической связке. Коэффициент шлифования труднообрабатываемых деталей таким инструментом повышается в 1,4...1,5 раза, а стойкость по количеству обработанных изделий увеличивается в 1,2...1,3 раза (в сравнении с инструментом из электрокорунда) [1].

Использование в процессе производства смесей из карбида кремния различных зернистостей позволяет повысить эксплуатационные показатели абразивных кругов при обработке труднообрабатываемых изделий [2].

Общим недостатком инструмента из карбида кремния на керамической связке является его низкая механическая прочность, что сказывается на стойкости инструмента. Это объясняется тем, что керамическая связка слабо реагирует с карбидокремниевым зерном, которое к тому же имеет гладкую поверхность и более широкие углы режущих граней, что отрицательно сказывается на прочности удержания зерен в теле инструмента. В работе [3] предлагается повысить прочность абразивного инструмента из карбида кремния за счет введения в абразивную массу адгезионно-активных к керамической связке абразивных частиц наполнителя, например электрокорунда зернистостью F60 и F80, вместо зерен карбида кремния зернистостью F60 в тех же объемных пропорциях. При этом отношение объемов частиц наполнителя по их размерам равно отношению объемов карбида кремния смежных зернистостей. Использование адгезионно-активных частиц наполнителя улучшает закрепление зерен карбида кремния в абразивном круге за счет его армирования частицами наполнителя. Хорошо связанные между собой керамической связкой частицы наполнителя окружают зерна карбида кремния и прочно удерживают их в круге. Это повышает качество инструмента и производительность шлифования.

Одним из путей повышения эффективности шлифования труднообрабатываемых сталей является увеличение пористости абразивного инструмента. В таком инструменте объем пор между абразивными частицами повышается до 70 %, а их объемное содержание снижается с 46 до 30 %. Это способствует лучшему охлаждению зоны обработки и повышению эффективности шлифования. Так, на ОАО «САЛЕО-ГОМЕЛЬ» для высокоточной шлифовки распределительных дисков, блоков цилиндров и других деталей используются высокопористые шлифовальные круги фирмы Rappold Winterthur с параметрами 11C120H15VP. Они изготавливаются из карбида кремния зернистостью 80...120 мкм (F 80, F120), имеют высокую пористость (15 структура), очень мягкие – Н (М1). Эти круги хорошо зарекомендовали себя в работе. Структура круга 11C120H15VP представлена на рисунке 1. Этот круг состоит из зерна зеленого карбида кремния зернистостью F80, керамической связки и пор размером 0,8–1,0 мм. Расстояние между порами 0,4–1,2 мм.

Основная часть. Представленные данные свидетельствуют о перспективности исследований по совершенствованию абразивного инструмента для труднообрабатываемых сталей с использованием карбида кремния. Отработка технологии проводилась на примере изготовления и испытания чашечного шлифовального круга ЧЦ 60 x 50 x 25, аналогичного по размерам кругу 11C120H15VP. Работа проводилась с целью замены на ОАО «САЛЕО-ГОМЕЛЬ» импортных дорогостоящих абразивных кругов из карбида кремния шлифовальными кругами отечественного производства.

Для исследований выбрана абразивная масса, состоящая из зерна электрокорунда, карбида кремния, керамической легкоплавкой связки и органического наполнителя разной зернистости.

Анализ структуры круга 11С120Н15VP (рисунок 1) показал, что большое применение в промышленности имеют крупнопористые абразивные инструменты, общая объемная пористость которых может быть от 35 % до 70 %, а величина пор от 0,5–1,0 мм и более. В связи с этим для исследования выбраны две смеси из электрокорунда и карбида кремния.



Рисунок 1– Структура круга 11С120Н15VP



Рисунок 2 – Высокопористый экспериментальный шлифовальный круг ЧЦ 60 х 50 х 25 25А F60 С64 F46 15V

Одна абразивная масса содержала смесь электрокорунда зернистостью F60 (250 мкм) и порошка карбида кремния зернистостью F46 (320 мкм). В качестве выгорающего порообразователя использован разработанный новый органический наполнитель с размером частиц 0,32–0,63 мм и 0,63–1,00 мм. Размер частиц наполнителя больше размера абразивного зерна в 1,5–2 раза, что позволяет получить высокопористый абразивный материал.

Другая абразивная масса использована для изготовления экспериментальных абразивных кругов, предназначенных для более тонкого шлифования. Она содержала смесь электрокорунда зернистостью F80 (160 мкм) и порошка карбида кремния зернистостью F80 (160 мкм). В качестве выгорающего порообразователя также использован разработанный органический наполнитель с размером частиц 0,20–0,32 мм и 0,32–0,63 мм. Размер частиц наполнителя больше размера абразивного зерна в 1,5...2 раза, что позволяет получить высокопористый абразивный материал.

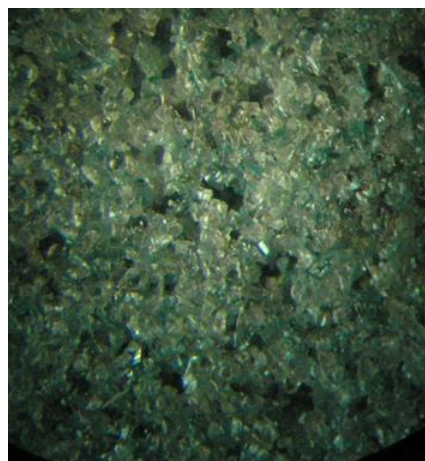
На рисунке 2 представлен образец экспериментального шлифовального чашечного круга ЧЦ 60 х 48 х 25 25А F60 64С F46 15V из электрокорунда 25А зернистостью F60 (250 мкм), изготовленного с введением в формовочную массу 57 % (по массе) электрокорунда 25А F60, 43 % (по массе) карбида кремния 64С F46 и 15 % от массы абразива (по массе) нового порообразующего органического наполнителя с размером частиц 0,32–0,63 мм.

На рисунке 3а представлен образец экспериментального шлифовального чашечного круга ЧЦ 60 х 48 х 25 25А F80 64С F80 13V, изготовленного с введением в формовочную массу 50 % (по массе) электрокорунда 25А F80, 50 % (по массе) карбида кремния 64С F80 и 10 % от массы абразива (по массе) нового порообразующего органического наполнителя с размером частиц 0,20–0,63 мм. На рисунке 3б представлена структура этого круга.

Все круги не разрушились и не деформировались во время сушки и последующего обжига при скорости подъема температуры во время обжига 70 °С в час до температуры 1050 °С.



а



б

Рисунок 3 – Высокопористый шлифовальный круг ЧЦ 60 x 48 x 25 25А F80 64С F80 К 13V из смеси электрокорунда и карбида кремния (а) и его структура (б)

В таблице 1 представлены характеристики и результаты производственных испытаний абразивных кругов, изготовленных из порошка электрокорунда 25А, в зависимости от содержания в формовочной массе карбида кремния 64С, керамической связки и нового органического порообразующего наполнителя с размером частиц 0,32–01,00 мм.

Таблица 1 – Характеристики и режущие свойства абразивных кругов, изготовленных из смеси порошка электрокорунда 25А, в зависимости от содержания в формовочной массе карбида кремния 64С, керамической связки и нового органического порообразующего наполнителя с размером частиц 0,20–1,00 мм

№ опыта	Содержание электрокорунда 25А, масс. %		Содержание карбида кремния 64С, масс. %		Содержание керамической связки, масс. %	Содержание порообразователя, масс. %			№ структуры	Характеристика работы при обработке деталей
	F80	F60	F80	F43		Размер частиц, мм				
						0,63...1,00	0,20...0,32	0,32...0,63		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	50		50		15	10			13	Недостаточно прочный
2	50		50		15		5	5	13	Работает хорошо
3		57		43	15			12	15	Работает при глубине шлифования до 0,08 мм
4		50		50	12			15	15	Работает при глубине шлифования до 0,08 мм
5		50		50	14	10			10	Работает хорошо, не сыпится и не засаливается

Из таблицы видно, что при содержании связки менее 14 % шлифовальные круги получаются мягкими и сыпятся. Наилучшие эксплуатационные свойства имеют круги, изготовленные из шихты, содержащей 14–15 % (от массы абразивного зерна) керамической легкоплавкой связки и 10 % (от массы абразивного зерна) нового порообразующего наполнителя. В процессе работы они не засаливаются, не сыпятся и обеспечивают достаточно боль-

шую глубину резания. Режущая способность и производительность указанных инструментов значительно выше обычных кругов из электрокорунда. Кроме того, высокопористый абразивный инструмент с карбидом кремния и обрабатываемый материал при работе нагреваются меньше, вследствие чего не наблюдается прижогов па обрабатываемой поверхности.

В результате микроскопических исследований установлено, что при содержании наполнителя в формовочной массе до 10 % поры от него (после выгорания) занимают меньший объем, чем абразивное зерно, а ширина стенок между порами превышает их размеры. При содержании наполнителя в формовочной массе около 15 % после его выгорания ширина стенок между порами соответствует или меньше размерам пор. Абразивный материал приобретает при этом очень развитую губчатую структуру. Крупные поры в полученных крупнозернистых абразивах заключены между стенками из абразивно-керамической массы. Наличие крупных пор и губчатая структура инструмента позволяет обрабатывать им такие материалы, как резину, пробку, кожу, войлок, а также мягкие горные породы и металлы, которые или совсем не могут обрабатываться обычными кругами, или обрабатываются плохо.

Заключение. В процессе исследований решен комплекс задач, необходимых для изготовления высокопористого абразивного инструмента из смеси электрокорунда и карбида кремния для эффективной шлифовки труднообрабатываемых сталей, связанный с использованием нового порообразующего наполнителя и легкоплавкой керамической связки.

Изучено влияние состава абразивной массы на прочностные и режущие свойства шлифовальных кругов на легкоплавкой керамической связке из смеси электрокорунда и карбида кремния при обработке легированных сталей. Установлено, что при температуре обжига 1050 °С карбид кремния окисляется воздухом и компонентами керамической связки незначительно и абразивный инструмент характеризуется высокой режущей способностью при содержании в шихте до 10 масс. % выгорающего органического порообразователя и 14–15 масс. % легкоплавкой керамической связки.

Изготовлены опытные образцы высокопористых шлифовальных кругов из смеси электрокорунда и карбида кремния и проведено их испытание на ОАО «САЛЕО–ГОМЕЛЬ».

Список использованных источников

- 1 Смирнов В. А. Преимущества кругов из карбида кремния зеленого на адгезионно-активной связке при обработке труднообрабатываемых сталей и сплавов / В. А. Смирнов // Физико-химические явления при шлифовании : сборник докладов. – Киев, 1976. – С. 56–61.
- 2 Масса для изготовления абразивного инструмента : а. с. RU 2354534 / В. М. Шумячер, С. В. Славин, С. А. Крюков. – Оpubл. 10.05.2009.
- 3 Абразивный инструмент : а. с. RU 2215643 / В. М. Шумячер, В. А. Назаренко, С. А. Крюков, И. В. Дуличенко. – Оpubл. 10.11.2003.

Л. К. Кушнер, И. И. Кузьмар, Д. Ю. Гульпа, Н. В. Дежкунов
г. Минск, БГУИР

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО МЕДНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОЛИЗА

Гальваническое меднение в производстве печатных плат применяют для формирования токоведущего слоя, определяющего их эксплуатационные свойства, такие как устойчивость к термоудару, циклическому изменению температур, перепайкам, ремонтнопригодности, обеспечения электропроводности, а также прочности сцепления фрикционных композиций с основой. При этом важной проблемой является увеличение скорости

процесса осаждения, обеспечение пластичности и равномерности медных покрытий на поверхности и в отверстиях. Установлено, что долговременная надежность в значительной степени определяется качеством и однородностью меди, осажденной в отверстиях. Появление печатных плат с высоким соотношением толщины платы и диаметра отверстий особенно остро ставит проблему выравнивания металлизации на поверхности изделия и в отверстиях, обусловленную неоднородностью распределения плотности тока.

Исследованы закономерности процесса электрохимического меднения в условиях стационарного и нестационарного электролиза в сульфатном электролите, содержащем различные концентрации сульфата меди и серной кислоты и хлористый натрий. Для обеспечения выравнивания металлизации на поверхности сложнопрофилированных изделий и повышения качества покрытий в электролит меднения вводилась комплексная выравнивающая добавка, создающая условия для преимущественного наращивания металла в углублениях и замедляя осаждение на поверхности и в углах.

Эффективным приемом выравнивания металлизации, особенно при необходимости металлизации глухих отверстий, является использование реверсированного тока с анодным травлением металла при обратном импульсе на больших градиентах тока, то есть именно там, где произошло большое наращивание при прямом токе. Для интенсификации обмена электролита использовалось электроосаждение при воздействии ультразвука.

Для обоснования использования выравнивающей добавки в электролит меднения, реверсированного тока и ультразвука при нанесении медных покрытий с требуемыми эксплуатационными свойствами проведено исследование кинетики электродных процессов, изучение быстротекущих электрохимических процессов на границе «электрод-электролит» методом вольтамперометрии при нестационарном электролизе, позволяющее выяснить механизм и основные закономерности их протекания, установить связь между условиями электролиза и свойствами получаемых электрохимических покрытий.

Исследование кинетических закономерностей проводилось путем регистрации электродных потенциалов при различных параметрах поляризующего тока и условиях осаждения. Для снятия катодных поляризационных кривых (КПК) в нестационарных условиях одновременно регистрировались минимальное E_{\min} и максимальное E_{\max} значения катодного потенциала с помощью импульсного потенциостата-гальваностата «ElinsP-45X». Значения потенциалов измерялись относительно хлорсеребряного электрода сравнения и пересчитывались на нормальную водородную шкалу, а полученные значения силы тока – на плотность тока. Анод – нерастворимый платиновый.

Как следует из рисунка 1, введение в электролит выравнивающей добавки приводит к повышению перенапряжения катодного процесса, сдвигая поляризационную кривую в электроотрицательную сторону. Перемешивание электролита увеличивает предельный ток (в 2–3 раза в зависимости от интенсивности перемешивания).

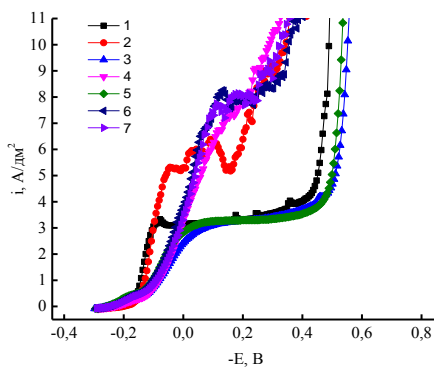


Рисунок 1 – Вольтамперные характеристики процесса меднения на постоянном токе:
1,2 – без добавок; 3–4 – с добавкой; 5–7 – с двойной добавкой;
1,3,5 – без перемешивания; 2,4,6 – с перемешиванием;
7 – с интенсивным перемешиванием

Смачиватель полиэтиленгликоль, адсорбируясь на поверхности катода с образованием пассивирующего слоя в присутствии ионов хлора, что приводит к увеличению толщины диффузионного слоя, затрудняет разряд ионов меди и способствует формированию плотных мелкокристаллических осадков, а также улучшению распределения толщины металлизации за счет улучшения условий массопереноса [1, 2].

Блескообразователь (ускоритель) облегчает разряд ионов меди, повышает предельный ток и снижает поляризацию катодного процесса за счет каталитического стимулирования адсорбции ионов меди промежуточными комплексами, также уменьшает блокировку поверхности ингибитором. При наличии отверстий высокая скорость диффузии молекул ускорителя позволяют ему легко проникать в отверстия и повышать скорость разряда ионов меди. Молекулы смачивателя пассивируют преимущественно внешнюю часть окон, что приводит к осаждению снизу-вверх. Положительно заряженная в электролите выравнивающая добавка, накапливаясь преимущественно возле отрицательно заряженных участков с наибольшей напряженностью электрического поля на катоде (в верхних углах и на выступах поверхности), повышает катодную поляризацию и подавляет осаждение меди на углах структур, деактивирует молекулы ускорителя на поверхности, способствуя ее выравниванию.

При перемешивании электролита с добавками наблюдается повышение катодной поляризации (рисунок 1), усиливающееся с увеличением скорости перемешивания. Установленное усиление ингибирования процесса осаждения при ускорении подачи добавок является подтверждением адсорбционно-диффузионного механизма выравнивания поверхности. Установлено, что в отличие от стандартного сульфатного электролита меднения разработанный электролит обладает выравнивающей способностью и может использоваться при заполнении глухих отверстий.

Реверсированный ток приводит к деполяризации процесса выделения меди (рисунки 2, 3) [3]. С повышением плотности обратного тока наблюдается увеличение предельного тока и размах ($E_{max}-E_{min}$) колебаний, при этом кривая $E_{min}(I)$ смещается в электроположительную сторону.

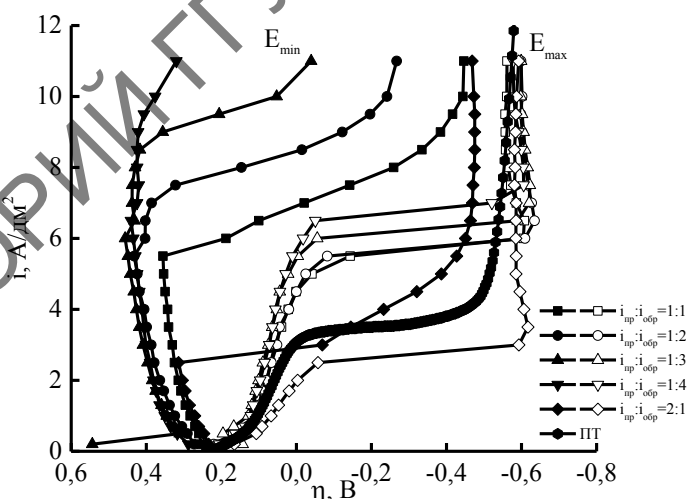


Рисунок 2 – Влияние соотношения плотностей прямого и обратного тока на кинетику меднения на реверсированном токе, $\tau_{пр} : \tau_{обр} = 20 : 1$ мс

Уменьшение длительности прямого импульса от 50 до 5 мс при постоянном значении обратного импульса (1 мс), т. е. повышение частоты, приводит к повышению величины предельного тока и снижению перенапряжения катодного процесса (рисунок 3). При снижении частоты реактивная проводимость электрода и емкостной ток уменьшаются, возрастает фарадеевская составляющая тока, что и приводит к увеличению максимального значения поляризации.

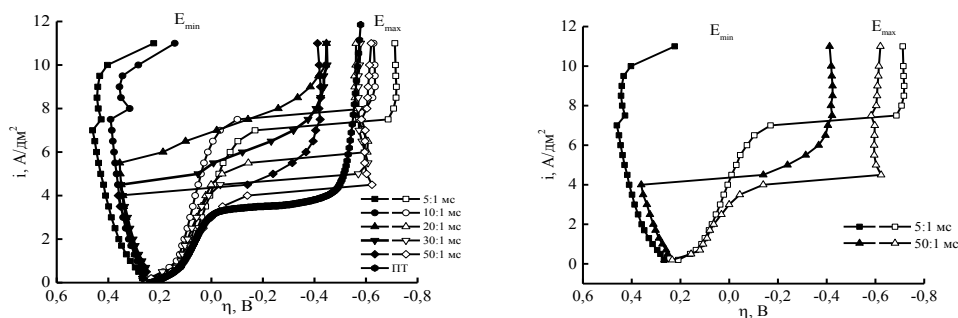


Рисунок 3 – Поляризационные кривые медного электрода на реверсированном токе при различных соотношениях длительностей прямого и обратного импульса, $i_{пр} = i_{обр}$

Величина предельного тока уменьшается с увеличением длительности прямого импульса от 10 до 50 мс, оставаясь выше, чем на постоянном токе (рисунок 4). Повышение плотности обратного тока приводит к росту предельного тока (рисунок 4).

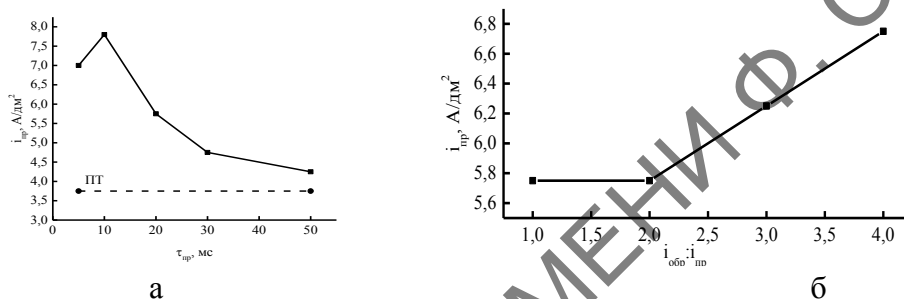


Рисунок 4 – Влияние длительности прямого импульса при $\tau_{обр} = 1$ мс (а) и соотношения плотностей прямого и обратного тока (б) на величину предельного тока, $\tau_{пр} : \tau_{обр} = 20:1$ мс

Перемешивание электролита и воздействие ультразвука при осаждении на реверсированном токе значительно увеличивают предельный ток и позволяет интенсифицировать процесс электролиза, практически не изменяя хода поляризационных кривых (рисунок 5).

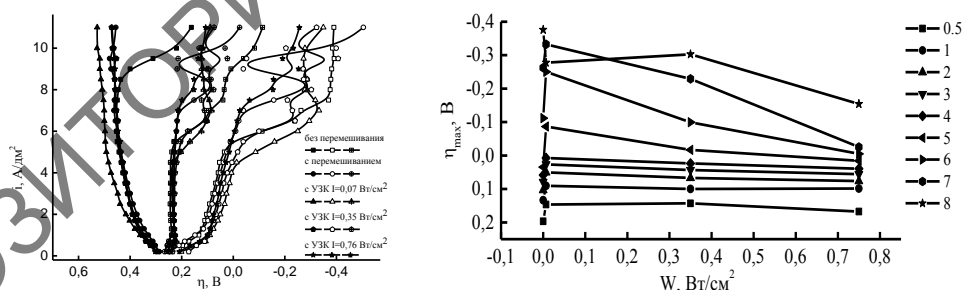


Рисунок 5 – Влияние перемешивания электролита и интенсивности ультразвука на катодную поляризацию осаждения меди, $\tau_{пр} : \tau_{обр} = 20:1$ мс при различных значениях i_{cp} (A/dm²)

Возможность изменять мгновенные плотности тока в пределах предельного тока, а соответственно, и мгновенные значения электродного потенциала при средней плотности тока, не превышающей его предельной величины, что невозможно при стационарном электролизе, является важным преимуществом импульсного электролиза

Исследование кинетических закономерностей процесса меднения показало, что реверсированный ток снижает перенапряжение катодного процесса и увеличивает предельный

ток, позволяет интенсифицировать процесс электроосаждения и повысить эксплуатационные свойства покрытий. Так, по сравнению с постоянным током пластичность покрытий реверсированном токе увеличивается на 10–15 %, а коррозионная стойкость – в 1,2–3,2 раза. Рассеивающая способность по току (РСт) электролита меднения с комплексной выравнивающей добавкой при электроосаждении на реверсированном токе РСт составила 58,6 до 80 %, что позволяет использовать процесс при металлизации печатных плат.

Список использованных источников

- 1 Терешкин, В. А. Гальваническое меднение в производстве печатных плат / В. А. Терешкин, Ж. Н. Фантгоф, Л. Н. Григорьева // Технологии в электронной промышленности. – 2005. – №1. – С.16-18.
- 2 Кушнер, Л. К. Электрохимическое заполнение TSV-отверстий на реверсированном токе / Л. К. Кушнер, Л. И. Степанова, И. И. Кузьмар, А. А. Хмыль, С. К. Лазарук, А. В. Долбик // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. – 2018. – Т. 18. – № 1. – С. 179–182.
- 3 Кушнер, Л. К. Электроосаждение медных покрытий на реверсированном токе / Л. К. Кушнер, И. И. Кузьмар, А. А. Хмыль, И. П. Белоцкий, А. М. Гиро // Материалы докладов Международной научно-технической конференции «Современные электрохимические технологии и оборудование». – БГТУ, г. Минск, Республика Беларусь, 2019. – С. 352–356.

**Н. Н. Лам¹, С. С. Пивоварчик¹, С. Н. Мельников¹, С. М. Завадский¹,
В. А. Бурдовицин², Т. Х. Доан¹**

¹г. Минск, БГУИР,

²г. Томск, Россия, ТУСУР

ФОРМИРОВАНИЕ ЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ТИТАНЕ МЕТОДОМ ИМПУЛЬСНОГО РЕАКТИВНОГО МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ

Введение. В последние годы намечилось значительное увеличение применения титана и титановых сплавов, особенно где главную роль играет небольшая плотность, высокая удельная прочность и теплоустойчивость. Титановые сплавы применяются в авиастроении и ракетостроении для изготовления деталей реактивных двигателей, лопаток компрессоров, деталей корпусов ракетных двигателей и т. д. В медицинской промышленности благодаря хорошей биосовместимости и высокой прочности из титана и титановых сплавов изготавливаются инструменты и имплантаты. Однако вместе с положительными свойствами титановые сплавы имеют свойства, которые ограничивают их применение в качестве конструкционных материалов. Это, прежде всего, низкая твердость поверхности и низкая износостойкость.

Одним из перспективных способов повышения износостойкости титановых сплавов является применение защитных покрытий нитрида титана (TiN), которые в несколько раз повышают сопротивление материала основы и обеспечивают увеличение сопротивления агрессивному воздействию среды [1]. В большинстве случаев упрочняющие покрытия на основе TiN наносят методом дугового испарения [2]. Однако главным недостатком данного метода является наличие в потоке осаждаемого вещества капельной фазы. Поэтому для нанесения покрытий TiN наиболее подходит метод реактивного магнетронного распыления, который позволяет получать износостойкие покрытия с высокими функциональными характеристиками при сравнимых с дуговым испарением скоростях нанесения [3]. Однако одной из проблем эффективного формирования методом

реактивного магнетронного распыления плотных, свободных от дефектов покрытий является возникновение микродуг на мишени, которые приводят к выбросу капельной фазы. Для предотвращения явлений дугообразования в последнее время развитие получил метод импульсного магнетронного распыления [4]. Данный метод не только позволяет исключить неустойчивость процесса из-за формирования микродуг, но и оказывает существенное влияние на формирование структуры и фазового состава покрытий. В процессе осаждения возможно получение ультрадисперсного структурного состояния (включая аморфноподобное) и новых химических соединений, что позволяет значительно совершенствовать физико-механические свойства покрытий. Таким образом, целью работы являлось исследование особенностей процесса импульсного реактивного магнетронного нанесения пленок нитрида титана и влияния параметров процесса нанесения на состав, механические и триботехнические характеристики пленок.

1. Эксперимент Схема экспериментальной установки для нанесения пленок нитрида титана методом импульсного реактивного магнетронного распыления приведена на рисунке 1. Камера вакуумной установки была оборудована магнетронной распылительной системой (МРС) МАС-80 с мишенью $\varnothing 80$ мм и ионным источником на основе ускорителя с анодным слоем (ИИ). Для распыления использовались мишень из титана ВТ1-00 (99,5 % чистоты) $\varnothing 80$ мм и толщиной 5 мм. Пленки TiN наносились на подложки из титана ВТ1.

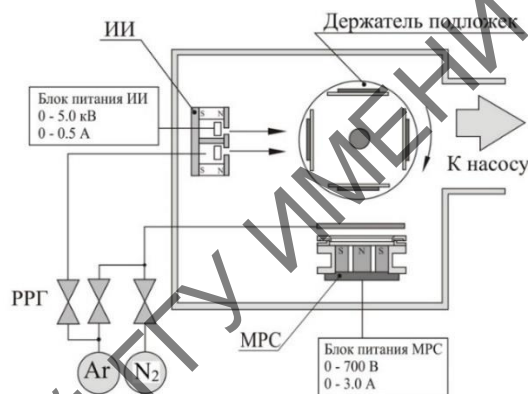


Рисунок 1 – Схема экспериментальной установки для нанесения пленок нитрида титана методом импульсного реактивного магнетронного распыления

Для питания магнетрона использовался источник питания АРЕL-М-1.5ВР-800-2 (ООО «Прикладная электроника», Россия) мощностью 1,5 кВт. Для распыления Ti мишени в среде Ar/O_2 рабочих газов на магнетрон подавался биполярный ассиметричный импульсный ток (частота следования импульсов $F = 10$ кГц, амплитуда положительного импульса 438–489 В и длительность 3 мкс). Ток разряда во всех экспериментах поддерживался постоянным и составлял $I_t = 1,5$ А. Расход Ar и N_2 во всех процессах контролировался автоматическими регуляторами расхода газа РРГ-1 и составлял $Q_{Ar} = 50$ мл/мин, расход азота изменялся от 0 до 12 мл/мин. Время нанесения изменялась в зависимости от скорости нанесения в диапазоне 20–22 мин. При этом толщина нанесенных пленок составляла 1–1,6 мкм. Толщина нанесенных пленок определялась с помощью оптического интерферометрического профилометра ПОИ-08. Исследования распределения элементного состава покрытий по толщине проводились на оптико-эмиссионном спектрометре тлеющего разряда *GD Profiler 2 (HORIBA Jobin Yvon S.A.S.)*. Твердость покрытий измерялась с помощью измерителя микротвёрдости *Leika VMHT Mot* с использованием индентора Кнупа. Измерения производились при нагрузке индентора 10 г и времени сохранения нагрузки 15 с. Измерения коэффициента трения и объемного износа покрытий проводились на трибометре МТ-4 методом истирания при возвратно поступательном

движении контртела в условиях сухого трения. В качестве контртела использовался шарик \varnothing 6,3 мм из стали ШХ15. Нагрузка индентора составляла 500 мН, скорость скольжения 2 мм/с, длина двойного прохода 7 мм, количество циклов трения – 1000. Объемный износ покрытия рассчитывался исходя из ширины и длины дорожки трения.

2. Результаты исследований и их обсуждение. Исследованы зависимости элементного состава нанесенных пленок от концентрации азота в Ar/N₂ смеси газов в процессе импульсного реактивного распыления. На рисунке 2 представлены типичный профиль распределения элементов по толщине пленок. Пленка нанесена при концентрации азота в Ar/N₂ смеси газов $\Gamma_{N_2} = 3,85\%$. Как видно из рисунка, распределение элементов по толщине пленки было равномерным. В приповерхностном слое пленки наблюдалось присутствие кислорода, что, по-видимому, связано с наличием адсорбированного воздуха. Нанесенная при данных условиях пленка имела недостаток азота. При увеличении содержания азота в Ar/N₂ смеси газов концентрация азота в пленке увеличивалась практически линейно. Стехиометрические пленки TiN получены при концентрации азота около 9 %.

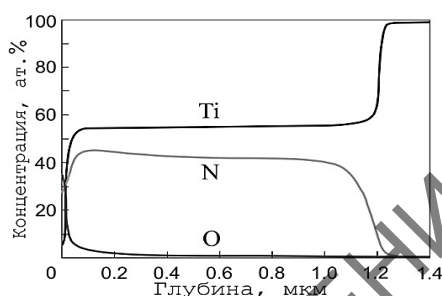


Рисунок 2 – Распределение концентрации элементов по глубине покрытия нитрида титана ($\Gamma_{N_2} = 3,85\%$)

Проведены исследования влияния состава газовой среды на трибологические характеристики нанесенных пленок нитрида титана. Получена зависимость микротвердости пленок нитрида титана от концентрации азота в Ar/N₂ смеси газов (рисунок 3). При увеличении концентрации азота микротвердость пленок увеличивалась и достигала максимума 2235 НК при потоке азота 2 мл/мин (Γ_{N_2} около 3,85 %). При дальнейшем увеличении Γ_{N_2} микротвердость пленок снижалась до 880–920 НК при концентрации азота около 20 %.

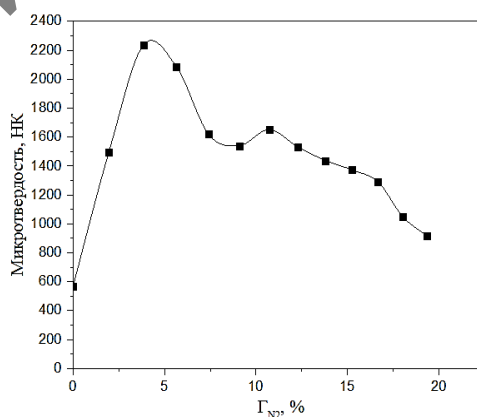


Рисунок 3 – Зависимость микротвердости пленок TiN от процентного содержания азота в Ar/N₂ смеси газов

На рисунке 4 представлены зависимости коэффициента трения и объемного износа пленок TiN от концентрации азота в Ar/N₂ смеси газов. Пленки, нанесенные при низком

содержании азота (менее 2,5 %) имели высокий коэффициент трения $k = 0,5-0,7$ и большие значения объемного износа. При увеличении Γ_{N_2} коэффициент трения снижался до $k = 0,16-0,2$. Объемный износ (W) таких пленок составлял $0,3 \times 10^{-7} - 2,4 \times 10^{-7} \text{ мм}^3$ за двойной проход.

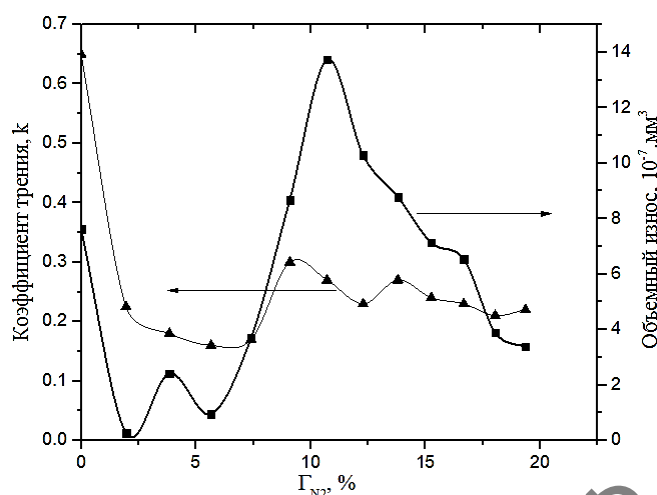


Рисунок 4 – Зависимость коэффициента трения и объемного износа пленок нитрида титана от процентного содержания азота в Ar/N₂ смеси газов

Анализ зависимостей коэффициента трения от пути трения для образцов, полученных при данных концентрациях N₂ показал, что после начальной приработки пленки имели практически постоянный k на всех участках износа (рисунок 5). Это также свидетельствует об отсутствии слоистой структуры покрытий. При повышении Γ_{N_2} до 10 % коэффициент трения увеличивался до 0,3. При этом объемный износ пленок увеличивался до $13,7 \times 10^{-7} \text{ мм}^3$. При дальнейшем увеличении Γ_{N_2} более 10 % объемный износ уменьшался при практически постоянном коэффициенте трения.

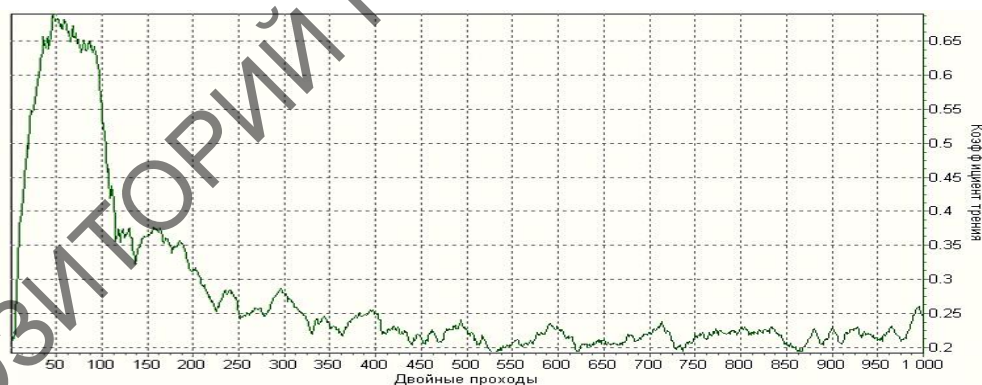


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента трения от количества циклов истирания пленок нитрида титана ($\Gamma_{N_2} = 3,85 \%$)

Заключение. Установлено, что метод импульсного реактивного магнетронного распыления является эффективным способом для формирования износостойких покрытий нитрида титана. При концентрации азота в Ar/N₂ смеси газов около 2,5–6 % метод обеспечивает формирование однородных по толщине пленок с твердостью до 2235 НК и коэффициентом трения менее 0,2. Данные пленки имеют недостаток азота.

Исследования выполнены при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № T20P-199 и РФФИ в рамках научного проекта № 20-58-00010 Бел_а.

Список использованных источников

1 Surface modification of titanium, titanium alloys, and related materials for biomedical applications / L. Xuanyong [et. al] // Materials Science and Engineering R. – 2004. – Vol. 47. – P. 49–121.

2 Zhirkov, I. Effect of cathode composition and nitrogen pressure on macroparticle generation and type of arc discharge in a DC arc source with Ti–Al compound cathodes / I. Zhirkov, A. Petruhins, J. Rosen // Surface & Coatings Technology. – 2015. – Vol. 281. – P. 20–26.

3 Nitride films deposited from an equimolar Al–Cr–Mo–Si–Ti alloy target by reactive direct current magnetron sputtering / H. W. Chang [et.al] // Thin Solid Films. – 2008. – Vol. 516. – P. 6402–6408.

4 Kelly, P. J. Magnetron sputtering: a recent developments and application / P. J. Kelly // Vacuum. – 2000. – Vol. 56. – P. 159–172.

**М. И. Москвичёв¹, В. В. Васькевич¹, А. В. Семченко¹, В. В. Сидский¹,
Е. В. Иванова², М. В. Загорянская², В. А. Кравец²**

¹ г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

² г. Санкт-Петербург, ФТИ им. А. Ф. Иоффе

СИНТЕЗ СЦИНТИЛЛИРУЮЩИХ СТЕКЛОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ НИОБАТА ИТТРИЯ

Введение

В качестве матриц для активных сред применяются стеклокристаллические материалы различного состава. Данные материалы представляют собой стеклообразную матрицу, активированную ионами, в которой равномерно распределены наноразмерные кристаллы. Активаторные ионы находятся в составе кристаллической фазы, а их оптические свойства определяются параметрами соответствующего кристалла.

Ниобат иттрия – это рентгеновский люминофор, который испускает излучение под воздействием рентгеновского излучения. При легировании материала редкоземельными ионами возможно получать материал с более длинноволновым излучением. Благодаря возможности изменять цвет люминесценции вследствие активации ионами редкоземельных элементов, ниобат иттрия находит широкое применение в оптоэлектронике [1].

Ионы европия (Eu^{3+}) в матрице YNbO_4 демонстрируют интенсивное красное свечение, связанное с переходами с уровней $^5\text{D}_0$ и $^5\text{D}_1$. Фотоприемники, используемые в рентгеновской радиографии, например, ПЗС-матрицы, имеют максимальную интенсивность в красной спектральной области. Поэтому материалы на основе ниобата иттрия, активированного европием перспективны для применения в рентгенографии, в частности, в цифровой медицинской радиологии.

Известны составы оптически активного алюмо-литий-силикатного стеклокристаллического материала, содержащего нанокристаллы редкоземельных ортониобатов [2] и натриево-литиевой стекломатрицы, на основе ниобата иттрия [3]. Основным недостатком материалов, синтезированных в рамках данных исследований, является высокая температура синтеза ($1300\text{ }^\circ\text{C}$ и выше). Поэтому актуальной задачей является получение стекломатриц, содержащих ниобат иттрия, активированный ионами редкоземельных элементов с температурой синтеза менее $1300\text{ }^\circ\text{C}$.

1. Материалы и методика эксперимента

Для формирования стеклокристаллических материалов, содержащих ниобат иттрия при температуре до $1200\text{ }^\circ\text{C}$ была выбрана кремний-натрий-калиевая стекломатрица. В этиловом спирте растворяли нитрат иттрия, хлориды ниобия, натрия, калия и

нитрат европия в требуемых соотношениях. В полученный раствор добавляли диоксид кремния и тщательно перемешивали. Используемые реактивы имели квалификацию не ниже «хч». Затем полученную смесь высушивали до удаления спиртовой составляющей при 100 °С. В результате получали порошкообразную массу, которую засыпали в тигель и помещали в муфельную печь для термической обработки в следующем режиме: поэтапный нагрев до 1150 °С в течение 2,5 часов, выдержку при 1150 °С (1 час) и постепенное охлаждение (около 3,5 часов) до комнатной температуры.

Исследования катодолюминесценции выполнялись на электронно-зондовом микроанализаторе CAMEBAX (Cameca, Франция).

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 1 представлен катодолюминесцентный (КЛ) спектр полученного образца кремний-натрий-калиевого стекломатериала, содержащего ниобат иттрия, активированный европием.

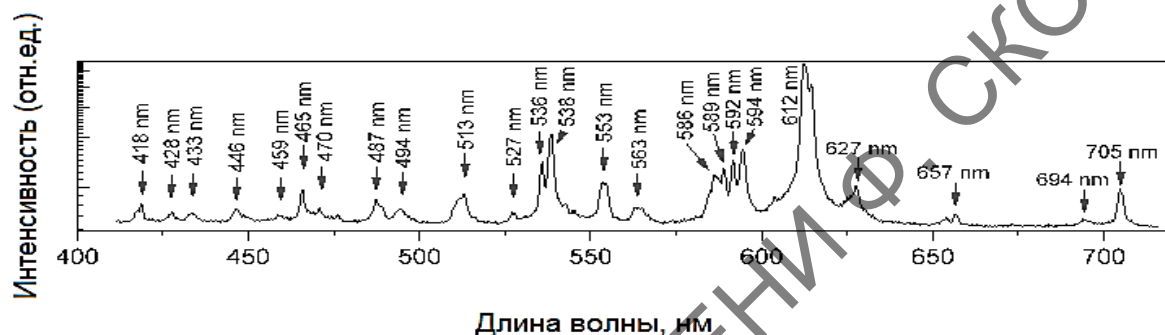


Рисунок 1 – КЛ спектр образца кремний-натрий-калиевого стекломатериала, содержащего ниобат иттрия, активированный европием

На рисунке 2 представлен КЛ спектр микронного кристаллического порошка $M\text{-YNbO}_4:\text{Eu}^{3+}$ с концентрацией европия 5,3% [4].

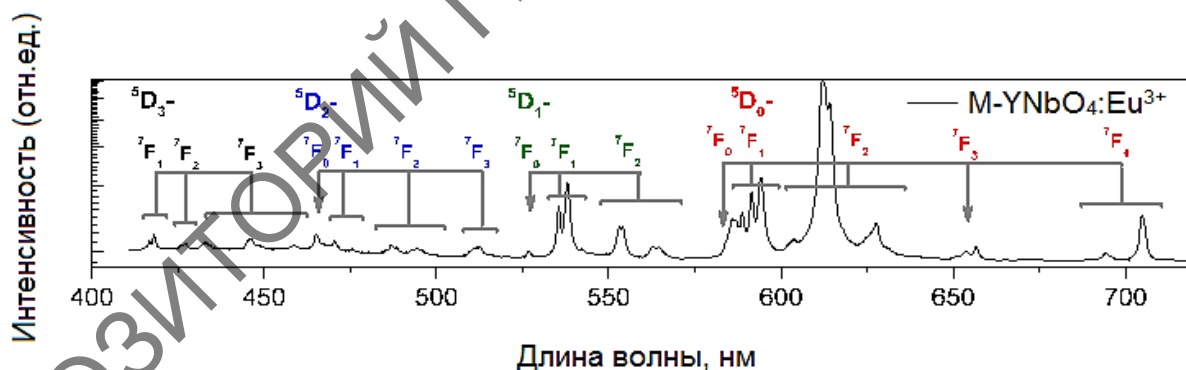


Рисунок 2 – КЛ спектр порошка $M\text{-YNbO}_4:\text{Eu}^{3+}$, используемый для сравнительного анализа

На рисунке 2 обозначены переходы, соответствующие люминесценции Eu^{3+} в спектре. Наиболее интенсивные переходы наблюдаются с уровней $^5\text{D}_0$ и $^5\text{D}_1$. Самая интенсивная линия люминесценции 612 нм соответствует переходу $^5\text{D}_0\text{-}^7\text{F}_2$.

Сравнительный анализ спектров полученного стеклокристаллического материала (рисунок 1) и спектра порошка $M\text{-YNbO}_4:\text{Eu}^{3+}$ (рисунок 2) показывает, что структура линий люминесценции европия, характерная для данных включений, полностью совпадает. Это подтверждает, что в синтезированной кремний-натрий-калиевой стекломатрице происходит образование включений $M\text{-YNbO}_4:\text{Eu}^{3+}$.

Заключение

Установлено, что синтез кремний-натрий-калиевого стеклокристаллического материала, содержащего ниобат иттрия, может быть выполнен при сниженной температуре (1150 °С) по сравнению с алюмо-литий-силикатными и натриево-литиевыми стекломатрицами, содержащими ниобат иттрия. Католюминесцентные исследования полученного материала подтверждают формирование включений ниобата иттрия М-типа, активированного европием. Полученный материал может быть перспективен в качестве оптически активных сред для применения в рентгенографии, оптоэлектронике и других применениях.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Т19РМ-030).

Список использованных источников

1 Yildirim, S. Production, characterization, and luminescent properties of Eu^{3+} doped yttrium niobate–tantalate films / Serdar Yildirim, Selim Demirci, Kadriye Ertekin and [etc.] // *Journal of Advanced Ceramics*. – 2017. – Vol. 6(1). – P. 33–42.

2 Dymshits, O. S. Structural characteristics and spectral properties of novel transparent lithium aluminosilicate glass-ceramics containing (Er,Yb) NbO_4 nanocrystals / O. S. Dymshits and [etc.] // *Journal of Luminescence*. – 2015. – Vol. 160. – P. 337–345.

3 Nazarov, M. Luminescence and Raman studies of YNbO_4 phosphors doped by Eu^{3+} , Ga^{3+} , and Al^{3+} / M. Nazarov and [etc.] // *Journal of Applied Physics*. – 2010. – Vol. 107(10). – P. 103–104.

4 Mester A. Synthesis and study of the luminescent properties of europium-doped yttrium niobate / A. Mester and [etc.] // *Optics and Spectroscopy*. – 2016. – Vol. 120(5). – P. 726–731.

**М. И. Москвичёв¹, В. Е. Гайшун¹, Д. Л. Коваленко¹,
Н. А. Алешкевич¹, Я. А. Косенок, Н. В. Насонова²**

¹ Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

² Минск, БГУИР

ПОЛУЧЕНИЕ ПЕНОСТЕКЛОМАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВТОРИЧНОГО СТЕКОЛЬНОГО СЫРЬЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ СТРУКТУРНЫХ И РАДИОЗАЩИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Введение

Для увеличения энергоэффективности зданий и сооружений, снижения затрат основных строительных материалов, уменьшения толщины и облегчения ограждающих конструкций в современной строительной отрасли активно применяются различные виды теплоизоляционных материалов [1]. Проблема воздействия электромагнитного излучения (ЭМИ) выдвигает дополнительные требования к современным строительным материалам, в том числе, теплоизоляционным, и может быть решена посредством создания новых материалов, обладающих радиозащитными свойствами.

Пеностекло представляет собой теплоизоляционный материал, в форме блоков или гранул, состоящий из вспененной стекломассы, которую получают из смеси порошка стекла с порообразователем. Основными преимуществами пеностекла перед другими теплоизоляционными материалами являются устойчивость к влаге, относительно высокая механическая прочность, негорючесть и биологическая стойкость [2–3].

Экономическая эффективность методики получения теплоизоляционных материалов может быть достигнута за счет снижения энергоёмкости процесса посредством введения в исходный состав отходов химической промышленности, полезных ископаемых,

различных видов стекольного сырья, а также поверхностно-активных веществ (ПАВ). Применение отходов и вторичных ресурсов в технологии получения пеностекломатериалов позволяет решить проблему их утилизации и повысить экологическую безопасность окружающей среды.

Таким образом, получение пеностекла, обладающего радиозащитными характеристиками, с применением вторичного стекольного сырья является актуальной задачей.

1. Материалы и методика эксперимента

Методика получения пеностекла на основе стекольного сырья предполагает несколько этапов. На первом этапе готовится шихта на основе стеклобоя и вспенивающей смеси, состоящей из натриевого жидкого стекла и ПАВ.

В качестве вторичного стекольного сырья был использован бой тарного полубелого стекла следующего химического состава: 67–68 масс.% SiO_2 , 10,5–11,0 масс.% CaO , 14,5–15,5 масс.% Na_2O , 6,5–8,0 масс.% оксидов Al , Fe , Mg , K и др. Оптимальный размер частиц стеклобоя не должен превышать 100 мкм [4], поэтому сырье предварительно измельчали на вибрационной микромельнице «FRITSCHE Pulverisette 0» (Германия). После измельчения стеклобой просеивали через сито с размерами ячейки 100 мкм. Были приготовлены три варианта составов из измельченного стеклобоя, натриевого жидкого стекла по ГОСТ 13078-81 [5] и ПАВ (таблица 1).

Таблица 1 – Составы сырьевой смеси для получения образцов пеностекломатериалов

№ состава	Компоненты		
	Стеклобой, масс. %	Водный раствор силикатов натрия, масс. %	ПАВ, масс. %
1	67,0	30,0	3,0
2	65,0	30,0	5,0
3	60,0	35,0	5,0

Полученную смесь высушивали в течение 2–4 часов и формировали порошкообразную массу. Затем массу засыпали в форму, стенки которой покрывали каолиновой пастой. Форма помещалась в муфельную печь и термообработывалась в муфельной печи SNOL 8,2/1100 в заданном температурном режиме (рисунок 1).

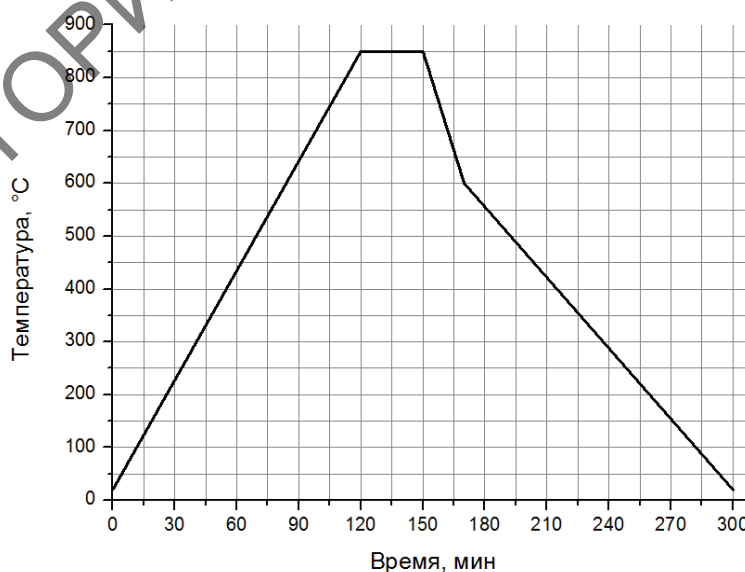


Рисунок 1 – Температурный график процесса термической обработки сырьевой смеси для получения пеностекла

После завершения термической обработки образцы извлекались из формы и обрабатывались до требуемых размеров.

2 Результаты и их обсуждение

Изображения структуры образцов представлены на рисунке 2.

Полученные образцы пеностекломатериалов имеют черную окраску и пористую структуру, практически равномерно распределенную по всему объему.

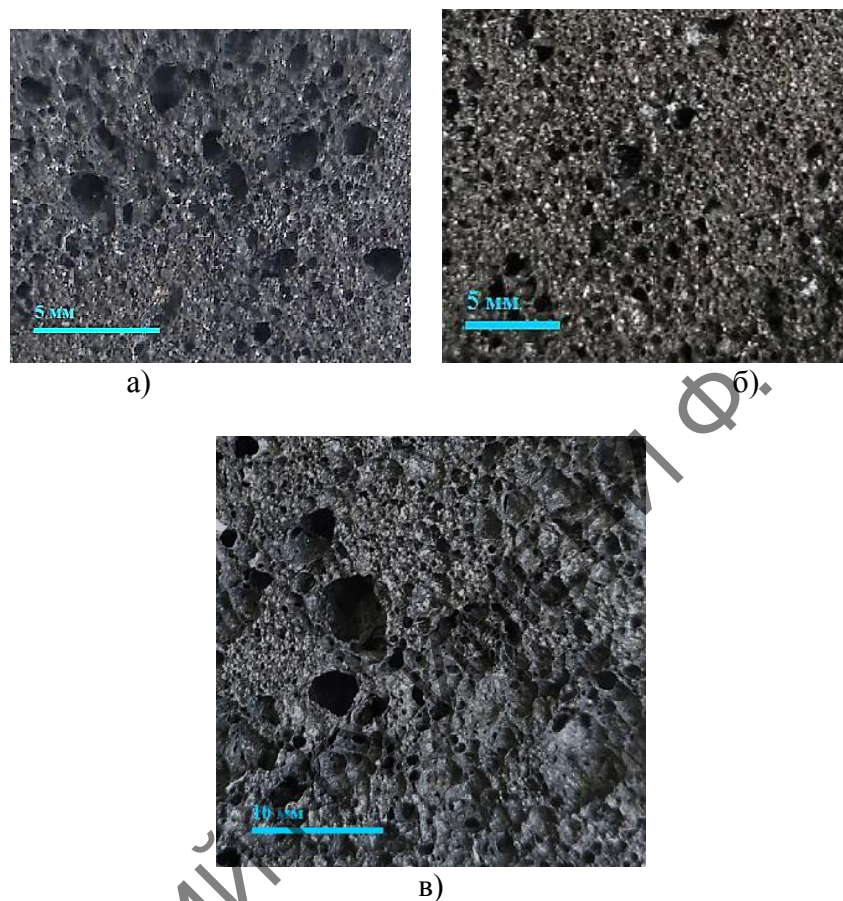


Рисунок 2 – Внешний вид структуры образцов пеностекломатериалов (а – образец №1, б – образец №2, в – образец №3)

Проведенные исследования показывают, что у образцов, изготовленных на основе молотого стеклосы, жидкого стекла и ПАВ, плотность находится в пределах 0,29–0,45 г/см³ (таблица 2). Повышение концентрации ПАВ позволяет снизить плотность получаемых пеностекломатериалов. Водопоглощение исследуемых образцов не превышает 10 масс. %.

Таблица 2 – Значения плотности и водопоглощения образцов пеностекломатериалов

№ образца	Водопоглощение за 24 ч, масс. %	Плотность, г/см ³	Диаметр пор, не более, мм
1	4,6	0,45	2,5
2	8,4	0,29	4,0
3	9,7	0,31	5,0

Радиозащитные свойства полученных образцов исследовали с помощью векторного анализатора цепей Rohde&Schwarz ZNB20. Были получены частотные зависимости коэффициента отражения электромагнитного излучения на частотах 8–12 ГГц (рисунок 3).

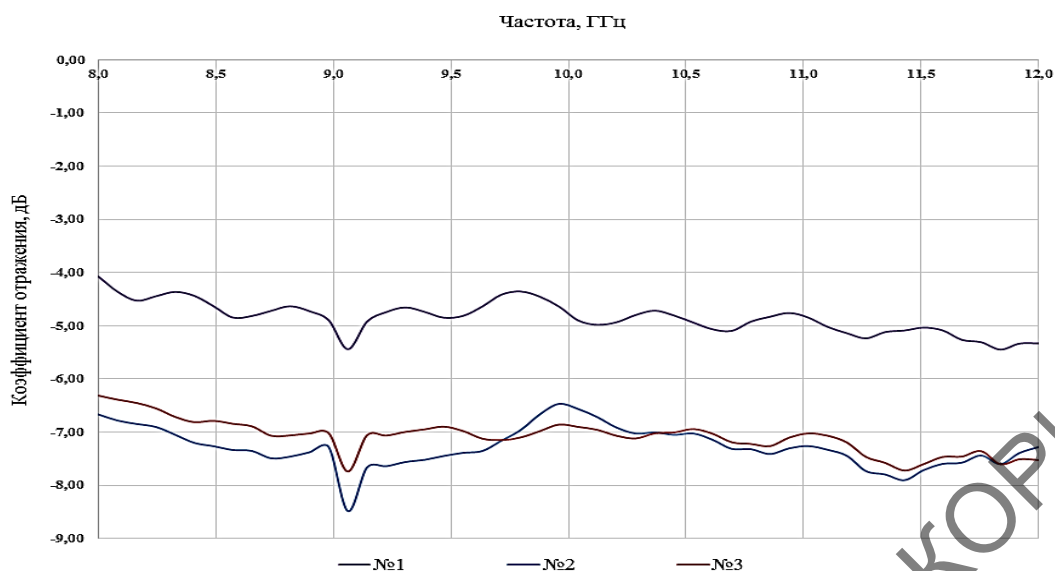


Рисунок 3 – Частотная зависимость коэффициента отражения ЭМИ полученных образцов пеностекломатериалов в диапазоне частот 8–12 ГГц

Полученные образцы пеностекломатериалов обладают коэффициентом отражения электромагнитного излучения от -4 дБ до -8,5 дБ в диапазоне частот 8–12 ГГц. Установлено, что увеличение концентрации ПАВ от 3 до 5 масс.% позволяет снизить коэффициенты отражения и передачи и повысить эффективность радиозащитных свойств получаемых материалов.

Заключение

Разработанная энергоэффективная методика позволяет получать пеностекломатериалы, характеристики которых удовлетворяют требованиям, предъявляемым к современным теплоизоляционным и радиозащитным материалам.

Полученные материалы могут применяться для теплоизоляции ограждающих конструкций в современном строительстве, а также в условиях, требующих уменьшения воздействия электромагнитного излучения.

Применение измельченного стеклобоя в качестве основного сырья позволяет решить проблему его утилизации и повысить экологическую безопасность окружающей среды.

Список использованных источников

1 Москвичёв, М. И. Пеностекломатериалы на основе стекольных отходов бытового и промышленного происхождения и силикатов щелочных металлов / М. И. Москвичёв, В. Е. Гайшун, В. В. Сидский [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – №4 (41). – С. 102–105.

2 Тихонов, В. Б. Особенности использования современных теплоизоляционных материалов на полимерной основе / В. Б. Тихонов, М. П. Колесниченко // Энергобезопасность и энергосбережение. – 2011. – №1. – С. 24–27.

3 Мелконян, Р. Г. Производство стеклообразных пеноматериалов: проблемы и решения / Р. Г. Мелконян [и др.] // Вестник Кольского научного центра РАН. – 2018. – №1(10). – С. 133–156.

4 Способ получения блочного пеностекла: пат. 2594416 Рос. Федерация, МПК С03С11/00, С03В19/08/ / К. А. Аблязов, А. Б. Жималов, А. А. Жималов, Ю. Г. Игитханян, Ю. Г. Иващенко; заявитель и патентообладатель Открытое акционерное общество «Саратовский институт стекла». – № 2015123451/03; заявл. 15.06.2015; опубл. 20.08.2016.

5 ГОСТ 13078–81. Стекло натриевое жидкое. Технические условия. – Введ. 1982-01-01 с изменениями. – Минск : Гос. комитет по стандартизации РБ. – 20 с.

В. Н. Мышковец, А. В. Максименко, Г. А. Баевич

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА РАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СВАРОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ

Основными параметрами, учитываемыми при оценке качества соединений при лазерной наплавке, являются геометрические размеры наплавки, прочность соединения, наличие внутренних и внешних дефектов, химический состав, структура металла наплавки и околошовной зоны [1].

При выборе термического режима при импульсной лазерной наплавке необходимо учитывать то обстоятельство, что в ходе обработки происходит испарение металла с поверхности, и в результате импульса отдачи паров происходит резкий прогиб поверхности расплава с последующим вытеснением (выплеском) металла из сварочной ванны [2]. Это препятствует получению плотных, беспористых швов и обеспечению их геометрических размеров.

Поэтому, для каждого металла и различных размеров присадочного материала существуют оптимальная форма и диапазон энергий и длительностей импульсов, в пределах которых наплавка получается бездефектная наплавка с минимальным количеством испарения поверхности [3].

На рисунке 1 представлены образцы наплавки, которые получены с использованием импульсов лазерного излучения различных по энергии при фиксированных значениях диаметра пятна d и длительности импульса τ ($d = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м, $\tau = 4 \cdot 10^{-3}$ с) на поверхность образцов из этой же стали в среде аргона.

Наплавка присадочного материала (сталь 30ХГСН2А) в виде проволоки диаметром $0,5 \cdot 10^{-3}$ м проводилась под действием импульсов треугольной формы с убывающим задним фронтом.

Диапазон значений плотности энергии в импульсе выбирался таким образом, чтобы плавление присадочного материала происходило в условиях плавления материала основы до глубины, равной или большей, половины радиуса наплавляемой присадки. На рисунках 1,а и 1,б представлен внешний вид застывшего металла при плавлении присадки и основы, которые сформированы под воздействием лазерного излучения с энергией в импульсе 12,5 Дж.

На рисунке 1, а наплавка выполнялась при воздействии одиночного импульса. В этих условиях наблюдается выплеск металла из зоны воздействия лазерного пучка, сопровождающийся прогибом поверхности сварочной ванны. При выполнении наплавки с применением серии таких же импульсов в металле сварочного соединения возникают дефекты в виде пор, а область расплава характеризуется неоднородным распределением геометрических размеров валика наплавки (рисунок 1, б).

При уменьшении энергии лазерного излучения до 3 Дж наблюдалось незначительное оплавление основы и частичное плавление присадки. Только при воздействии одиночного импульса с энергией излучения $E = (6,5 \div 7)$ Дж в зоне плавления не наблюдалось выплеска металла (рисунок 1, в), и поверхность наплавки имела выпуклую сферическую форму. При выполнении наплавки серией таких же импульсов в металле сварочного шва отсутствовали дефекты и не проплавленные участки (рисунок 1, г). Анализ данных исследований показал, что эффективность процесса наплавки, а также степень дефектности и однородности структуры наплавляемого металла во многом зависят от размерных параметров наплавки, которые определяются плотностью мощности лазерного излучения. Такими параметрами при импульсной лазерной наплавке являются глубина плавления основы и коэффициент формы валика наплавки [4]:

$$K=V/H,$$

где V – ширина валика наплавки; H – высота валика наплавки.

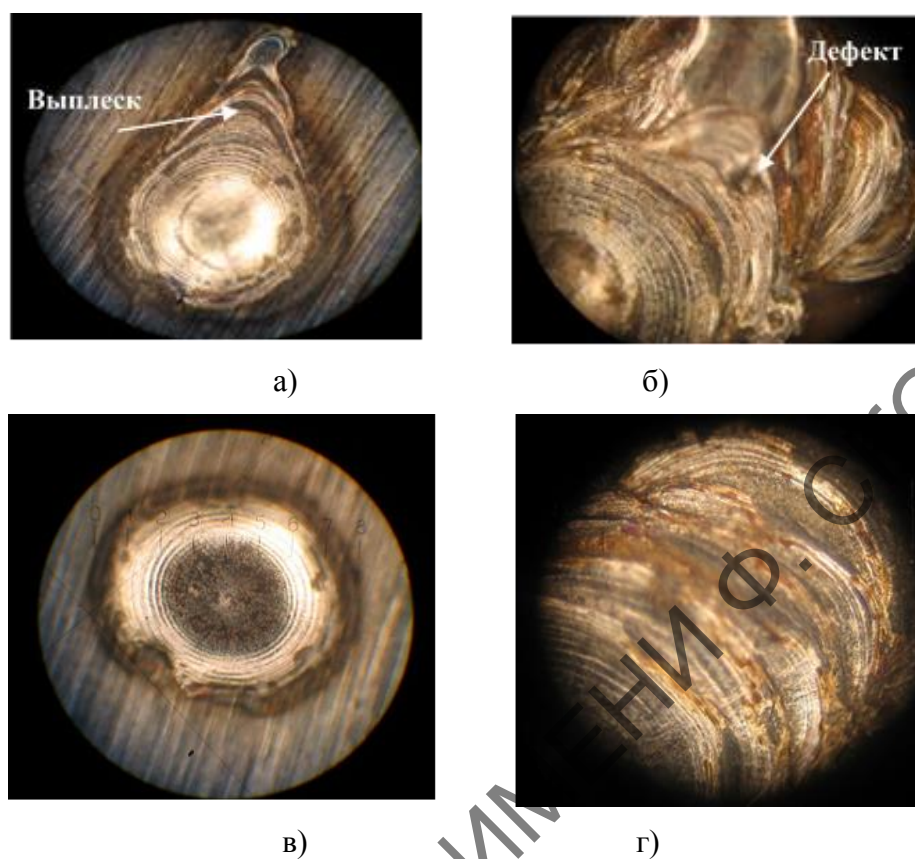


Рисунок 1 – Внешний вид зоны воздействия импульсного лазерного излучения при плавлении присадки на поверхности образца из стали 30 ХГСН2А (50^х): а) – одиночный импульс, $E = 14,5$ Дж; б) – серия импульсов, $E = 14,5$ Дж; в) – одиночный импульс, $E = 7$ Дж; г) – серия импульсов, $E = 7$ Дж

Известно, что при реализации высокоэффективных технологических процессов наплавки компактных присадочных материалов [5], значения коэффициента формы валика наплавки должны быть в пределах от 0,4 до 0,9. Глубина плавления основы, как было отмечено ранее, не должна быть меньше $\frac{1}{2}$ радиуса присадочного материала в виде проволоки. О максимальном значении глубины плавления, при превышении которого наблюдается снижение эффективности и качества наплавки, сведения в научно-технической литературе отсутствуют.

В силу этого обстоятельства в настоящей работе были проведены экспериментальные исследования по определению зависимости коэффициента формы валика наплавки, а также глубины плавления основы от энергии и длительности импульсов лазерного излучения. В ходе исследований необходимо было установить оптимальный для наплавки диапазон значений коэффициента формы валика и глубины плавления основы, при которых обеспечивается эффективная и качественная наплавка.

Наплавка присадочных материалов (проволока диаметром $0,5 \cdot 10^{-3}$ м) из легированных сталей 30ХГСА и 30ХГСН2А проводилась на поверхности образцов, изготовленных из этих же сплавов. Расплав формировался под воздействием одиночного импульса лазерного излучения в среде аргона (расход газа 3–4 л/мин). Экспериментальные исследования проводились на основе исходных данных, полученных в ходе теоретических рас-

четов зависимости глубины плавления основы от энергии и длительности импульсов лазерного излучения, приведенных в третьем разделе настоящей работы. При выборе диаметра сфокусированного пятна лазерного излучения учитывалось соотношение между необходимой площадью нагрева и плотностью мощности, требуемой для получения заданной глубины плавления без выплеска металла в зоне обработки. Результаты данных экспериментальных исследований представлены в таблице 1 и на рисунке 2.

Таблица 1 – Величина коэффициента формы валика наплавки для сталей 30ХГСА, 30ХГСН2А в зависимости от энергии и значений длительности импульсов лазерного излучения $\tau = 4, 6, 8, 10 \cdot 10^{-3}$ с

Энергия импульса, Дж	Коэффициент формы валика наплавки для τ .							
	$4 \cdot 10^{-3}$ с		$6 \cdot 10^{-3}$ с		$8 \cdot 10^{-3}$ с		$10 \cdot 10^{-3}$ с	
	30ХГСА	30ХГСН2А	30ХГСА	30ХГСН2А	30ХГСА	30ХГСН2А	30ХГСА	30ХГСН2А
4	0,75	0,77	*	*	*	*	*	*
6	0,70	0,73	0,72	0,74	*	*	*	*
8	0,63	0,60	0,68	0,70	0,65	0,70	*	*
10	0,40	0,38	0,56	0,61	0,57	0,62	*	*
12	**	**	0,50	0,55	0,49	0,45	0,45	0,53
14	**	**	0,41	0,43	0,40	0,42	0,39	0,40

* Глубина плавления меньше половины радиуса присадки;
 ** Глубина плавления больше $\frac{1}{2}$ диаметра присадки.

Анализируя полученные результаты, видим, что значения коэффициента формы валика наплавки для стали 30ХГСА не существенно отличаются от значений, характерных для стали 30ХГСН2А. Основными параметрами, обуславливающими изменение величины коэффициента формы валика наплавки, являются энергия импульса лазерного излучения и его длительность.

При изменении энергии импульсов лазерного излучения от 4 до 14 Дж и длительности от $4 \cdot 10^{-3}$ с до $10 \cdot 10^{-3}$ с значения коэффициента формы валика наплавки изменяются от 0,77 до 0,38. При определенных соотношениях между длительностью и энергией импульса лазерного излучения, например, при $E = 6$ Дж и $\tau = 6 \cdot 10^{-3}$ с глубина плавления основы меньше половины радиуса присадки. Выполнение наплавки в соответствии с данными технологическими режимами приводит к тому, что в наносимых покрытиях наблюдаются непровары между основой и присадкой, расположенные по краю наплавленного металла. Для значения энергии импульса излучения больше $E = 10$ Дж и длительности равной $4 \cdot 10^{-3}$ с, в зоне наплавки происходит выплеск металла. При этом коэффициент формы наплавки меньше 0,38, а глубина плавления основы составляет $(2,5-2,7) \cdot 10^{-4}$ м.

Из этих данных следует, что максимальная глубина плавления основы не должна быть больше $\frac{1}{2}$ диаметра присадочного материала ($2,5 \cdot 10^{-4}$ м). Превышение данной величины обуславливает снижение коэффициента формы наплавки до значений меньших 0,4 и выплеск жидкого металла из зоны воздействия лазерного излучения.

На основании анализа полученных результатов можно предположить, что для получения эффективной и качественной наплавки с использованием присадки диаметром $0,5 \cdot 10^{-3}$ м необходимо задавать параметры лазерного излучения таким образом, чтобы глубина плавления основы была не меньше половины радиуса присадки и не превышала величины $\frac{1}{2}$ её диаметра.

При наплавке высокопрочных легированных сталей увеличение длительности импульса лазерного излучения сопровождается уменьшением плотности энергии и, как следствие, уменьшением глубины плавления. Поэтому для достижения глубины плавления основы, соответствующей диапазону оптимальных значений, и с целью обеспечения надлежащей прочности соединения и качества наплавки необходимо, увеличивая длительность лазерного импульса, увеличивать его энергию. Как видно из рисунка 2, для

плавления до глубины $2,4 \cdot 10^{-4}$ м с использованием присадки диаметром $0,5 \cdot 10^{-3}$ м при увеличении длительности импульса до $6 \cdot 10^{-3}$ с необходимо повысить энергию до 10 Дж.

Экспериментально полученные зависимости глубины плавления основы от энергии и длительности импульсов лазерного излучения и данные, представленные в таблице 1, позволили определить предельно допустимые энергетические и временные параметры лазерного излучения (заштрихованные области на рисунке 2), при которых обеспечивается эффективное и качественное нанесение покрытий на поверхность образцов из стали 30ХГСА и 30ХГСН2А присадочным материалом диаметром $0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

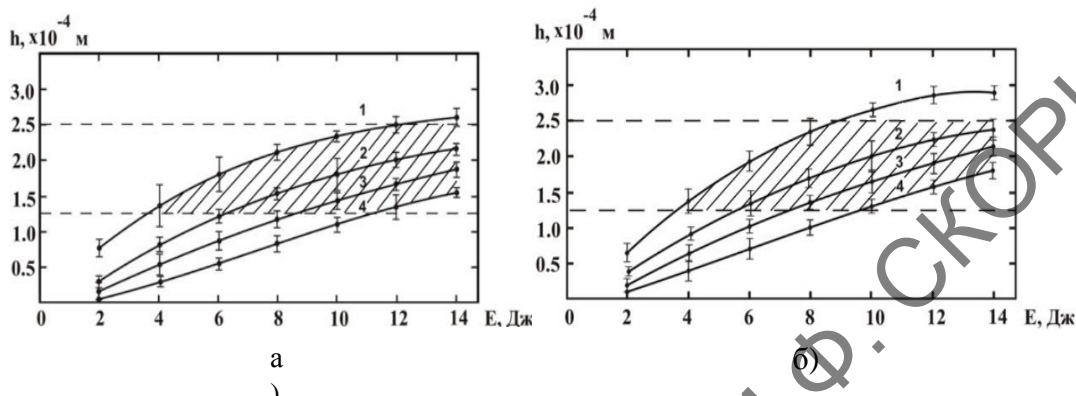


Рисунок 2 – Зависимость глубины плавления основы от энергии лазерного излучения:
 1, 2, 3, 4 – при длительности импульса $4 \cdot 10^{-3}$ с, $6 \cdot 10^{-3}$ с, $8 \cdot 10^{-3}$ с, $10 \cdot 10^{-3}$ с,
 соответственно: а) – сталь 30ХГСА; б) – сталь 30ХГСН2А
 1 – $\tau = 4 \cdot 10^{-3}$ с; 2 – $\tau = 6 \cdot 10^{-3}$ с; 3 – $\tau = 8 \cdot 10^{-3}$ с; 4 – $\tau = 10 \cdot 10^{-3}$ с

Список использованных источников

- 1 Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы: сб. науч. тр.; ред. Н. Н. Рыкалин. – Москва : Наука, 1985. – 256 с.
- 2 Левин, Ю. Ю. Расчет параметров импульсной лазерной сварки алюминиевых сплавов малой толщины / Ю. Ю. Левин, В. А. Ерофеев. // Сварочное производство. – 2008. – № 4. – С. 20–24.
- 3 Григорьянц, А. Г. Основы лазерной обработки материалов / А. Г. Григорьянц. – Москва : Машиностроение, 1989. – 304 с.
- 4 Петров, Г. Л. Теория сварочных процессов / Г. Л. Петров, А. С. Тумарев. – Москва : Машиностроение, 1987. – 462 с.
- 5 Грезев, А. Н. Трещинообразование сплавов, наплавление с помощью лазера / А. Н. Грезев, А. Н. Сафонов // Сварочное производство. – 1986. – № 3. – С. 6–8.

Т. Д. Нгуен¹, А. И. Занько², Т. К. То¹, Д. А. Голосов¹,
 С. Н. Мельников¹, В. В. Колос²

¹г. Минск, БГУИР

²г. Минск, ОАО «Интеграл»

ВЛИЯНИЕ ОТЖИГА НА КРИСТАЛЛИЗАЦИЮ И ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛЕНОК ОКСИДА ВАНАДИЯ

Введение. Повышенный интерес к тонким пленкам оксида ванадия (VO_x) во многом обусловлен их терморезистивными, электрохромными и фотохромными свойствами. Пленки оксида ванадия находят применение в качестве чувствительных элементов неохлаждаемых болометрических приемников ИК излучения, активных слоев электрохромных

дисплеев, управляемых светофильтров и т. п. [1]. При этом используется главное свойство оксида ванадия – фазовый переход, сопровождающийся изменением проводимости и оптических характеристик [2]. Причем степень изменения этих характеристик строго зависит от стехиометрического состава и кристаллической структуры пленок. Оксид ванадия имеет более двадцати разных оксидных состояний и большинство из них не обладают необходимыми свойствами. Поэтому формирование однофазных тонких пленок оксида ванадия с требуемым составом является сложной задачей. Для повышения кристалличности пленки, изменения ее стехиометрии, а также получения требуемой фазы используется отжиг [3]. Процесс отжига является ключевым фактором, определяющим конечную структуру и свойства пленок оксида ванадия. Один из методов получения определенной фазы оксида ванадия заключается в том, что первоначально получают пленки высшего оксида V_2O_5 , после чего проводится высокотемпературный (500–1000 °С) отжиг в вакууме, инертной среде или в восстановительной атмосфере. Однако и при высокотемпературном восстановлении из V_2O_5 возникает целый ряд проблем: изменение характеристик ранее сформированных МДП структур, взаимодействие материалов пленки и подложки, и т. п. Одним из возможных путей решения данной задачи является нанесение низших оксидов (VO_2 , V_2O_3) и дальнейшее их окисление и/или кристаллизация. Поэтому исследование возможности относительно низкотемпературного синтеза однофазных пленок низших оксидов ванадия представляет собой актуальную задачу. Таким образом целью работы являлось исследование влияния параметров процесса отжига на структуру и оптические характеристики пленок оксида ванадия, нанесенных методом импульсного реактивного магнетронного распыления.

1. Методика проведения эксперимента. Пленки оксида ванадия наносились методом импульсного реактивного магнетронного распыления V мишени (чистота 99,96 %) в среде Ar/O_2 рабочих газов. Схема установки магнетронного нанесения и методика проведения экспериментов по нанесению пленок описана в статье [4]. Пленки наносились на структуры Si_3N_4/Si и оптическое стекло BK7 при следующих условиях: ток разряда $I_t = 1,5$ А, потоки аргона и кислорода $Q_{Ar} = 50$ мл/мин, $Q_{O_2} = 10$ мл/мин, время нанесения 6 мин 40 с. При этом напряжение разряда составляло $U_t = 525$ В. Толщина нанесенных пленок составляла порядка 150 нм. Для формирования кристаллической структуры нанесенные пленки подвергались отжигу в атмосфере кислорода на установке ИК нагрева R-321B2AN (Nabertherm, Германия). Температура отжига изменялась от 100 до 450 °С. Время отжига варьировалось от 10 до 120 мин.

Изображения поверхности пленки получены с помощью оптического микроскопа Micro 200. Электронномикроскопические изображения поверхности и бокового скола пленок получены методом сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) с помощью высокоразрешающего автоэмиссионного растрового электронного микроскопа Hitachi S-4800. Структура и фазовый состав нанесенных пленок определялись методами дифракции обратно-отраженных электронов (EBSD) и рамановской спектроскопии. Для исследования пленок методом EBSD использовался двухлучевой электронно-ионный микроскоп Versa 3D Lovac (США). Дифракционные картины получены при угле наклона подложки 70°. Исследования комбинационного рассеяния света пленок были проведены на сканирующем конфокальном микроскопе SOL Instrument Confotec NR500 ($\lambda = 473$ нм, $P = 3$ мВт). Спектры оптического пропускания пленок в диапазоне 300–900 нм получены с помощью спектрофотометра Проскан MC-121.

2. Результаты и их обсуждение. Проведены исследования влияния отжига на процессы кристаллизации пленок. На рисунке 1 представлены СЭМ изображен пленок оксида ванадия, отожженных при различной температуре (время отжига $t = 10$ мин). Непосредственно после нанесения пленки оксида ванадия обладали высокой сплошностью и низкой шероховатостью поверхности (рисунок 1 а). Методом EBSD установлено, что пленки имели аморфную структуру. Аморфное состояние пленок также подтверждено методом рамановской спектроскопии (рисунок 2 а). При отжиге процессы кристаллизации отмечались при температурах более 300 °С (рисунок 1 б). При этом структура пленок

становилась зернистой в виде квазисферических кристаллитов размером до 100 нм. По мере увеличения температуры отжига размеры зерен увеличивались, что приводило к формированию на поверхности сплошной зернистой структуры с поперечным размером зерен до 200 нм (рисунок 1 *в, з*). Методом EBSD установлено, что при температурах 300–450 °С формировалась поликристаллическая структура с моноклинной, кубической или смешанной моноклинной/кубической кристаллической решеткой. Методом рамановской микроскопии также установлено, что отожженные пленки имели поликристаллическую структуру и представляли собой смесь оксидов VO_2 , V_6O_{13} и V_2O_5 (рисунок 2 *б*).

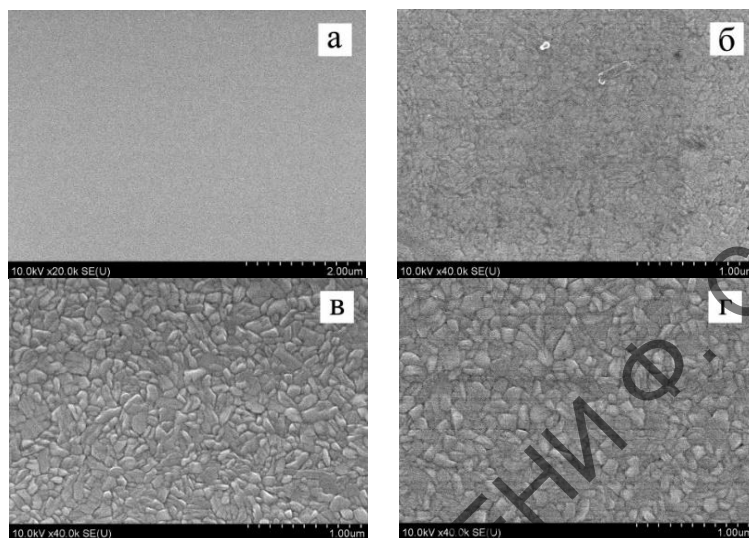


Рисунок 1 – СЭМ изображения поверхности пленок оксида ванадия после нанесения (а) и после отжига при различной температуре: б – 350 °С, в – 400 °С, з – 450 °С ($t = 10$ мин)

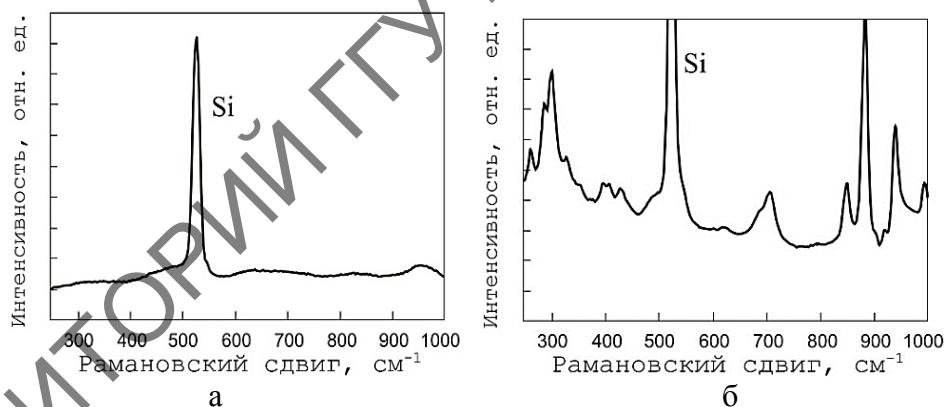


Рисунок 2 – Спектры комбинационного рассеяния пленок оксида ванадия после нанесения (а) и отжига при температуре 400 °С (б) ($t = 10$ мин)

Установлено, что на структура пленок также зависела от времени отжига. На рисунке 3 представлены оптические изображения поверхности пленок, отожженных при температуре 400 °С и различном времени отжига. Время отжига изменялось от 10 до 120 мин. При отжиге 10 мин (рисунок 3 *а*) пленка становилась пятнистая, что связано с формированием ряда областей, в которых оксид ванадия находится в разных оксидных состояниях. Также на поверхности пленки формировались круглые кристаллиты, которые имели выпуклую форму. Эти образования при проведении более длительных отжигов являлись центрами кристаллизации. При увеличении времени отжига из центров кристаллизации начинался рост кристаллов в виде ветвей (рисунки 3 *б*), которые при отжиге более 60 мин превращались в сплошную поликристаллическую структуру (рисунок 3 *в*).

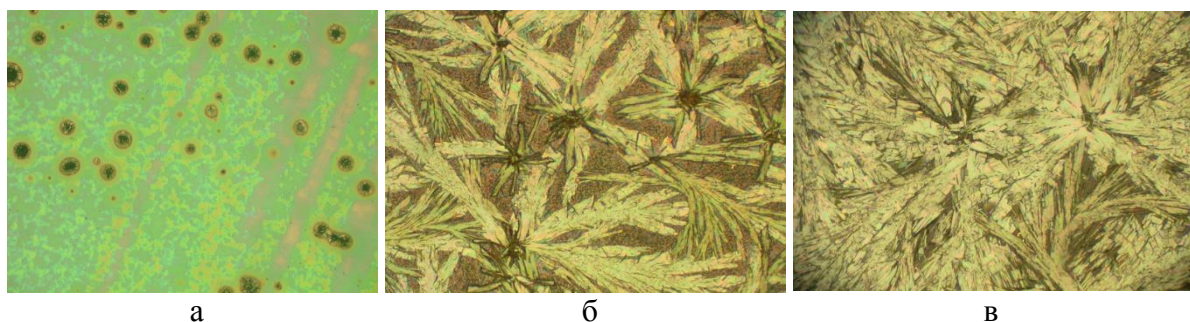


Рисунок 3 – Оптическое изображение поверхности пленки оксида ванадия после отжига при $T = 400\text{ }^{\circ}\text{C}$ и различном времени отжига: $a - 10$ мин, $b - 20$ мин, $c - 120$ мин ($\times 1000$ крат)

Проведены исследования влияния температуры отжига на изменение оптического пропускания пленок оксида ванадия. Для этого пленки наносились на оптическое стекло BK7. На рисунке 4 представлены спектры пропускания пленок, отожженных в атмосфере O_2 при различной температуре и времени отжига 10 мин. После нанесения пропускание пленок на длине волны 630 нм составляло около 10 % и увеличивалось до 25 % на длине волны 900 нм. После отжига при температурах $T = 100\text{--}200\text{ }^{\circ}\text{C}$ изменения оптических характеристик не отмечалось.

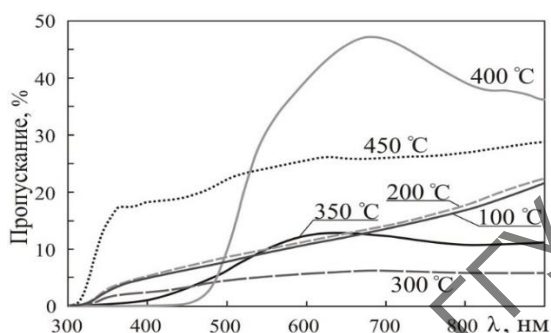


Рисунок 4 – Спектры пропускания пленок оксида ванадия, отожженных при различной температуре ($t = 10$ мин)

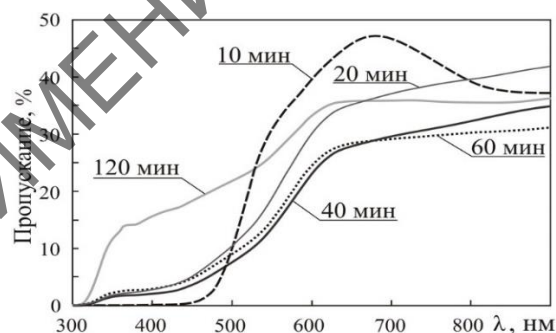


Рисунок 5 – Спектры пропускания пленок оксида ванадия, отожженных при температуре $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ и различном времени отжига

При $T = 250\text{--}300\text{ }^{\circ}\text{C}$ оптическое пропускание пленок снижалось до 6 % и край оптического пропускания смещался в длинноволновую область спектра. Дальнейшее увеличение температуры приводило к увеличению оптического пропускания. В результате отжига при температурах $350\text{--}400\text{ }^{\circ}\text{C}$ пропускание пленок увеличивалось до 30–45 % и край оптического пропускания смещался до 500–520 нм. При $T = 450\text{ }^{\circ}\text{C}$ оптическое пропускание пленок снижалось до 26 % и край оптического пропускания смещался до 330 нм. Время отжига также оказывало большое влияние на оптическое пропускание пленок оксида ванадия (рисунок 5). При температуре отжига $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ и увеличении времени отжига с 10 до 20 мин происходило резкое изменение формы спектра. Спектры пропускания пленок, отожженных от 20 до 60 мин имели сходный характер. Однако при отжиге 120 мин край оптического пропускания сдвигался с 550 до 300 нм. Данное поведение связано с тем, что нанесенные пленки представляют собой смесь различных оксидов ванадия. При увеличении температуры и длительности отжига происходит кристаллизация пленок и последовательный переход от одного оксидного состояния к следующему с изменением кристаллической решетки. По-видимому, при высоких температурах и большой длительности про-

цесса отжига в результате будет формироваться предельный оксид V_2O_5 . Это свидетельствует о том, что процессы кристаллизации и фазообразования имеют длительный характер. Изменение пропускания и края оптического пропускания пленок свидетельствует об изменении концентраций различных оксидов в пленке, имеющих различную ширину оптической запрещенной зоны, коэффициенты преломления и поглощения.

Заключение. Проведены исследования влияния температуры и времени отжига в атмосфере кислорода на структуру и оптические характеристики пленок оксида ванадия. Установлено, что после нанесения пленки оксида ванадия имеют аморфную структуру. Процессы кристаллизации наблюдаются при температурах более $300\text{ }^\circ\text{C}$. В результате отжига пленок в атмосфере кислорода при температурах $300\text{--}450\text{ }^\circ\text{C}$ формируются поликристаллические пленки с моноклинной, кубической или смешанной моноклинной/кубической кристаллической решеткой, представляющие собой смесь оксидов VO_2 , V_6O_{13} и V_2O_5 .

Исследования выполнены при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научных проектов № Т19КИТГ-016 и № Т20КИТГ-013.

Список использованных источников

1 Mauger, A. Review V_2O_5 thin films for energy storage and conversion / A. Mauger, Ch. M. Julien // *AIMS Materials Science*. – 2018. – Vol. 5, № 3. – P. 349–401.

2 Strain-induced self organization of metal-insulator domains in single-crystalline VO_2 nanobeams / J. Wu [et al.] // *Nano Letters*. – 2006. – Vol. 6, № 10. – P. 2313–2317.

3 Semiconductor to metal phase transition in the nucleation and growth of VO_2 nanoparticles and thin films / J. Y. Suh [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 2004. – Vol. 96, № 2. – P. 1209–1213.

4 Нгуен, Т. Д. Электрофизические свойства пленок оксида ванадия, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления / Т. Д. Нгуен [и др.] // *Доклады БГУИР*. – 2020. – Т. 18, № 6. – С. 94–102.

Ю. В. Никитюк, А. Н. Сердюков, С. В. Шалупаев, А. А. Серeda
г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

ЭФФЕКТИВНАЯ ДВУЛУЧЕВАЯ СХЕМА РАСКАЛЫВАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ СТРУКТУР ИЗ ПЛАСТИН КРЕМНИЯ И СТЕКЛЯННЫХ ПОДЛОЖЕК

Для разделения приборных пластин на кристаллы используется механическое и лазерное скрайбирование, резка с помощью алмазных дисков и лазерное раскалывание [1–3]. При этом успешная реализация лазерного раскалывания кристаллических и аморфных материалов обеспечивается за счет применения двулучевых схем обработки [4–5]. Использование двулучевых технологий характеризуется высокой эффективностью при обработке структур, состоящих из различных материалов [6].

Применение двухслойных структур из монокристаллического кремния и стекла широко используется при изготовлении полупроводниковых микроэлектромеханических устройств [1, 7].

В работе [8] представлены результаты исследования двулучевого лазерного раскалывания двухслойных структур из кремния и стекла с учетом анизотропии упругих свойств монокристаллического кремния при последовательном лазерном нагреве пучками с длинами волн равными $1,06\text{ }\mu\text{m}$ и $10,6\text{ }\mu\text{m}$ и воздействии хладагента.

В данной работе представлены результаты конечно-элементного моделирования лазерного раскалывания данных двухслойных структур при использовании более эффективной схемы обработки (см. рисунок 1).

Численное моделирование лазерного раскалывания двухслойных структур из монокристаллического кремния и стекла было выполнено в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке [9]. Для определения параметров формирования лазерно-индуцированной трещины был применен критерий максимальных растягивающих напряжений [10].

При расчетах считалось, что удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности и плотность стекла ЛК5 и монокристаллического кремния постоянны и равны соответственно $C_1 = 795$ Дж/Кг·°С, $\lambda_1 = 1,13$ Вт/м·К, $\rho_1 = 2270$ кг/м³ для стекла и $C_2 = 758$ Дж/Кг·°С, $\lambda_2 = 109$ Вт/м·К, $\rho_2 = 2330$ кг/м³ для кремния. Был выполнен учет зависимости коэффициентов линейного термического расширения материалов от температуры. Коэффициент Пуассона, модуль упругости, для стекла полагались равными $\nu_1 = 0,184$, $E_1 = 68,5$ ГПа. При расчетах были использованы следующие константы упругой жесткости кристаллического кремния: $C_{11} = 165,6$ -ГПа, $C_{12} = 63,9$ -ГПа, $C_{44} = 79,5$ -ГПа [1,7, 11–15].

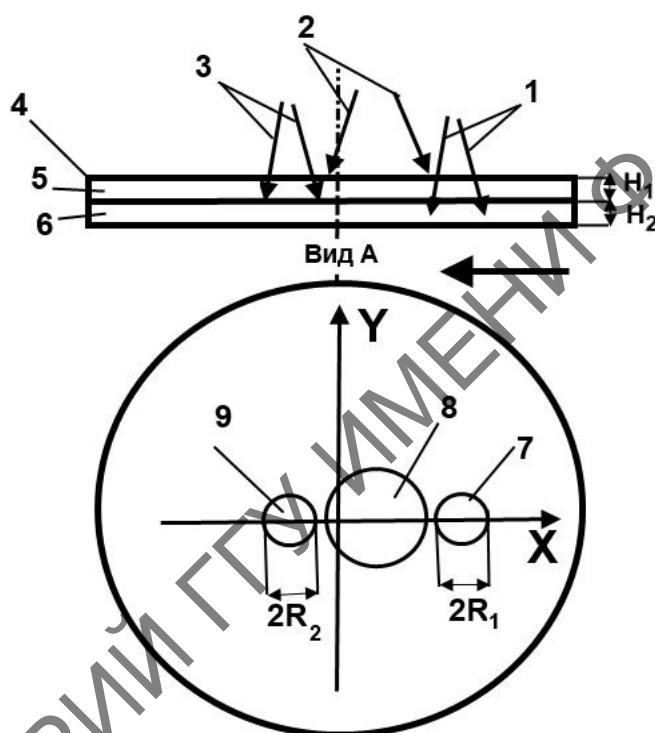


Рисунок 1 – Схема пространственного расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента

- 1 – лазерный пучок с длиной волны 1,06 мкм; 2 – хладагент;
- 3 – лазерный пучок с длиной волны 10,6 мкм;
- 4 – обрабатываемая двухслойная структура из монокристаллического кремния 5 и стекла;
- 6, 7 – сечение лазерного пучка 1 в плоскости обработки; 8 – зона воздействия хладагента;
- 9 – сечение лазерного пучка 2 в плоскости обработки.

При моделировании использовались следующие параметры лазерных пучков: радиус пятна излучения $R_2 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м для пучка с длиной волны излучения $\lambda_2 = 10,6$ мкм и мощностью излучения $P_0 = 10$ Вт, радиус пятна излучения $R_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м для пучка с длиной волны излучения $\lambda_1 = 1,06$ мкм и мощностью излучения $P_0 = 200$ Вт. Моделирование было выполнено для двухслойных дисков из монокристаллического кремния и стекла с радиусом $R = 15,5$ мм (толщина слоя стекла $H_2 = 0,5$ мм, толщина слоя кремния $H_1 = 0,5$ мм). Скорость обработки была равна $V = 10$ мм/с.

Расчет термоупругих полей в двухслойной структуре для каждого из шести пространственных вариантов расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента, выполнялся для шести различных вариантов, учитывающих анизотропию кремниевого слоя: I a – анализ среза (100), при резке в направлении [001]; I b – анализ среза (100), при резке в направлении [011]; II a – анализ среза (110), при резке в направлении [1–10]; II b – анализ среза (110), при резке в направлении [001]; II c – анализ среза (110), при резке в направлении [1–11], III – анализ среза (111), при резке в направлении [1–10].

В таблице 1 представлены расчетные значения максимальных по величине напряжений растяжения и сжатия в зоне обработки.

Таблица 1 – Расчетные значения максимальных по величине напряжений растяжения и сжатия в зоне обработки двухслойной структуры

Вариант среза кремния		Ia	Ib	IIa	IIb	IIc	III
Максимальные напряжения в зоне обработки σ_{yy} , МПа	растяжения	45	48	47	54	53	58
	сжатия	111	111	118	132	125	140

На рисунках 2–3 приведены распределения температурных полей и полей термоупругих напряжений, формируемых в двухслойной структуре для предложенной схемы обработки при резке в направлении [001] среза (100) монокристаллического кремния (вариант Ia).

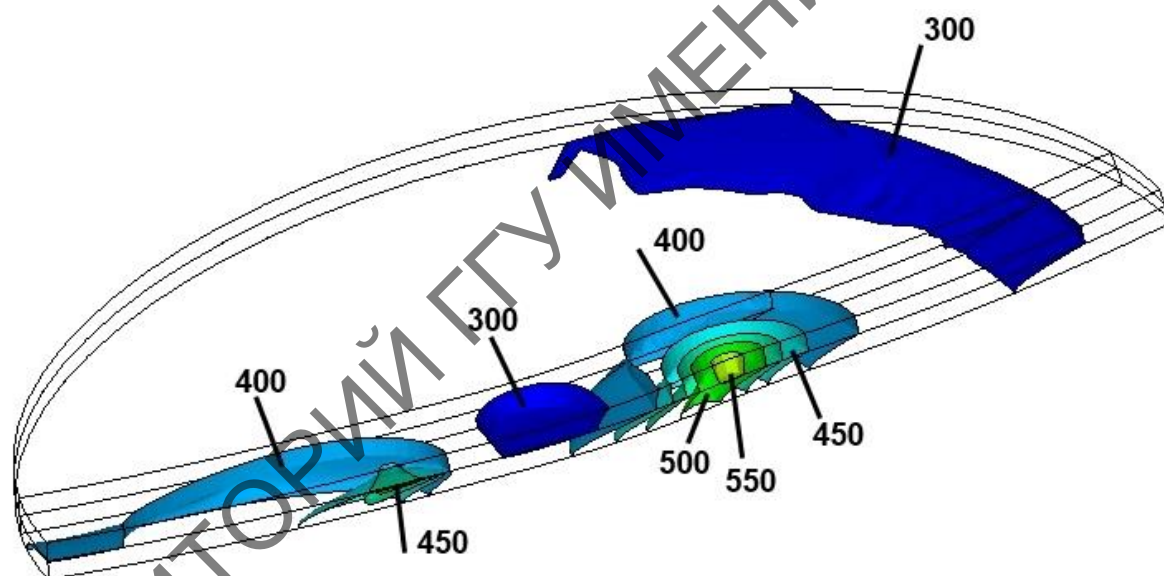


Рисунок 2 – Распределение температуры в объеме обрабатываемого двухслойного образца, К

Анализ данных представленных в таблице 1 и на рисунках 1–2 показывает, что при реализации предложенной двулучевой схемы (см. рисунок 1) максимальные значения температур и термоупругих напряжений в зоне обработки немного ниже значений полученных при реализации соответствующей двулучевой схемы исследуемой в [9]. При этом применение предложенной схемы обеспечивает формирование в слое стекла области растягивающих напряжений, примыкающей к области растягивающих напряжений сформированных в слое кристаллического кремния в результате воздействия лазерного пучка с длиной волны 1,06 мкм и хладагента. Такая пространственная конфигурация термоупругих полей является необходимым условием формирования лазерно-индуцированных трещин с заданными геометрическими характеристиками при резке двухслойных структур из кристаллического кремния и стекла.

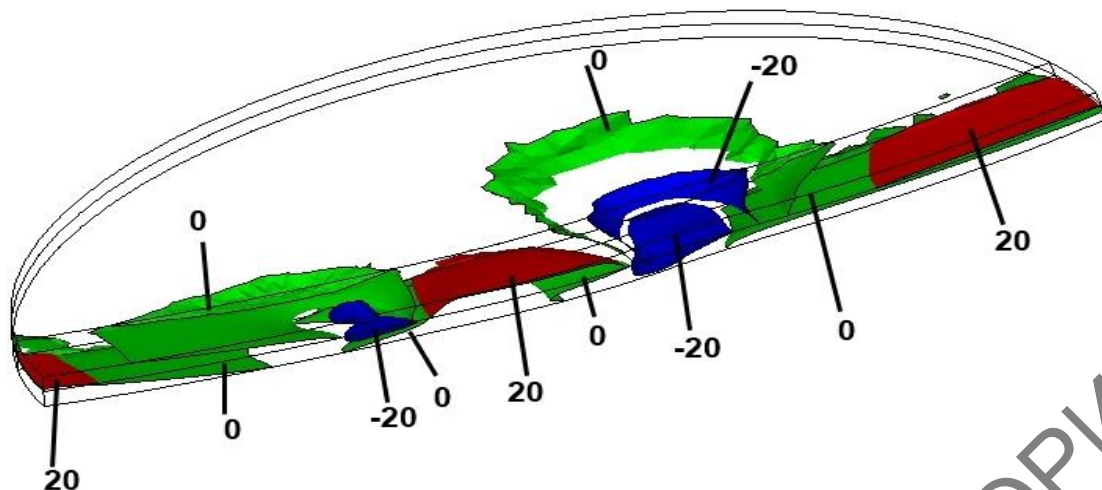


Рисунок 3 – Распределение напряжений σ_{yy} в объеме обрабатываемого двухслойного образца, МПа

Список использованных источников

1 Cai, Y. C. Laser cutting silicon-glass double layer wafer with laser induced thermal-crack propagation / Y. C. Cai, L. J. Yang, H. Z. Zhang, Y. Wang // Optics and Lasers in Engineering. – 2016. – Vol. 82. – P. 173–185.

2 Способ резки неметаллических материалов : пат. 2404931 РФ, МКИ 5 C03B33/09 / В. С. Кондратенко, А. С. Наумов; заявитель В. С. Кондратенко; заявл. 28.08.2009. – Оpubл. 27.11.2010.

3 Сердюков, А. Н. Особенности управляемого лазерного термораскалывания кристаллического кремния / А. Н. Сердюков, С. В. Шалупаев, Ю. В. Никитюк // Кристаллография. – 2010. – Т. 55, № 6. – С. 1180–1184.

4 Junke, J. Cutting glass substrates with dual-laser beams / J. Junke, W. Xinbing // Optics and Lasers in Engineering. – 2009. – Vol. 47. – P. 860–864.

5 Двухлучевое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов / С. В. Шалупаев, Е. Б. Шершневу, Ю. В. Никитюк, А. А. Середина // Оптический журнал. – 2005. – Т. 73, № 5. – С. 62–66.

6 Лазерная резка керамических материалов с металлизированной поверхностью / С. В. Шалупаев, А. В. Максименко, В. Н. Мышковец, Ю. В. Никитюк // Оптический журнал. – 2001. – Т. 68, № 10. – С. 41–44.

7 Синев, Л. С. Оценка механических напряжений в соединенных при повышенной температуре кремнии и стекле / Л. С. Синев // Наука и Образование МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. – 2014. – № 12 – С. 946–960

8 Никитюк, Ю. В. Исследование процесса лазерного раскалывания двухслойных структур из пластин кремния и стеклянных подложек / Ю. В. Никитюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С44–49

9 Шабров, Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н. Н. Шабров. – Ленинград : Машиностроение, 1983. – 212 с.

10 Карзов, Г. П. Физико – механическое моделирование процессов разрушения / Г. П. Карзов, Б. З. Марголин, В. А. Шевцова. – Санкт-Петербург : Политехника, 1993. – 391 с.

11 Концевой, Ю. А. Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур / Ю. А. Концевой, Ю. М. Литвинов, Э. А. Фаттахов. – Москва : Радио и связь, 1982. – 240 с.

12 Lackner, T. Determination of axisymmetric elastic constants in anisotropic silicon for a thyristor tablet / T. Lackner // Journal of electronic materials. – 1989. – Vol. 18. – P. 19–24.

13 Акустические кристаллы / А. А. Блистанов [и др.]; под общ. ред. М. П. Шаскольской. – Москва : Наука, 1982. – 632 с.

14 Технология полупроводникового кремния / Э. С. Фалкевич [и др.]. – Москва : Металлургия, 1992. – 408 с.

15 Стекло оптическое бесцветное. Физико-химические свойства. Параметры : ГОСТ 13659-68. – Москва : Издательство стандартов, 1968. – 62 с.

Г. Б. Рахимов, Ф. И. Муртазаев, Н. Н. Султонов

г. Карши, Узбекистан, Каршинский инженерно-экономический институт

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ УТИЛИЗАЦИИ ДЫМОВЫХ ГАЗОВ НА УСТАНОВКЕ ПОЛУЧЕНИЯ СЕРЫ (ШУРТАНСКИЙ ГАЗОХИМИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС)

В настоящее время для очистки углеводородных газов от H_2S и CO_2 , а также утилизации отходящих газовых выбросов сернистых соединений применяются многочисленные процессы, основанные на химическом, физическом, или физико-химическом взаимодействии компонентов. При этом для больших потоков газа применяются, в основном, абсорбционные и адсорбционные процессы, так как они имеют более простую технологическую схему и высокую производительность. Выбор абсорбента или адсорбента определяется составом исходного и отходящего газа и способом утилизации. Для очистки сернистых природных газов применяются в основном абсорбенты алканоламины – моноэтаноламин (МЭА), диэтаноламин (ДЭА), и композиционный абсорбент-монодиэтаноламин (МДЭА)+ДЭА. При замене ДЭА на МДЭА появляется возможность селективно извлечь H_2S и смесей его с CO_2 в тех случаях, когда не требуется полная очистка газа от CO_2 и/или необходимо, чтобы в извлеченных кислых газах (H_2S+CO_2) концентрация H_2S была не выше 40 %, что позволяет перерабатывать их на установках Клауса.

Помимо селективности МДЭА характеризуется более низкой теплотой реакции с H_2S и CO_2 , меньшей коррозионностью и термохимической деградацией, что предопределяет его применение в процессах сероочистки. Выход серы зависит как от технологической схемы и условий проведения процесса, так и состава кислого газа. Концентрация CO_2 в кислом газе зависит от соотношения H_2S/CO_2 в очищенном и газе и типа процесса очистки газа. При низком соотношении H_2S/CO_2 необходимо применять селективные сорбента или использовать окислительные методы очистки газа.

Ужесточение норм по охране воздушного бассейна привело к необходимости увеличения выхода серы на установках Клауса. В зарубежном, например, в законодательном требуется обеспечение следующих норм по содержанию окислов серы на поверхности земли: среднегодовая концентрация $3 \cdot 10^{-6}$ и максимальная суточная концентрация $14 \cdot 10^{-6}$ % (объемн), допускаемая не более одного раза в год. Предполагается введение в дальнейшем более жестких норм, т. е. соответственно 2 и 10 % (объемн) окислов серы.

В республике Узбекистан за последние годы открыты крупные месторождения природного газа (Устюрт, и др.), содержащие значительные количества H_2S и CO_2 . Они служат сырьевой базой не только получения газа, но и производства серы. В газоперерабатывающей промышленности нашей республики для утилизации дымовых газов применяют процесс щелочной очистки, используемый, как правило, для тонкой доочистки газа после удаления основной массы кислых компонентов другими поглотителями. В связи с этим нами предложен новый вариант утилизации дымовых газов установки получения серы. Сырой газ (рисунок 1) контрактирует в абсорбционной колонне с раствором K_2CO_3 (2–5 % водный раствор) при повышенном давлении (100–2000) и кислые компоненты (H_2S, CO_2, COS, SO_3) абсорбируются.

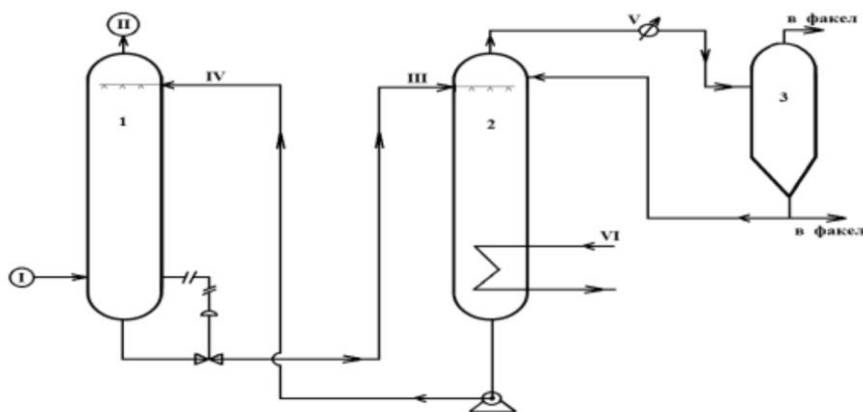


Рисунок 1 – Схема адсорбционной очистки H_2S и CO_2 с применением K_2CO_3
 1 – абсорбер; 2 – регенератор; 3 – сепаратор.
 I – сырой газ; II – очищенный газ; III – насыщенный раствор K_2CO_3 ;
 IV – регенированный раствор K_2CO_3 ; V – кислый газ; VI – пар.

Насыщенный раствор доводится до атмосферного давления и подвергается отпарке в регенерационной колонне для удаления абсорбированных кислых газов и регенированный раствор затем снова направляется в абсорбер-1. Для обработки газа с небольшими концентрациями кислых компонентов (примерно до 5% объем.) при отсутствии сероокиси углерода может быть использован процесс аминов очистки с применением МЭА, ДЭА и МДЭА, а также в комбинированном варианте этих абсорбентов. При очень высоких концентрациях кислых компонентов могут быть применены методы с использованием физических растворителей, особенно при высоком соотношении CO_2/H_2S . Окислительные процессы целесообразны при низкой производительности по сере, низком содержании H_2S и высоком отношении CO_2/H_2S в исходном газе.

Помимо селективности композиционный абсорбент МДЭА на основе характеризуется более низкой теплотой реакции с CO_2 и H_2S меньшей коррозионностью и термохимической деградацией, что предопределяет его применение в процессах утилизации дымовых газов установки получения серы ШГХК.

Экзотермичность реакции служит причиной смещения химического равновесия целевых процессов аминовой очистки при повышении температуры в сторону образования исходных веществ. Повышение температуры в абсорбере благоприятно влияет на селективность очистки при использовании МДЭА, но приводит к снижению скорости процессов массопередачи и повышению содержания H_2S в очищенном газе (рисунок 2).

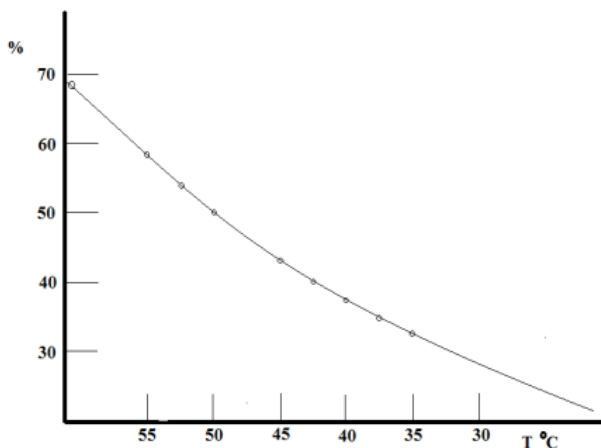


Рисунок 2 – Зависимость степени проскока CO_2 (γCO_2) от температуры абсорбции (Т)

Константа равновесия для реакции процесса абсорбции CO_2 с равновесными концентрациями компонентов очищенного газа позволяет вывести зависимость степени проскока CO_2 γ (где $\gamma = (\text{С}_{\text{вых}}/\text{С}_{\text{вх}}) \cdot 100\%$) от относительного количества газов ШГХК в исходной смеси, т. е. от концентрации CO_2 в неочищенном газе. Рост температуры абсорбции приводит к увеличению давления кислых компонентов над раствором и следовательно, к снижению скорости процессов массопередачи и повышению содержания H_2S в очищенном газе за допустимые ($\leq 7,5 \text{ мг/м}^3$) и даже регламентированные ($\leq 20 \text{ мг/м}^3$) пределы. Степень проскока CO_2 увеличивается также с понижением кратности орошения, но вместе с тем понижается степень извлечения H_2S , поэтому оптимальную кратность орошения необходимо устанавливать, исходя из заданной степени очистки сырого газа. Интенсивные разработки в целях улучшения показателей процесса с применением карбонат содержащих реагентов (K_2CO_3 и других) могут расширить область его использования, особенно при высоком соотношении $\text{CO}_2/\text{H}_2\text{S}$ в очищаемом газе.

Список использованных источников

- 1 Зиберт, Г. К. Подготовка и переработка углеводородных газов и конденсата. Технология и оборудование : справочное пособие / Г. К. Зиберт, Е. П. Запорожец, И. М. Валиуллин // Москва : Недра, 2008. – 659 с.
- 2 Николаев, В. В. Основные процессы физической и физико-химической переработки газа / В. В. Николаев, Н. В. Бусыгина, И. Г. Бусыгин. – Москва : Недра, 1998. – 426 с.
- 3 Технологический регламент переработки и очистки природного газа на ШГХК. – Ташкент, 2001. – 154 с.
- 4 Aripdjanov, O. Yu. Composition absorbents on the bases of DEA and MDEA in the presence of paraforms / O. Yu. Aripdjanov, Sh. P. Nurillaev, S. M. Turobjonov // J iujang Petroleum & Chemical Factory. – 2013. – № 4. – P. 14–19.
- 5 Турабджанов, С. М. Кинетика процессов очистки природных газов с композиционными абсорбентами / С. М. Турабджанов, Ш. П. Нуруллаев, Ху Мань // J iujang Petroleum & Chemical Factory. – 2013. – № 4. – P. 20–25.
- 6 Арипджанов, О. Ю. Интенсификация процесса очистки серосодержащих кислых растворов производства / О. Ю. Арипджанов, Н. П. Нуруллаев // Universum: технические науки: электрон. научн. журн. – 2017. – № 11(44). – Режим доступа : <http://7universum.com/ru/tech/archive/item/5300>. – Дата доступа : 18.06.2020.

А. С. Руденков

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, АРМИРОВАННЫХ НАНОСТРУКТУРАМИ

Композиционные покрытия на основе углерода, армированные углеродными же наноструктурами, можно рассматривать как перспективные материалы для работы в условиях ударных динамических воздействий. Армирование углеродных покрытий наноструктурами позволит снизить уровень внутренних напряжений, повысить трещиностойкость, износостойкость, адгезионную прочность и расширить температурный диапазон применения. Разработка методов формирования таких композиционных материалов является актуальной задачей.

Основным сырьем для производства высокопрочных высокомодульных углеродных волокон и углеродных наноструктур является полиакрилонитрил (ПАН) [1]. Его достоинством является высокий выход углерода – около $40 \div 50 \%$ от массы полимера. Установлению механизма превращения линейных макромолекул ПАН в графитоподоб-

ные структуры посвящено множество работ. Несмотря на это, предложенные схемы отражают лишь вероятные пути реализации этого процесса, сложность которого определяется одновременным протеканием ряда химических превращений (деструкция полимера, образование систем полисопряжений, межмолекулярная сшивка и др.). Процесс реализуется в две стадии. Первая – образование последовательности конденсированных гетероциклов, соединенных незацикленными звеньями. Данная стадия реализуется на начальном этапе пиролиза ПАН, который, как правило, проводят в присутствии кислорода. Предварительное окисление облегчает последующее дегидрирование ПАН и возникновение предструктуры, обеспечивающей образование оптимальной структуры углерода и механических свойств углеродного волокна. Так в работе [2] показано, что выход углеволокна после карбонизации (900 °С) в среде азота на 23 % выше, чем у волокна ПАН без окисления. Как было отмечено в работе [3] для исходного волокна ПАН процессы циклизации, обеспечивающие создание структуры полимера, способной формировать карбонизованный остаток, начинаются в интервале температур 210 ÷ 270 °С. При повышении температуры процессы деполимеризации становятся преобладающими, значительно возрастает скорость потери массы волокна [4].

На стадии термостабилизации происходит выделение воды, синильной кислоты ($\text{H}-\text{C}\equiv\text{N}$), аммиака и других низкомолекулярных соединений [4]. Кислород воздуха является катализатором процесса циклизации. Циклизованная структура термостабильна и при карбонизации превращается в турбостратный углерод с минимальной потерей массы. Турбостратный углерод – это совершенные плоские гексагональные сетки из атомов углерода (наименьшее расстояние между атомами 1,415 Å). После процесса термостабилизации следует процесс карбонизации стабилизированного ПАН волокна – пиролиз стабилизированного волокна, при котором происходит его превращение в углеродное волокно.

Карбонизация проводится в атмосфере инертного газа при температуре 1000 ÷ 1500 °С. При температуре процесса из волокна удаляются практически все элементы, кроме углерода [5]. Следующим этапом является графитация. В результате графитации получают высокомодульное волокно, однако его прочность несколько понижена по сравнению с карбонизованным УВ. Графитация проводится в печах в инертной среде при температурах 1500 ÷ 3000 °С. Продолжительность процесса составляет от 1 до 10 минут. Волокно теряет в массе 5 ÷ 8 %. Повышение упругости достигается за счет упорядочивания кристаллической структуры и создания преимущественной ориентации кристаллов.

Необходимо отметить, что основной сложностью в реализации процесса термостабилизации является выделение большой удельной теплоты при нагреве ПАН волокна в интервале температур 200 ÷ 300 °С. Эта теплота составляет величину порядка $1,34 \cdot 10^6$ Дж/кг и называется «экзоэффектом» [3]. В результате происходит пережог волокна и оно становится непригодным для дальнейшей обработки [6].

Для сравнения были рассмотрены технологические способы нанесения покрытий на основе графена. Это обусловлено схожестью химической структуры соединений, а также наличием большого количества практических приложений [7]. В работе [8] описан способ газофазного нанесения покрытий графена на металлические подложки. Процесс осуществляли при температуре подложек 1000 °С с использованием потока, состоящего из метана и водорода в соотношении 1:2. Следует отметить, что сама подложка должна быть из материала, способного катализировать процесс роста графена (Pt, Mo, Ni). Покрытия могут быть получены с использованием более простых растворных методов, которые опираются на существующие методы получения оксида графита: метод Броди [9], метод Штаудинмайера [10] и метод Хаммерса [11], заключающиеся во взаимодействии графита с сильными окислителями. Примером растворного метода нанесения графена является способ, описанный в работе [12].

Нами разработаны 2 метода формирования углеродных покрытий, армированных наноструктурами.

Первый метод формирования армированных углеродных покрытий, заключается в синтезе углеродных наноструктур с использованием лазерного диспергирования смеси

катализатора (оксалат железа) и полиэтилена (ПЭ), предварительно нагретой до температуры 200 °С на следующей стадии предусмотрена очистка осажденного конденсата низкоэнергетическими ионами и формирование углеродного покрытия из плазмы импульсного катодно-дугового разряда. Установлено, что для синтеза углеродных наноструктур обязателен нагрев подложки до температуры не менее 350 °С. С ростом содержания катализатора в мишени, диспергируемой лазерным излучением, субшероховатость и средний размер наноструктур увеличивается. По всей видимости, такая закономерность объясняется диссоциацией оксалата железа и образованием углекислого газа, который выносит продукты диспергирования на кремниевую подложку. Размер и форма осаждаемых наноструктур варьируются достаточно широко.

Более перспективным способом переноса на подложку углеродных волокон или нанотрубок для армирования износостойких углеродных слоев является второй разработанный нами метод, заключающийся в формировании полимерного слоя, содержащего готовые углеродные нанотрубки, путем генерации аэрозольной фазы при помощи ультразвуковой ячейки. Использование уже готовых углеродных волокон или нанотрубок позволяет равномерно армировать углеродные покрытия однотипными по размерам структурами (рисунок 1).

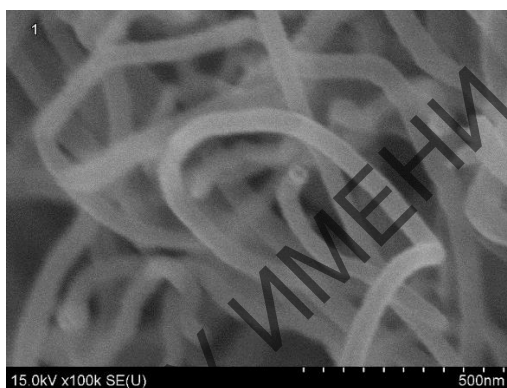


Рисунок 1 – ПЭМ-изображение углеродных нанотрубок, осаждаемых на подложку путем генерации аэрозольной фазы при помощи ультразвуковой ячейки

На процесс формирования наноструктур методом электронно-лучевого диспергирования полимеров существенное влияние оказывает наличие, выбор и концентрация катализатора (в работе был использован оксалат железа), нагрев подложки, а также плотность тока. Преимуществом разработанного метода армирования углеродных покрытий является то, что синтез армирующих наноструктур осуществляется при высоком вакууме (не более 10^{-2} Па) в едином технологическом цикле с осаждением углеродных слоев и при температуре менее 400 °С.

В свою очередь метод, заключающийся в формировании полимерного слоя, содержащего готовые углеродные нанотрубки, путем генерации аэрозольной фазы при помощи ультразвуковой ячейки, позволяет армировать углеродные покрытия более однородными структурами, чем метод, описанный выше.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках задания 2.64 и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках договора №Т20М-002.

Список использованных источников

1 Структурные и термические характеристики полиакрило-нитрильных волокон как сырья для получения углеродных волокон / А. А. Свиридов [и др.] // Химические волокна. – 2009. – № 4. – С. 14–16.

- 2 Huang, F. A new polyacrylonitrile fiber for direct carbonization without oxidation / F. Huang // *Journal of Materials Science*. – 2018. – Vol. 53. – P. 8232–8240.
- 3 Исаев, А. С. Совершенствование тепловой работы печи термостабилизации при производстве углеродных волокон с целью сокращения энергозатрат: дис. канд. техн. наук: 05.14.04 / А. С. Исаев. – Москва : Национальный исследовательский технологический ун-т «МИСиС», 2016. – 127 с.
- 4 Щербина, Н. А. Модифицирование полиакрилонитрильного волокна с целью снижения горючести / Н. А. Щербина, Е. В. Бычкова, Л. Г. Панова // *Химические волокна*. – 2008. – № 6. – С. 17–19.
- 5 Структурные и химические превращения в процессах термоокислительной стабилизации сополимерных полиакрилонитрильных волокон / А. Т. Калашник [и др.] // *Химические волокна*. – 1999. – № 6. – С. 14–16.
- 6 Грибанов, А. В. Полиакрилонитрил – проблемы карбонизации / А. В. Грибанов, Ю. Н. Сазанов // *Журнал прикладной химии*. – 2008. – Т. 81. – С. 881–894.
- 7 Перепелкин, К. Е. Химические волокна: развитие производства, методы получения, свойства, перспективы / К. Е. Перепелкин. – Санкт-Петербург: РИО СПГУТД, 2008. – 354 с.
- 8 Cui, C. A cautionary note on graphene anti-corrosion coatings / C. Cui, A. T. O. Lim, J. Huang // *Nature Nanotechnology*. – 2017. – Vol. 12. – P. 834–835.
- 9 Comprehensive electrochemical study on corrosion performance of graphene coatings deposited by chemical vapour deposition at atmospheric pressure on platinum-coated molybdenum foil / S. Naghdi [et al.] // *Corrosion Science*. – 2018. – Vol. 130. – P. 31–44.
- 10 Brodie, B. C. On the atomic weight of graphite / B. C. Brodie // *Philosophical Transactions of the Royal Society*. – 1959. – Vol. 149. – P. 249–259.
- 11 Staudenmaier, L. Verfahren zur Darstellung der Graphitsäure / L. Staudenmaier // *Ber Dtsch chem Ges*. – 1998. – Vol. 31. – P. 1481–1487.
- 12 Hummers, W. S. Preparation of Graphitic Oxide / W. S. Hummers, R. E. Offeman // *Journal of the American Chemical Society*. – 1958. – Vol. 80. – P. 1339–1339.

**А. В. Семченко¹, В. В. Сидский¹, О. И. Тюленкова¹,
В. Е. Гайшун¹, Д. Л. Коваленко¹, В. В. Ткаченко²**

¹г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

²ГНУ «ОИПИ НАН Беларуси»

СИНТЕЗ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ НАНОСТРУКТУРНЫХ СВЕТОПОГЛОЩАЮЩИХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ОКСИДОВ МЕТАЛЛОВ

Введение

В работе предложено решение одной из основных проблем, препятствующих внедрению перовскитных солнечных элементов – получить тонкий равномерный светопоглощающий слой гибридного перовскита на большой площади. [1].

Актуальность решаемой проблемы заключается в необходимости поиска новых материалов и конструкций, способных поглощать солнечный свет практически всех длин волн и при этом обладать эффективностью поглощения, которая практически не зависит от угла падения излучения. Материал должен обладать радиационной стойкостью, что позволит увеличить эффективность модулей солнечных элементов для применения в космической аппаратуре. Главным фактором, сдерживающим использования наноструктурных светопоглощающих золь-гель покрытий на основе оксидов металлов в модулях солнечных элементов, является отсутствие детального понимания гомогенных и гетерогенных процессов золь-гель синтеза наноструктурных светопоглощающих слоев, а также взаимосвязи параметров роста

и структурных свойств синтезированных материалов. Наличие такой информации создает основу для воспроизводимого синтеза наноструктурных светопоглощающих слоев с требуемыми структурными характеристиками, а также расширяет сферу их применения. Светопоглощение наноструктурных золь-гель покрытий достигается за счет формирования наночастиц оксидов металлов (Fe, Co, Er, Ni и т. д.) в диамагнитной матрице, а также за счет формирования рельефа с цилиндрическими каналами внутри тонких пленок.

Методы исследования

Исследования морфологии светопоглощающих золь-гель покрытий на основе оксидов металлов проводили методом высокоразрешающей атомно-силовой микроскопии (АСМ) на микроскопе SOLVER 47-PRO (производство фирмы «NT-MDT», Россия), позволяющем выявить структурные поверхностные образования нанометрового масштаба (минимальный шаг сканирования 0,0004 нм; 0,0011 нм; 0,006 нм). Предел допускаемой относительной погрешности измерений линейных размеров в плоскости XY не более $\pm 1\%$, размеров по оси Z не более $\pm 5\%$ а предел допускаемой абсолютной погрешности сечения геометрических размеров в режиме компаратора (при номинальных размерах более 10 нм) составляет $\pm 1 \text{ нм} + 0,001L$.

Экспериментальная часть

Для получения наноструктурных светопоглощающих золь-гель покрытий на основе оксидов металлов, использовались технологические приемы, отработанные для синтеза ксерогелей. Однако в случае получения композитных плёнок, содержащих соединения металлов, имеется ряд существенных технологических особенностей, требующих индивидуального подхода к синтезу на поверхности композитной плёнки покрытия стабильного стехиометрического состава [2].

На скорость созревания пленкообразующего раствора влияет множество факторов, в частности, температура, которая не должна превышать 70 °С. Высокая температура в золе приводит к ускорению процесса поликонденсации, что приводит к формированию полимеров большей размерности с более высоким содержанием оксида [3]. Достаточно качественные однородные прозрачные композитные плёнки оксида кремния толщиной 0,1...0,3 мкм получаются из растворов с соотношением компонентов ТЭОС:Н₂O: С₂Н₅ОН: 1:0,17:1,6 [4].

Одним из наиболее важных вопросов, возникающих при формировании функциональных слоев, является обеспечение высокой адгезии композитных плёнок к поверхности подложки. Оксидные пленки обладают хорошей адгезией к поверхности стекла и кремния вследствие образования химических связей на границе раздела системы пленка-подложка. Композитные плёнки за счет гидроксильных групп взаимодействуют с поверхностным слоем стекла и образуют ковалентные связи с выделением воды.

Золь-гель пленки с общей формулой BiFeO₃ (BFO-пленка) и BiFeO₃: Co (BFO:Co-пленка) синтезировали золь-гель методом. В качестве исходных соединений были использованы неорганические соли металлов с молярным соотношением (Bi:Fe) = (1:1) и толуол в качестве растворителя. Гелеобразование происходило под действием центробежной силы. Концентрация кобальта составляла 0,4 и 0,6 %. Пленки наносили на подложку Pt/TiO₂/BPSG/SiO₂/Si методом центрифугирования при различных скоростях подложки (500–1000 об/мин) или методом погружения. Для достижения желаемой толщины (200–300 нм) золь наносили 2–3 раза после термической обработки каждого слоя при температуре 250 °С. Отжиг BFO- и BFO: Co для формирования структуры перовскита проводили при 550 °С в течение 60 мин.

Таблица 1 – Параметры синтеза BiFeO₃ – плёнок

Золь-гель пленки	Состав	Температура отжига, °С	Время отжига, мин
BFO	Bi-Fe-O	550	60
BFO 0.4 % Co	Bi-Fe-O: Co		
BFO 0.6 % Co	Bi-Fe-O: Co		

На рисунке 1 приведены АСМ-изображения ВFO- и ВFO:Со (0,4 %), ВFO: Со (0,6 %) -пленок, полученных золь-гель методом.

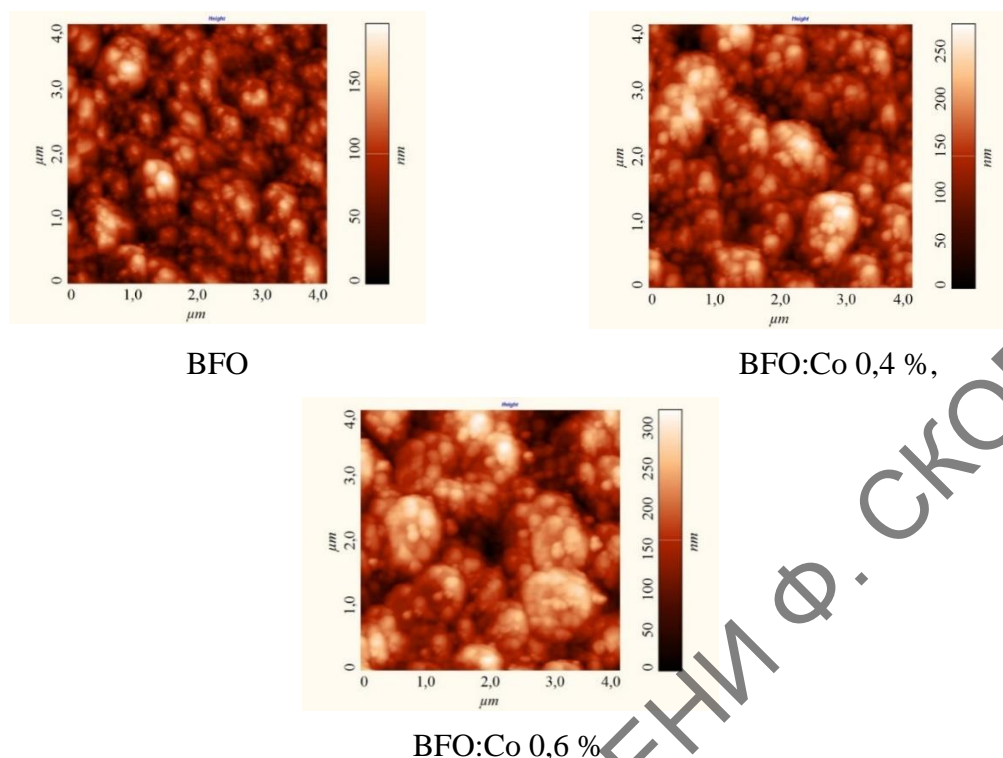


Рисунок 1 – АСМ - изображения ВFO и ВFO:Со -пленок, полученных золь-гель методом

Как видно из рисунка 1, средний размер частиц увеличивается с добавлением ионов кобальта и достигает 100 нм. Поверхность пленки ВFO-Со также имеет повышенный уровень шероховатости по сравнению с пленкой ВFO.

Установлены параметры золь-гель процесса, позволяющие синтезировать наноструктурные светопоглощающие золь-гель покрытия на основе оксидов металлов. Золь-гель пленки с общей формулой BiFeO_3 (ВFO-пленка) и $\text{BiFeO}_3:\text{Co}$ (ВFO:Со-пленка) синтезировали золь-гель методом с молярным соотношением $(\text{Bi}:\text{Fe}) = (1:1)$ с концентрацией кобальта 0,4 и 0,6 %. Толщина пленок составляла порядка $200 \div 300$ нм. С увеличением содержания нитрата кобальта вязкость золя увеличивается, что приводит к увеличению толщины плёнок. Средний размер частиц при легировании кобальтом и составляет около 100 нм. Поверхность пленки ВFO-Со имеет повышенный уровень шероховатости по сравнению с пленкой ВFO.

Список использованных источников

1 Fabrication of Well-Aligned ZnO Nanorods Using a Composite Seed Layer of ZnO Nanoparticles and Chitosan / H. Zafar, I. bupoto, S. Mohamad A. lSalhi // Polymer Materials. – 2013. – Vol 6, № 10. – P. 4361–4374.

2 Yeshchenko, O. Л. Size-dependent melting of copper nanoparticles in silica matrix revealed by optical spectroscopy / O. Л. Yeshchenko, I. M. Dmitruk, A. A. Alexeenko, A. M. Dmytruk // Physics, Chemistry and Application of Nanostructures (Proceedings of Intern. Conf. Nanomeeting 2007), 22–25 May, 2007. – Minsk, Belarus. – 2007. – P. 324–327.

3 Зайцев, Н. А. Структурно-примесные и электрофизические свойства системы Si-SiO₂ / Н. А. Зайцев, И. О. Шурчков. – Москва, 1993. – 192 с

4 Суйковская, Н. В. Химические методы получения тонких прозрачных пленок / Н. В. Суйковская. – Ленинград : Химия, 1971. – 199 с.

**И. В. Семченко, С. А. Хахомов, А. Л. Самофалов,
М. А. Подалов, А. П. Балмаков**
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

МЕТАМАТЕРИАЛЫ И МЕТАПОВЕРХНОСТИ КАК ПЕРСПЕКТИВНАЯ ОТРАСЛЬ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БИАНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР

Метаматериалы представляют собой периодические системы структурированных в пространстве микро- и нанорезонаторов, с помощью которых можно получить свойства и характеристики, не присущие природным объектам. Фундаментальные исследования метаматериалов планомерно переходят из чисто теоретической области научного знания в практическую плоскость, что, в конечном итоге, позволяет создавать новые типы поляризаторов, линз с субволновым разрешением, поглотителей, сенсоров, антенн и покрытий для маскировки объектов в определенном диапазоне частот.

Метаматериалы, образованные массивом микро-резонаторов специальной геометрической формы, могут проявлять селективные частотные и поляризационные свойства и, следовательно, могут послужить основой преобразователей поляризации, фильтров и поглотителей нового типа для СВЧ и ТГц диапазонов частот.

В Гомельском государственном университете авторами в рамках функционирования лаборатории «Физика волновых процессов», созданной приказом ректора № 779 от 20 сентября 1999 года, научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор И. В. Семченко, развивается это перспективное направление работы. Ведутся фундаментальные и прикладные исследования в области электродинамики сред с искусственными бианизотропными и киральными свойствами.

Авторами разработана аналитическая модель, позволяющая рассчитать электрический дипольный момент и магнитный момент, возникающие в спирали или омега-элементе под действием падающей электромагнитной волны. Получено соотношение между проекциями моментов на ось спирали, которое является универсальным, поскольку не зависит от распределения тока в спирали. Аналогичное соотношение выведено для моментов, индуцируемых падающей волной в омега-элементе классической формы. Получено подобное соотношение также для прямоугольного омега-элемента и планарной спирали. Соотношение проверено нами на примере трех частных случаев распределения тока в спирали: однородный ток, линейное убывание тока от центра к концам спирали, гармоническая зависимость тока от координаты. Универсальность соотношения следует понимать и в более широком смысле. В метаматериале, при плотном расположении его элементов, ток в каждом элементе может изменяться не только в результате прямого воздействия падающей электромагнитной волны, но и под влиянием других элементов, образующих метаматериал. Однако при любых изменениях тока компоненты электрического дипольного момента и магнитного момента изменяются согласованно, и соотношение остается справедливым. Поэтому геометрические параметры спирали или омега-элемента остаются оптимальными даже при значительном возрастании концентрации элементов в метаматериале.

Найдены оптимальные параметры спирали, при которых наблюдается наиболее эффективное преобразование поляризации электромагнитных волн, в частности, поворот плоскости поляризации на максимальный угол. Изготовлены образцы метаматериалов на диэлектрической подложке с упорядоченно расположенными спиральными или омега-элементами, имеющими оптимальные параметры (рисунок 1). При этом показана возможность варьирования металлов для создания элементов метаматериалов.

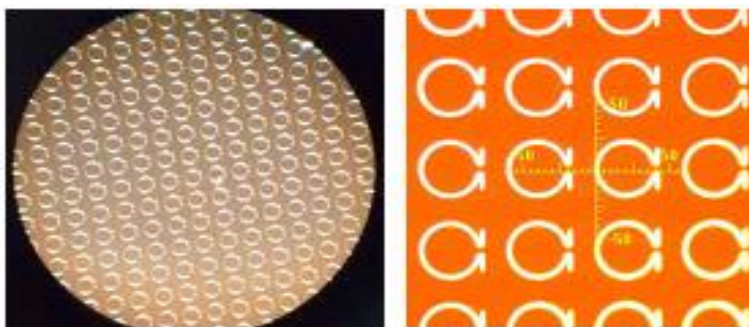


Рисунок 1 – Метаповерхность, образованная омега-элементами на кремниевой подложке

На основе парных спиральных элементов с оптимальными параметрами разработаны и созданы слабоотражающие поглощающие метаматериалы с компенсированной киральностью, при этом метаматериалы обладают волновым импедансом, близким к импедансу свободного пространства (рисунок 2).

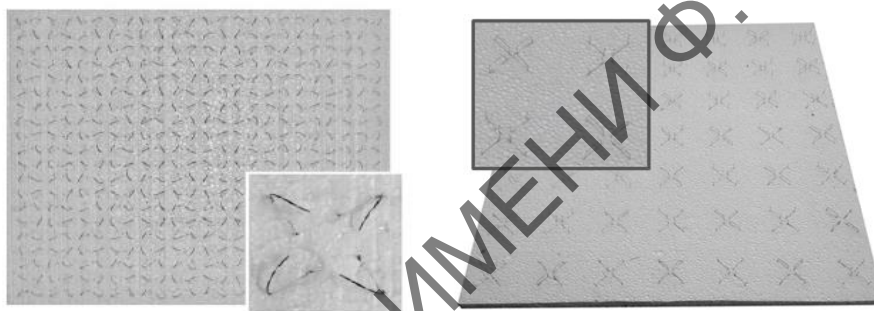


Рисунок 2 – Поглощающий метаматериал на основе парных спиральных элементов с оптимальными параметрами

Доказана поляризационная селективность взаимодействия ДНК-подобных спиралей с СВЧ излучением и показано, что в соответствии с принципом электродинамического подобия она может иметь место для молекулы ДНК в глубоком УФ диапазоне. Этот результат имеет большое значение при решении задач, связанных с сохранением генетических различий между правовинтовыми и левовинтовыми формами объектов живой природы.

Обосновано, что обладающая оптимальной геометрической формой молекула ДНК в глубоком УФ диапазоне не чувствительна к воздействию правоциркулярно поляризованной электромагнитной волны. Соответственно волна, излучаемая в условиях резонанса правовинтовой молекулой ДНК перпендикулярно оси спирали, левовинтовыми поляризована.

Лаборатория «Физика волновых процессов», имеет богатый опыт сотрудничества в данной области с Институтом физики полупроводников СО РАН (профессор Принц В. Я.), обладающим патентованной технологией и уникальным оборудованием для изготовления метаматериалов на основе напряженных пленок; опыт совместных экспериментальных исследований в СВЧ диапазоне с университетом Аалто, Финляндия (профессор Третьяков С. А.) и национальным исследовательским университетом ИТМО, С-Петербург, Россия (профессор Белов П. А.). Проводились также совместные научные исследования с сотрудниками Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси, ОАО «ИНТЕГРАЛ», результаты которых представлены на международных конференциях Inter-Academia в г. Яссы (Румыния), в г. Каунас (Литва) и в г. Будапешт (Венгрия), на VI Конгрессе физиков Беларуси и опубликованы в коллективных монографиях в издательстве Springer в 2018 г., в 2019 г. и в 2020 г.

В лаборатории созданы все условия, необходимые для успешного проведения как теоретических, так и экспериментальных исследований, имеется в наличии: вычислительная техника – современные компьютеры и рабочие станции, оборудование и приборы для проведения экспериментальных исследований в СВЧ диапазоне, в том числе современная безэховая камера на основе поглотителя пирамидального типа ТОРА, аппаратно-программный комплекс для измерения характеристик антенн ЮСТ FarField, предназначенный для измерения характеристик направленности антенн поворотным методом в дальней зоне, векторный анализатор PicoVNA 106 (АКИП 6602) (диапазон частот от 0,3 до 6 ГГц), спектрометр Vator TDS-1008-wol ГГц диапазона, рупорные антенны.

Результатом работы лаборатории являются успешные защиты диссертаций как в Республике Беларусь, так и за рубежом. В 2017 г. С. А. Хахомовым успешно защищена докторская диссертация по специальности «оптика» в Институте физики НАН Беларуси, посвященная свойствам метаматериалов. В 2013 и 2017 гг. под руководством И. В. Семченко с белорусской стороны и руководством профессоров М. Нагатсу и В. Мизейкиса с японской стороны в университете Сидзуока, Япония были защищены диссертации на соискание степени PhD (Philosophy Doctor) А. Балмаковым и И. Фаняевым. В 2017 г. под руководством И. В. Семченко с белорусской стороны и руководством профессора С. Третьякова с финской стороны в университете Аалто, Финляндия была защищена диссертация на соискание степени PhD (Philosophy Doctor) В. Асадчим. В 2018 году в университете Сидзуока состоялась защита диссертации С. Д. Барсукова (руководитель С. А. Хахомов).

И. В. Семченко и С. А. Хахомов ранее проводили научные исследования в Аалто университете г. Хельсинки, Финляндия, в Техническом университете г. Брауншвейга, Германия, в Ягеллонском университете г. Кракова, Институте низких температур, г. Вроцлава, Польша, приглашались для чтения лекций в университет Сидзуока, Япония, Нанкинский университет науки и технологии, Цзянаньский университет, Пекинский технологический институт, Китай. Кроме того сотрудниками лаборатории, постоянно выполняются проекты, финансируемые БРФФИ и Министерством образования, а также Государственные программы научных исследований.

Оценкой уровня работы лаборатории являются публикации сотрудников в отечественных и международных изданиях, в том числе с высоким импакт-фактором [1–23]. В 2019 году в ведущем белорусском научном издательстве была издана монография [24].

Список использованных источников

1 Semchenko, I. V. The influence of induced chiral properties on the transformation of polarization of acoustic waves in piezoelectric semiconductors / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov // *Advances in Complex Electromagnetic Materials* / Ed. by A. Priou [et al.]. – Kluwer Academic Publishers. – 1997. – P. 219–226.

2 Semchenko, I. V. Propagation of electromagnetic waves in artificial anisotropic uniform and twisted omega-structures / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov // *Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials* / Ed. By Said Zouhdi, Ari Sihvola and Mohamed Arsalane, Kluwer Academic Publishers. – 2002. – P. 197–210.

3 Semchenko, I. V. The competition of Bragg reflection and Fresnel's reflection of electromagnetic waves in the artificial helicoidal bianisotropic media with local chirality / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov // *Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials* / Ed. by Said Zouhdi, Ari Sihvola and Mohamed Arsalane, Kluwer Academic Publishers. – 2002. – P. 307–318.

4 Semchenko, I. V. Effective electron model of the wire helix excitation at microwaves: first step to optimization of pitch angle of helix / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, E. A. Fedosenko // *Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials* / Ed. by Said Zouhdi, Ari Sihvola and Mohamed Arsalane, Kluwer Academic Publishers. – 2002. – P. 245–258.

5 The effective optimal parameters of metamaterial on the base of omega-elements / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, A. L. Samofalov, M. A. Podalov, Q. Songsong // *Recent*

Global Research and Education: Technological Challenges / Ed. by Ryszard Jablonski and Roman Szewczyk, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 519, Springer. – 2017. – P. 3–9.

6 Semchenko, I. V. Polarization plane rotation of electromagnetic waves by the artificial periodic structure with one-turn helical elements / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, A. L. Samofalov // *Electromagnetics*. – 2006. – Vol. 26. – № 3–4. – P. 219–233.

7 Семченко, И. В. Преобразование поляризации электромагнитных волн спиральными излучателями / И. В. Семченко, С. А. Хахомов, А. Л. Самофалов // *Радиотехника и электроника*. – 2007. – Т. 52. – № 8. – С. 917–922.

8 Semchenko, I. V. Chiral metamaterial with unit negative refraction index / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, S. A. Tretyakov // *The European Physical Journal Applied Physics*. – 2009. – Vol. 46. – № 3. – P. 32607-1–32607-4.

9 Семченко, И. В. Исследование искусственных ДНК-подобных структур в СВЧ-диапазоне: наблюдение поляризационной селективности отражения волн / И. В. Семченко, А. П. Балмаков, С. А. Хахомов // *Электромагнитные волны и электронные системы*. – 2009. – № 4. – С. 66–72.

10 Семченко, И. В. Оптимальная форма спирали: равенство диэлектрической, магнитной и киральной восприимчивостей / И. В. Семченко, С. А. Хахомов, А. Л. Самофалов // *Известия высших учебных заведений. Физика*. – 2009. – Т. 52. – № 5. – С. 30–36.

11 Semchenko, I. V. Helices of optimal shape for nonreflecting covering / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, A. L. Samofalov // *The European Physical Journal Applied Physics*. – 2010. – Vol. 49. – № 3. – P. 33002-p1 – 33002-p5.

12 Семченко, И. В. Поляризационная селективность взаимодействия молекулы ДНК с рентгеновским излучением / И. В. Семченко, С. А. Хахомов, А. П. Балмаков // *Биофизика*. – 2010. – Т. 55. – № 2. – С. 227–232.

13 Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью / И. В. Семченко, С. А. Хахомов, Е. В. Наумова, В. Я. Принц, С. В. Голод, В. В. Кубарев // *Кристаллография*. – 2011. – Т. 56. – № 3. – С. 404–411.

14 Исследование свойств слабоотражающих метаматериалов с компенсированной киральностью / И. В. Семченко, С. А. Хахомов, В. С. Асадчий, Е. В. Наумова, В. Я. Принц, С. В. Голод, А. Г. Милехин, А. М. Гончаренко, Г. В. Сеницын // *Кристаллография*. – 2014. – Т. 59. – № 4. – С. 544–550.

15 The potential energy of non-resonant optimal bianisotropic particles in an electromagnetic field does not depend on time / I. Semchenko, S. Khakhomov, A. Balmakou, S. Tretyakov. – *The European Physical Journal, EPJ Applied Metamaterials*. – 2014. – 1. – P. 1–4.

16 Sihvola, A. H. View on the history of electromagnetics of metamaterials: Evolution of the congress series of complex media / A. H. Sihvola, I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov // *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications*. – 2014. – Vol. 12. – № 4. – P. 279–283.

17 Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators / A. Balmakou, M. Podalov, S. Khakhomov, D. Stavenga, I. Semchenko. – *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40. – № 9. – P. 2084 – 2087.

18 Broadband Reflectionless Metasheets: Frequency-Selective Transmission and Perfect Absorption / V. S. Asadchy, I. A. Faniayeu, Y. Ra'di, S. A. Khakhomov, I. V. Semchenko, S. A. Tretyakov – *Phys. Rev. X*. – 2015. – Vol. 5. – № 3. – P. 031005-1–031005-10.

19 Investigation of electromagnetic properties of a high absorptive, weakly reflective metamaterial-substrate system with compensated chirality / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, V. S. Asadchy, S. V. Golod, E. V. Naumova, V. Ya. Prinz, A. M. Goncharenko, G. V. Sinitsyn, A. V. Lyakhnovich, V. L. Malevich – *Journal of Applied Physics*. – 2017. – Vol. 121. – P. 015108-1–015108-8.

20 Stored and absorbed energy of fields in lossy chiral single-component metamaterials / I. V. Semchenko, A. P. Balmakou, S. A. Khakhomov, and S. A. Tretyakov // *Phys. Rev. B*. – 2018. – Vol. 97. – P. 014432-1–014432-8.

21 Coordinated multi-band angle insensitive selection absorber based on grapheme metamaterials / J. Bao, J. Wang, Z. Hu, A. Balmakou, S. Khakhomov, Y. Tang, C. Zhang // Optics Express. – 2019. – Vol. 27, № 22. – P. 31435–31445.

22 Independent Tunable Multi-Band Absorbers Based on Molybdenum / Jicheng Wang, Xiaoyu Wang, Zheng-Da Hu, Yang Tang, Aliaksei Balmakou, Sergei Khakhomov, Dongdong Liud // Disulfide Metaurfaces. Physical Chemistry. – 2019. – Iss. 21(43). – P. 24132–24138.

23 Метаматериалы и метаповерхности / И. Семченко, С. Хахомов, А. Самофалов, А. Балмаков // Наука и инновации. – 2020. – № 8. – С. 23–27.

24 Семченко, И. В. Электромагнитные волны в метаматериалах и спиральных структурах / И. В. Семченко, С. А. Хахомов. – Минск : Беларуская навука, 2019. – 279 с.

И. Н. Сербин¹, Г. А. Трапашко²

¹г. Минск, БГУИР

²г. Минск, ОАО «Планар»

ОПТИЧЕСКАЯ МИКРОСКОПИЯ И МЕТАЛЛОГРАФИЯ

Введение. Во время развития технологий по-прежнему остается востребованность контроля и исследования материалов, для чего необходим специальный инструмент для материаловедения. Таковым инструментом можно назвать оптический микроскоп. Микроскопы нашли применение в космическом материаловедении, нанотехнологиях, кристаллографии, металлургии, керамике, биоматериалах. Остановимся на одном из направлений материаловедения металлургия или металлография. Сейчас можно выделить два типа пользователей (исследователей), т. е. которые предпочитают изучать образцы с помощью окуляров и те кто рассматривает образец на экране монитора с применением специализированного программного обеспечения.

Существует два основных типа оптических микроскопа, это прямой и инвертированный микроскоп. В первом случае образец должен иметь две параллельные плоскости и его толщина может быть ограничена конструктивными особенностями самого микроскопа. В отличие от инвертированных микроскопов, где плоская поверхность только та, что прилегает к предметному столу, а его размеры, как и масса образца ограничены техническими возможностями микроскопа. В остальном все оптические микроскопы имеют общие конструктивные особенности, а именно оптическая система микроскопа.

Микроскопы могут оснащаться дополнительными осветителями, потому как известно микроскоп может работать как в отражённом свете, для непрозрачных материалов металлы, пластики и др., так и в проходящем, что позволит исследовать жидкость, такие микроскопы получили широкое применение в медицине, химии, биологии.

Для металлографии используют инвертированные микроскопы. Для подготовки образцов потребуется меньшее количество времени, достаточно сделать шлиф одной поверхности для начала исследований.

Конструктивные особенности инвертированных микроскопов МИ-1, Микро200 (ОАО «Оптоэлектронные системы»), МикроМет (Альтами), GX51 (OLIMPUS), которые позволяют производить различные виды исследований, в приведенных микроскопах реализованы методы светлого и теплого поля, цветных светофильтров.

Метод светлого и темного поля. Метод светлого поля является наиболее простым способом освещения объекта. Он состоит в том, что поверхность образца освещается всем конусом света, исходящим из оптической системы объектива, который затем вторично проходит через объектив (рисунок 1, а); после этого изображение попадает в окуляр и/или на регистрирующее устройство (монитор ПК, фотоаппарат). Основными лучами, формирующими изображение, являются центральные лучи конуса света. При этом плоскости образца, перпендикулярные оси объектива, освещены. На углублениях и наклонных участках образца свет рассеивается, и они выглядят темными [2].

Принцип освещения по методу темного поля состоит в том, что поверхность образца освещается наклонными лучами света. Центральные лучи для этой цели блокируются специальной диафрагмой. При этом свет направляется в пространство между корпусом объектива и собственно оптической системой (рисунок 1, б), отражается от параболического зеркала и попадает на образец. Свет, отраженный поверхностью образца, проходит через оптическую систему объектива и далее в окуляр или видеокамеру. При этом освещены только неплоскостные участки образца.

В определенном смысле изображения в темном и светлом поле «взаимно обратны». Пример приведен на рисунке 2. В светлом поле темными являются границы зерен, в темном поле «светятся» границы зерен, а также фаза (мартенсит) внутри зерна.

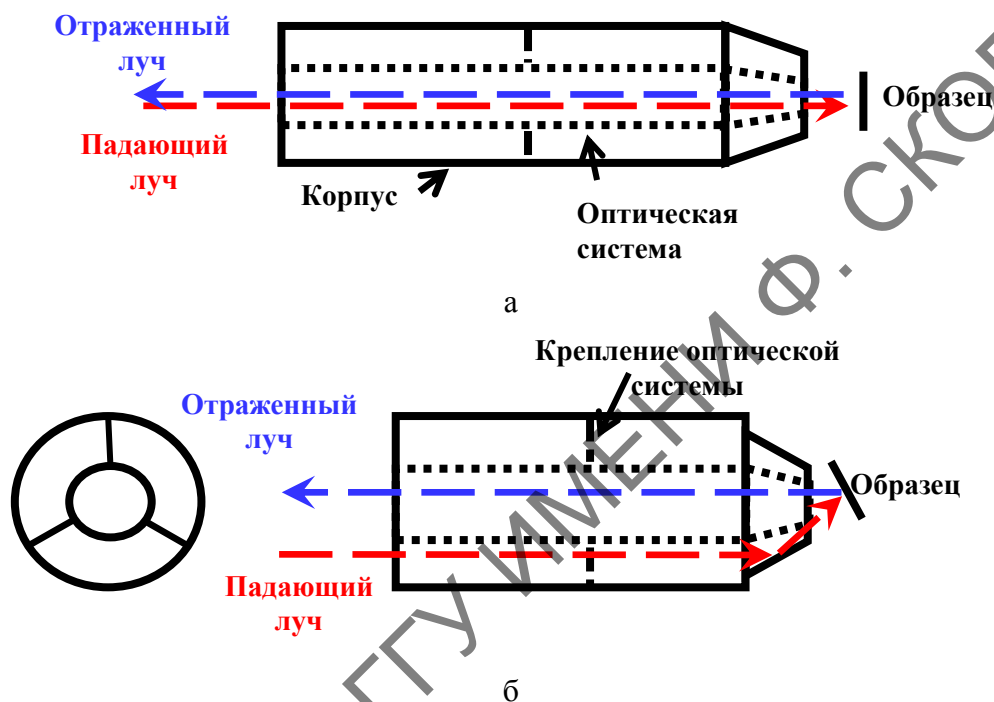


Рисунок 1 – Схема прохождения лучей света через объектив в режиме светлого (а) темного (б) поля

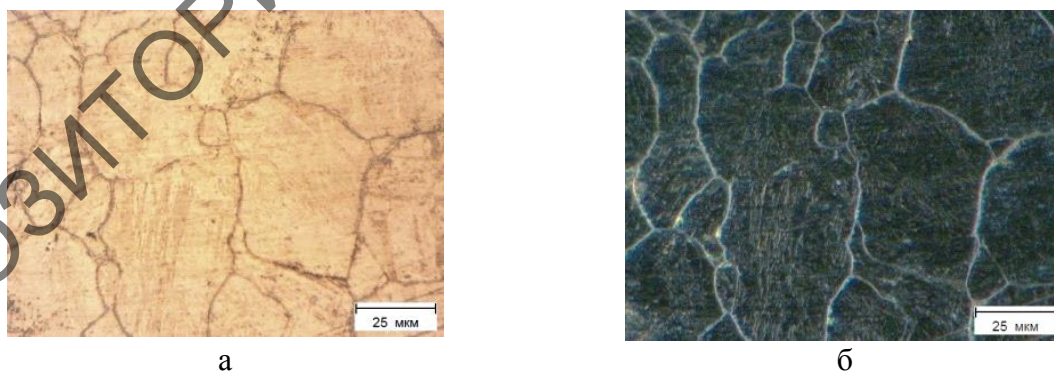


Рисунок 2 – Зерновая структура закаленной стали ШХ15 после травления на зерно: а – светлое поле, б – темное поле (изображение получено на микроскопе МИ-1 (ОАО «Оптоэлектронные системы»))

На рисунке 3 показан фрагмент фотошаблона на кремниевой пластине. В светлом поле все участки самой пластины кремния – светлые, узор микросхемы – темный. В темном поле изображение обратное, кроме того, определенные участки схемы проявили свой собственный цвет – зеленый и желтый.

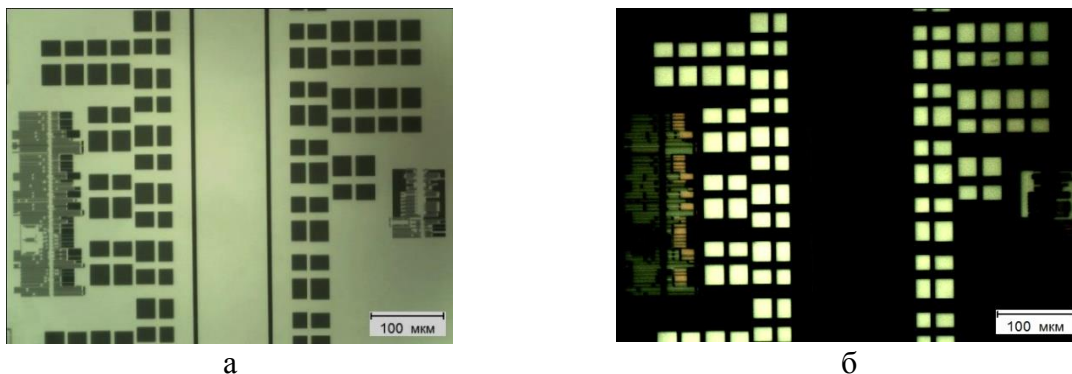


Рисунок 3 – Фрагмент шаблона для микросхемы: а – светлое поле, б – темное поле (изображение получено на микроскопе Микро200 (ОАО "Оптоэлектронные системы"))

Цветные светофильтры.

Одним из способов исследования является использование синего и зеленого светофильтров. Светофильтры в металлографических микроскопах предназначены для устранения хроматической аберрации, которая приводит к снижению чёткости изображения, появлению на нём артефактов: цветных контуров, полос, пятен. Охроматизованные объективы данного недостатка лишены. Поэтому цветные фильтры в микроскопах с такими объективами имеют иное назначение [3]:

– синий (фиолетовый) фильтр предназначен для повышения разрешающей способности. Минимальное угловое расстояние между точками определяется:

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (1)$$

где θ – угловое разрешение (минимальное угловое расстояние), λ – длина волны падающего света, D – диаметр входного зрачка оптической системы. [4]

Поэтому чем меньше длина волны падающего света, тем выше разрешение. Использование синего фильтра также целесообразно для повышения контрастности изображения и улучшения передачи цветовых оттенков, например, образцов с ярко окрашенными структурными элементами.

– при использовании зеленого фильтра изображение становится монохромным, также несколько снижается разрешающая способность. Назначение зеленого фильтра – снижение утомляемости глаз оператора при длительной работе с микроскопом.

Результаты применения цветных фильтров показаны на рисунке 4 для бронзы БРАЖ10-1, элементы структуры которой окрасились при металлографическом травлении в различные цвета. Возможно совместное применение цветных фильтров и апертурной диафрагмы.

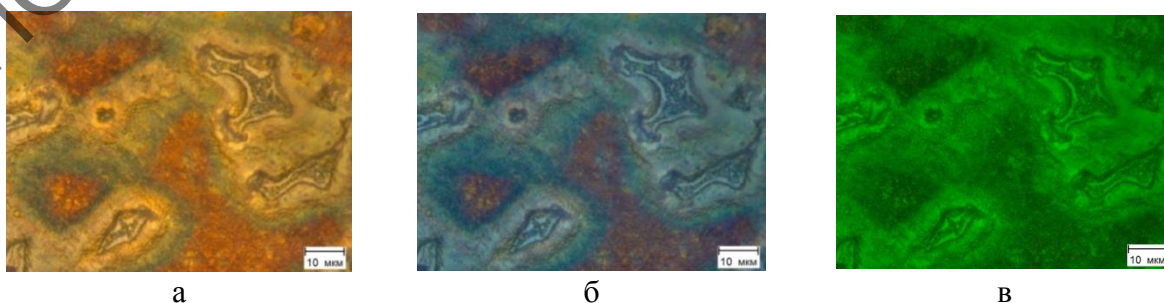


Рисунок 4 – Структура бронзы БРАЖ10-1: а – без фильтра, светлопольное освещение, б – синий фильтр, в – зеленый фильтр; изображения не радартированы (изображение получено на микроскопе МИ-1 (ОАО «Оптоэлектронные системы»))

Заключение. Приведен обзор некоторых видов изучения структур материалов методами контрастирования (метод светлого и темного поля и метод наложения светофильтров). К таким методам также относятся: использование полевой и апертурной диафрагмы, косоугольного освещения, поляризованного света (поляризационный контраст), дифференциально-интерференционный контраст (DIC), данные методы реализованы микроскопы в микроскопе МИ-МП ОАО «Оптоэлектронные системы», GX53 (OLIMPUS), некоторые производители оснащают микроскопы автоматизированными функциями, что позволяет сканировать образец и получать 3D изображение. Все эти методы и функции способны превратить обычный микроскоп в руках опытного специалиста в мощное оружие исследователя.

Список использованных источников

- 1 Анисович, А. Г. Искусство металлографии: использование методов оптического контрастирования / А. Г. Анисович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2016. – № 1 – С. 36–42.
- 2 Анисович, А. Г. Практика металлографического исследования материалов. / А. Г. Анисович, И. Н. Румянцева. – Минск : Беларуская навука, 2013. – 221 с.
- 3 Микроскоп МИ-1. Иллюстрированное приложение пользователя / ред. С. С. Кураченко. – Минск : Оптоэлектронные системы, 2018. – С. 20–24.
- 4 Бегунов, Б. Н. Геометрическая оптика / Б. Н. Бегунов. – 2-е, изд., перераб. – Москва : МГУ, 1966. – 212 с.

**В. В. Сидский, А. В. Семченко, Г. Е. Айвазян,
В. Е. Гайшун, Д. Л. Коваленко, О. И. Тюленкова**
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

СИНТЕЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАНОСТРУКТУР ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ И ФОТОДЕТЕКТОРАХ

Введение

Создание высококачественных материалов для базовых отраслей промышленности, таких как электронная, оптико-механическая, точное приборостроение, производство новых материалов, сдерживается узкими рамками традиционных способов их производства. Это касается технологий материалов, основанных на физических процессах, например, плавлении и спекании, которые требуют применения высоких температур и давлений или условий вакуума. Создание материалов с новыми, заранее заданными свойствами возможно на основе химических, коллоидных процессов. Многообещающими в этом отношении являются процессы превращения золь в гель, а далее в твердое тело с определенными свойствами, на базе которых и разрабатываются принципиально новые функциональные наноструктурированные золь-гель пленок [1].

Характерной чертой золь-гель пленок, получаемых химическими методами, является их высокая твердость, прочность и плотность, которая зависит от структуры пленки.

Прочность закрепления пленок на поверхности изделий является, как правило, результатом образования ковалентной связи между подложкой (за счет ковалентных связей с выделением воды при ее взаимодействии гидроксильных групп пленки, германия, цинка и олова) и кислородом.

Твердость пленок определяется их устойчивостью к различным механическим воздействиям: царапанию, истиранию, вдавливанию посторонних твердых частиц. Она зависит от многих факторов: собственно, прочности материала пленки, плотности и струк-

туры пленки, ее эластичности, природы промежуточного слоя, температуры, при которой производится определение и т. д. Таким образом, твердость пленки не является строго определенной физической характеристикой, а определяется сложной совокупностью технических свойств.

Необходимо отметить, что пленки могут быть мягкими, но достаточно прочно закреплены на поверхности подложки или наоборот, они могут быть твердыми, но с малой адгезией к стеклу или другому материалу. Однако прозрачные функциональные наноструктурированные золь-гель пленки настолько тонки, что разграничить определение твердости пленки и прочности ее сцепления с поверхностью изделия часто не представляется возможным. Поэтому два этих свойства пленок нередко объединяют одним термином – механическая прочность.

Методы исследования

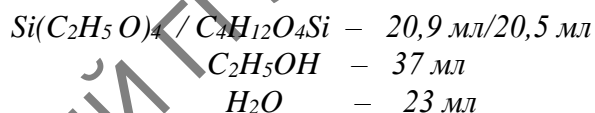
Топография поверхности слоев ZnO исследовалась с помощью высокоразрешающего атомно-силового микроскопа (АСМ) SOLVER Pro 47 (производство фирмы «NT-MDT»). Для обработки изображений полученных на атомно-силовом и электронном микроскопах использовалась модульная программа программа Gwyddion анализа данных сканирующей зондовой микроскопии. Gwyddion бесплатное программное обеспечение, защищённое в соответствии с Лицензией GNU (GNU GPL) [5] (рисунок 1).

Экспериментальная часть

Используя золь-гель метод, синтезировали покрытия на основе оксида цинка (затравочный слой). В качестве подложек использовались полированные пластины кремния и стеклянные пластины. Метод включает в себя следующие стадии:

- приготовление плёнкообразующего раствора (ПОР);
- введения в золь ацетата цинка, этаноламина и фтора;
- нанесение ПОР на подложку;
- термообработка покрытий.

Состав плёнкообразующего раствора на основе метилтриэтоксисилана и тетраэтилортосиликата (М+Т) описан в отчете за предыдущий этап. Раствор включает в себя:



Для получения золь-гель методом слоев ZnO за основу был взят метод центрифугирования (spin-coating). На основе теоретических расчётов химического состава золь проведён подбор химического состава золь. Для получения пленок требуемой толщины и хорошей однородности установлена корреляция между параметрами коллоидного раствора и характеристиками слоев на основе ZnO. Пленкообразующий раствор был приготовлен следующим образом. Требуемое количество ацетата цинка заливали абсолютным изопропиловым спиртом, диметилформамидом, 2-метоксиэтанолом (в зависимости от вида золь) и перемешивали. Затем растворы помещали в ультразвуковую ванну на 30 мин. Полученную смесь перемешивали в 30 мин. Для созревания раствора его выдерживали при температуре окружающей среды (22 ± 2) °С 2–3 дней.

Способ получения коллоидных растворов эфиров из различных металлоорганических соединений титана (TiO₂) получили широкое применение в процессах создания просветляющих, защитных, светоделительных, диэлектрических и др. покрытий на различных поверхностях. Пленкообразующие растворы были приготовлены из этоксида титана следующим образом. Требуемое количество этоксида титана (14 мл) [Ti(OC₂H₅)₄] смешивали с требуемым количеством изопропилового спирта (56 мл), перемешивали и добавляли в полученную смесь концентрированную азотную кислоту (0,3 мл). Для созревания растворов их выдерживали при температуре окружающей среды (22 ± 2) °С в течение 2–3 дней.

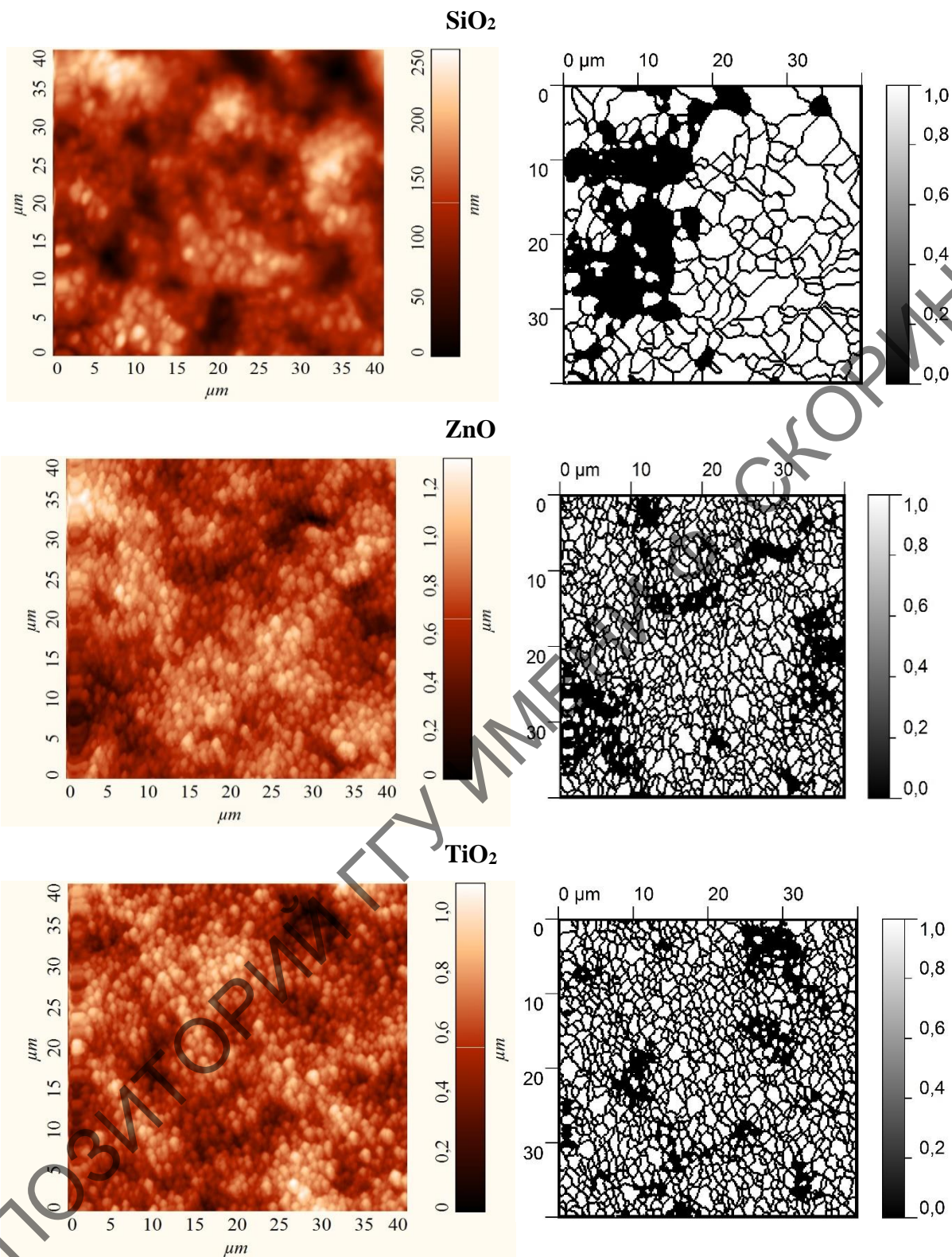


Рисунок 1 – АСМ – изображения поверхности функциональных покрытий, полученных золь-гель методом на поверхности черного кремния: SiO_2 – на основе $\text{Si}(\text{C}_2\text{H}_5\text{O})_4 / \text{SiC}_8\text{H}_{20}\text{O}_4$, ZnO – на основе ацетата цинка, TiO_2 – на основе этоксида титана

После нанесения золь на поверхность пластин черного кремния они были помещены в печь, где были нагреты 10 мин. пошагово с интервалом 20°C до температуры 350°C . Процесс нанесения и сушки повторялся до получения нужной толщины. На последней стадии подложки помещали в печь и нагревали пошагово с интервалом 20°C до 550°C .

Результаты и обсуждения

В таблице 1 приведена статистика зёрен на поверхности функциональных покрытий, полученная из АСМ – изображений (рисунок 1) поверхности функциональных покрытий, полученных золь-гель методом на поверхности черного кремния: SiO₂ – на основе Si(C₂H₅O)₄ /SiC₈H₂₀O₄, ZnO – на основе ацетата цинка, TiO₂ – на основе этоксиды титана.

Таблица 1 – Статистика зёрен на поверхности функциональных покрытий, полученных золь-гель методом на поверхности черного кремния: SiO₂ – на основе Si(C₂H₅O)₄/SiC₈H₂₀O₄, ZnO – на основе ацетата цинка, TiO₂ – на основе этоксиды титана

Характеристика	SiO ₂	ZnO	TiO ₂
Число зёрен	266	1150	1202
Шероховатость, R _a , мкм	0,072	0,155	0,118
Средний размер зерна, мкм	1,5	0,7	0,75

Как видно из таблицы 1 и рисунка 1, при использовании SiO₂ – золь на основе Si(C₂H₅O)₄ /SiC₈H₂₀O₄ средний размер частиц на поверхности функциональных покрытий составляет около 1,5 мкм, шероховатость 0,072 мкм, а при использовании золь ZnO – на основе ацетата цинка и TiO₂ – на основе этоксиды титана размер частиц уменьшается в 2 раза, шероховатость увеличивается в 1,5–2 раза, что может приводить к росту поглощения солнечного света.

Исследование выполнено при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № № Ф19АРМГ-001 от 21 июня 2019 г. и Т20РА-019 от 04 мая 2020 г.

Список использованных источников

1 Елиссон, М. И. Технология тонких пленок / Елиссон М. И., Смелко Г. Г. – Москва : Советское радио, 1977. – 158 с.

2 Gwyddion – Free SPM (AFM, SNOM/NSOM, STM, MFM) data analysis software [Electronic resource] / David Nečas – Petr Klapetek, 2008. – Mode of access : <http://gwyddion.net>. – Data of access : 20.03.2012.

Е. В. Телеш, А. П. Достанко

г. Минск, БГУИР

ОПТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ТОНКИХ ПЛЕНОК НИТРИДА УГЛЕРОДА, СИНТЕЗИРОВАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИОННЫХ ПУЧКОВ

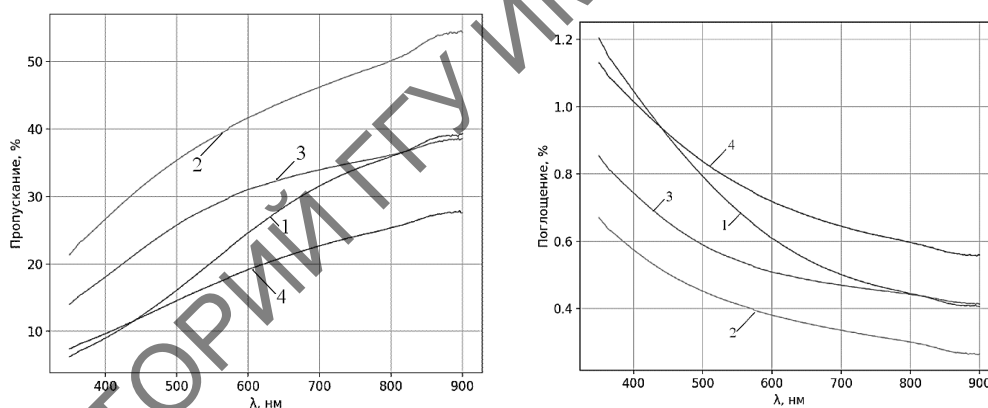
Тонкие пленки из нитрида углерода (CN_x) обладают высокой износостойкостью и устойчивостью к царапанию, являются коррозионностойкими и более устойчивыми к воздействию высоких температур по сравнению с алмазоподобными покрытиями. Тонкие пленки нитрида углерода имеют широкий спектр применений. Например, их используют в качестве защитных покрытий для жестких дисков [1, с. 539]. Покрытия из нитрида углерода могут использоваться для таких областей применения, как износостойкие и противокоррозионные покрытия, в качестве диэлектрических слоев в микроэлектронных устройствах, как оптические покрытия [2, с. 430]. Все существующие методы получения пленок нитрида углерода можно разделить на две группы. К первой группе относятся способы, основанные на активации химических реакций газов, содержащих азот, с парами соединений, содержащих углерод. Однако эти способы требуют сравнительно высоких температур подложки и специального оборудования. Ко второй группе относятся

способы нанесения пленок в вакууме – реактивное испарение или распыление графита в среде азота. Преимуществами вакуумных методов нанесения являются возможность низкотемпературного нанесения и высокая производительность.

В данной работе для получения пленок CN_x применялось реактивное ионно-лучевое распыление мишени из графита. Также нами предложен новый метод синтеза пленок нитрида углерода – прямое осаждение из ионных пучков, формируемых торцевым холловским ускорителем и ускорителем с анодным слоем в режиме ионно-пучкового фокуса [3, с. 83]. Задачей исследований было получение покрытий с максимальной прозрачностью в видимом диапазоне.

Формирование покрытий из CN_x осуществлялось на подложках из кварца с использованием метода реактивного ионно-лучевого распыления мишени из уплотненного графита АРВ ТУ-48-20-86-76 в среде азота и аргона. Напряжение на аноде составляло 3,0 кВ, ток мишени – 50 мА, остаточное давление в камере – $2,0 \cdot 10^{-3}$ Па, рабочее давление в камере – $6,65 \cdot 10^{-2}$ Па, парциальное давление азота – $(3,99-6,65) \cdot 10^{-2}$ Па, температура подложки T_p – 313...573 К. Исследование оптических характеристик покрытий осуществлялось в диапазоне 300–900 нм с помощью спектрофотометра PROSCAN MC-121. На рисунке 1 приведены зависимости пропускания и поглощения покрытий от режимов синтеза.

Установлено, что максимальное пропускание покрытий (38 %) на длине волны $\lambda = 555$ нм наблюдалось при парциальном давлении азота $3,99 \cdot 10^{-2}$ Па, температуре подложки 303 К и напряжении на мишени $U_m = 75$ В. При $T_p = 528$ К и $U_m = 120$ В происходило резкое снижение пропускания в видимом и ближнем ИК диапазоне длин волн. Таким образом, проведенные исследования показали, что при реактивном ионно-лучевом распылении графитовой мишени синтезируются пленки CN_x с низкой прозрачностью, что можно объяснить низкой степенью взаимодействия между углеродом и азотом. Для интенсификации химического взаимодействия необходимо увеличить энергию атомов углерода и азота.



1 – $p_{N_2} = 3,99 \cdot 10^{-2}$ Па; $T_p = 303$ К; $U_m = 40$ В; 2 – $p_{N_2} = 3,99 \cdot 10^{-2}$ Па; $T_p = 303$ К; $U_m = 75$ В;
3 – $p_{N_2} = 3,99 \cdot 10^{-2}$ Па; $T_p = 303$ К; $U_m = 120$ В; 4 – $p_{N_2} = 3,99 \cdot 10^{-2}$ Па; $T_p = 528$ К; $U_m = 120$ В.

Рисунок 1 – Зависимости пропускания и поглощения покрытий CN_x от режимов синтеза

Использовался метод прямого осаждения из ионных пучков смеси метана и азота с использованием торцевого холловского ускорителя. Покрытия наносились на неподвижные подложки из кварца и оптического стекла К-8. Покрытия получали при следующих режимах: остаточный вакуум – $3,6 \cdot 10^{-3}$ Па, рабочее давление – $1,06 \cdot 10^{-2}$ Па, напряжение на аноде – 60–80 В; ток разряда – 2 А; ток эмиттера электронов – 13 А, температура подложки – 323–573 К. Толщина пленок составляла 230–370 нм, скорость нанесения – 0,54–1,33 нм/с. На рисунке 2 представлены спектры пропускания и поглощения пленок CN_x , полученных при давлении азота $3 \cdot 10^{-2}$ Па (1) и $6 \cdot 10^{-2}$ Па (2). Температура подложки составляла 323 К. Увеличение доли азота в рабочем газе привело к росту пропускания.

На рисунке 3 представлены спектральные зависимости пропускания и поглощения пленок нитрида углерода, полученных при разных температурах подложки. Установлено, что нагрев свыше 373 К приводит к снижению пропускания. Установлено, что пропускание покрытий было значительно выше по сравнению с образцами, полученными распылением графита. Максимальное пропускание на $\lambda=555$ нм составило $\sim 68\%$.

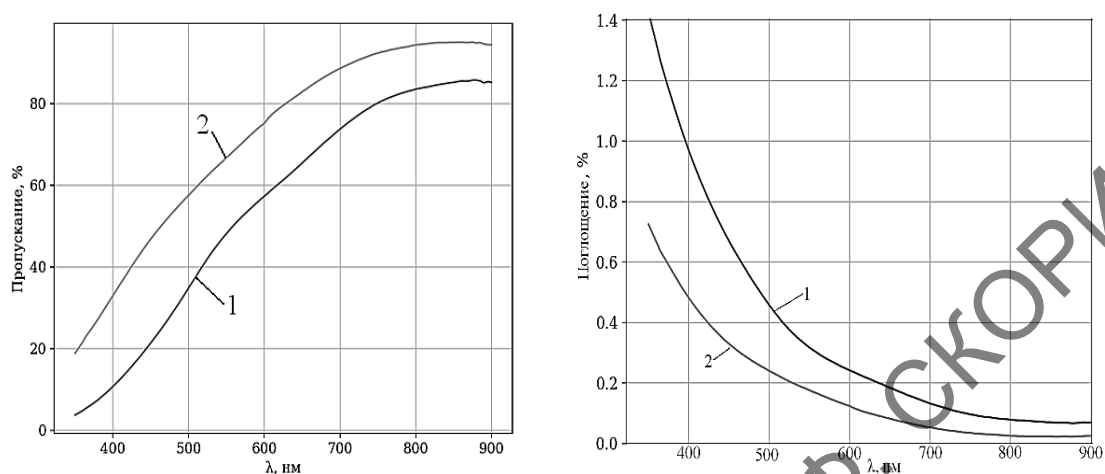
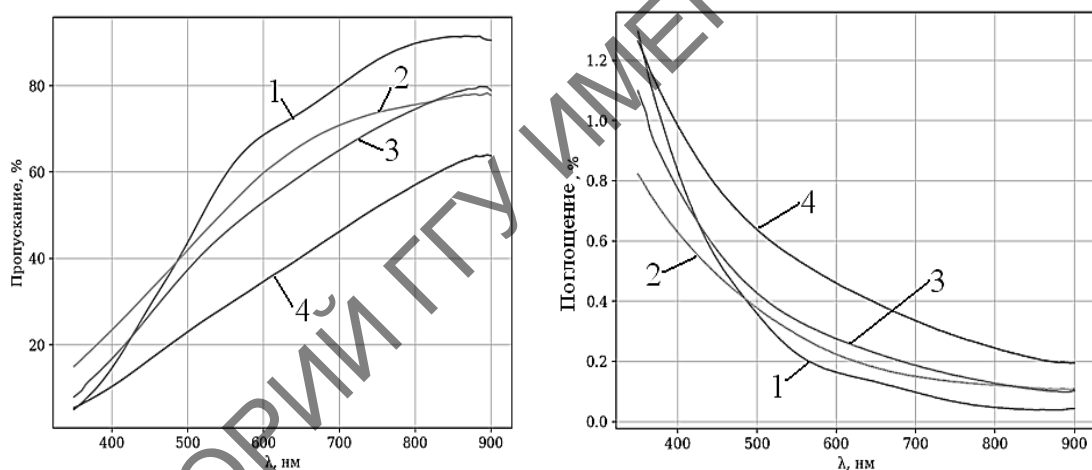


Рисунок 2 – Спектральные зависимости пропускания и поглощения пленок CN_x



1– $T_{\text{п}}=373$ К; 2– $T_{\text{п}}=323$ К; 3– $T_{\text{п}}=473$ К; 4– $T_{\text{п}}=573$ К;

Рисунок 3 – Спектральные зависимости пропускания и поглощения пленок CN_x , полученных при разных температурах подложки

Проведено исследование влияния состава рабочего газа и температуры подложки на оптические характеристики покрытий из нитрида углерода, полученных осаждением из вторичного ионного пучка, формируемого ускорителем с анодным слоем в режиме ионно-пучкового фокуса. В качестве рабочих газов также использовались метан и азот. Покрытия наносились на неподвижные подложки из кварца. Остаточное давление составляло $\sim 3,5 \cdot 10^{-3}$ Па, ускоряющее напряжение – (2,3–2,4) кВ, ток разряда – 75–80 мА. Скорость нанесения изменялась в диапазоне 0,1...0,16 нм/с и зависела от парциального давления азота и напряжения на диафрагме.

На рисунке 4 приведены спектральные зависимости пропускания и поглощения пленок нитрида углерода, полученных при парциальном давлении азота $2,66 \cdot 10^{-2}$ Па и температуре подложки 303 К, а на рисунке 5 – зависимость пропускания пленок от парциального давления азота и температуры подложки.

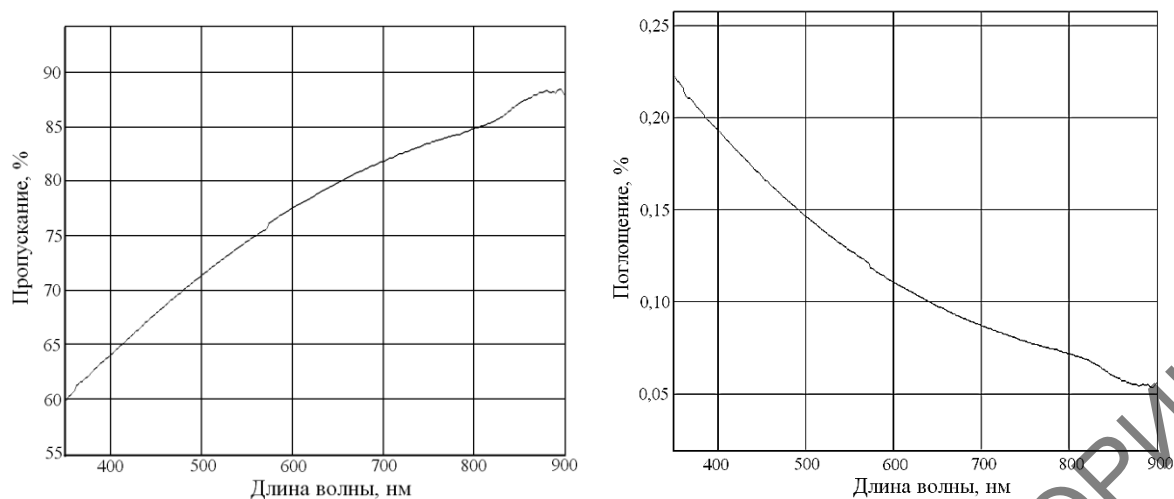


Рисунок 4 – Спектральные зависимости пропускания и поглощения пленок нитрида углерода

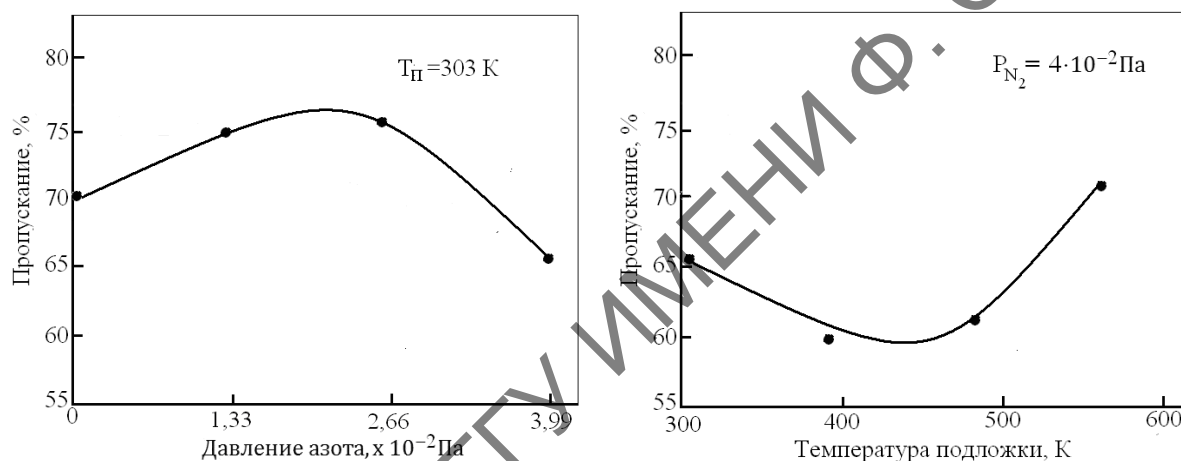


Рисунок 5 – Спектральные зависимости пропускания пленок нитрида углерода от парциального давления кислорода и температуры подложки

Установлено, что пропускание нелинейно зависит от вышеуказанных параметров. Максимальная прозрачность 76 % была получена при парциальном давлении азота $\sim 2,66 \cdot 10^{-3}$ Па и $T_{\text{п}} = 303$ К. Нагрев подложки приводил к снижению пропускания, что может быть связано с десорбцией азота из покрытия.

Таким образом, проведенные исследования показали перспективность метода прямого осаждения из ионных пучков для синтеза тонкопленочных покрытий из нитрида углерода с высокой прозрачностью в видимом диапазоне.

Список использованных источников

- 1 Khurshudov, A. G. Tribological properties of carbon nitride overcoat for thin-film magnetic rigid disks/ A. G. Khurshudov, K. Kato // Surface and Coatings Technology. – 1996. – Vol. 9. – P. 537–542.
- 2 Takadoun, J. Comparative study of mechanical and tribological properties of CN_x and DLC films deposited by PECVD technique / J. Takadoun, J. M. Rauch, L. M. Cattenot, N. Martin // Surface and Coating Materials Technology. – 2003. – Vol. 174–175. – P. 427–433.
- 3 Телеш, Е. В. Оптические характеристики тонких пленок диоксида кремния, полученных прямым осаждением из ионных пучков / Е. В. Телеш, А. П. Достанко, А. Ю. Вашуров // Доклады БГУИР. – 2015. – № 8(94). – С. 81–85.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ХАРАКТЕРА ПИТАНИЯ СВЧ МАГНЕТРОНА НА ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЧ РАЗРЯДА

Современный технологический процесс изготовления изделий микро- и нанoeлектроники включает ряд операций, выполняемых с использованием вакуумно-плазменного оборудования. Одним из способов реализации процессов плазменной обработки полупроводниковых материалов является применение неравновесной сверхвысокочастотной (СВЧ) плазмы.

В качестве источников энергии, обеспечивающих формирование и поддержание плазмы, в составе установок СВЧ-плазменной обработки на базе плазмотронов резонаторного типа находят применение СВЧ магнетроны. Питание таких магнетронов во многих случаях осуществляется по схеме однополупериодного выпрямления с удвоением напряжения, где в роли первичного преобразователя напряжения выступает работающий в режиме насыщения высоковольтный трансформатор, способный обеспечить генерацию прямоугольных импульсов напряжения [1, с. 315]. Генерация плазмы при этом происходит в пульсирующем режиме с частотой, равной частоте следования импульсов анодного тока. Величина и форма этих импульсов определяют характер работы магнетрона и генерации им СВЧ энергии [2, с. 19]. Поскольку длительность импульсов анодного тока тесно связана с длительностью импульсов генерации СВЧ энергии магнетроном, актуальной задачей, применительно к процессу СВЧ плазмохимической обработки материалов, является исследование режима работы СВЧ магнетрона при непрерывной генерации им СВЧ энергии.

Для проведения исследований использовался источник постоянного тока на базе схемы микроволнового генератора [3]. Целью экспериментов являлось изучение влияния характера питания СВЧ магнетрона на оптические характеристики СВЧ разряда.

В состав СВЧ генератора входит водоохлаждаемый магнетрон ОМ75Р(31) с паспортной выходной мощностью $P_{\text{вых}} \approx 1$ кВт и источник питания постоянного тока [4, с. 135], способный обеспечить пиковое анодное напряжение $U_a \approx 4$ кВ (рисунок 1). В схеме источника питания для формирования анодного напряжения используются три повышающих трансформатора ($TV1$, $TV2$, $TV3$), работающих в режиме насыщения. На первичные обмотки трансформаторов подаётся напряжение с разных фаз 380 В сети питания с одним нулём. Подача напряжения накала $U_n = 3,2$ В осуществляется с накальной обмотки трансформатора $T1$.

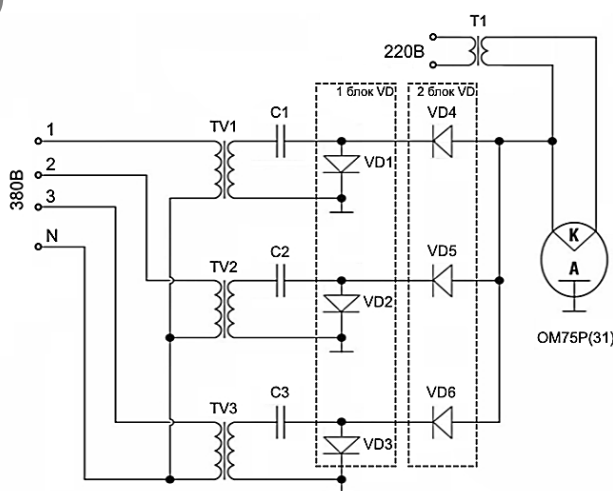
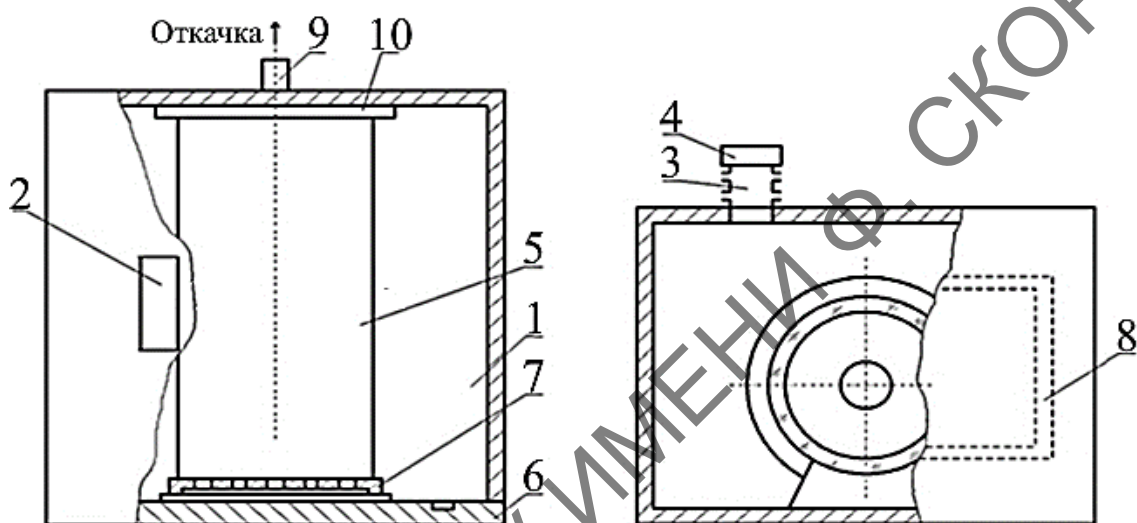


Рисунок 1 – Схема электрическая принципиальная СВЧ генератора с источником питания постоянного тока

Задачами исследования являлось сравнение формы и уровня питающих импульсов анодного тока и напряжения, а также сигналов СВЧ переизлучения и характеристик плазмы СВЧ разряда при питании магнетрона по упрощенной схеме с удвоением напряжения и источником питания постоянного тока. В качестве контролируемой характеристики плазмы был выбран уровень оптического сигнала её свечения, связанный с уровнем энергии, вкладываемой в плазму.

Для изучения характеристик СВЧ разряда использовалась экспериментальная СВЧ плазменная установка резонаторного типа, схематически изображенная на рисунке 2. Формирование плазмы СВЧ разряда осуществляется в объеме кварцевого туннельного реактора объемом около 9000 см^3 , расположенного в прямоугольной резонаторной камере размером $40 \times 40 \times 30 \text{ см}$. Откачка рабочего объема до требуемого уровня вакуума осуществляется пластинчато-роторным насосом, величина давления регулируется вакуумным натекателем.

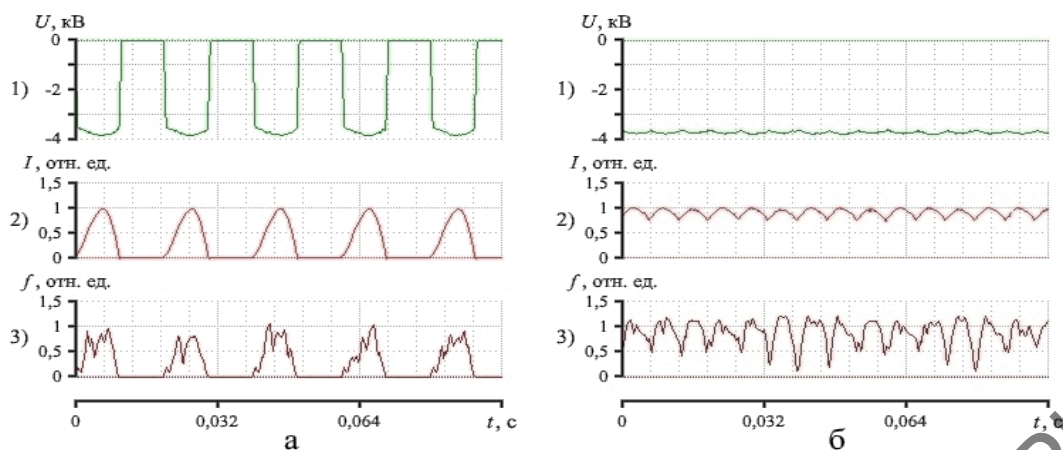


- 1 – резонатор; 2 – отверстие связи; 3 – волновод; 4 – магнетрон;
 5 – реакционно-разрядная камера; 6 – передняя стенка резонатора;
 7 – передняя крышка камеры; 8 – смотровое окно; 9 – патрубок для откачки;
 10 – задняя крышка камеры

Рисунок 2 – Реакционно-разрядная система СВЧ плазменной установки

При проведении экспериментов с помощью аналого-цифрового преобразователя ЛА-1,5 РС1 осуществлялась одновременная регистрация четырёх сигналов: осциллограммы анодного напряжения магнетрона через делитель 1:1000; сигнала анодного тока с токосъёмного резистора; уровня СВЧ электромагнитного переизлучения на границе резонаторной камеры; импульсов оптического интегрального свечения СВЧ разряда, поступающего на фотоэлектронный умножитель (ФЭУ). Величина давления в реакционно-разрядной камере – 70 Па, рабочий газ – воздух. Экспериментальные данные представлены на рисунках 3 и 4.

Согласно представленным результатам измерений использование собранного по упрощенной схеме источника питания СВЧ магнетрона обеспечивает генерацию пачек импульсов сигнала электромагнитной энергии, следующих с частотой импульсов анодного тока в 50 Гц (рисунок 3а). При работе СВЧ магнетрона от трёхфазного источника постоянного тока наблюдается переход к непрерывному режиму генерации (рисунок 3б). Работа источника постоянного тока в составе СВЧ генератора обеспечивает относительно постоянный уровень сигналов анодного напряжения и тока при сравнении с показаниями, снятыми в случае питания магнетрона по схеме однополупериодного выпрямления с удвоением напряжения. Анодное напряжение и ток в обоих случаях сохраняют среднее амплитудное значение.



1 – анодное напряжение СВЧ магнетрона; 2 – анодный ток СВЧ магнетрона;
3 – сигнал СВЧ переизлучения на границе резонаторной камеры

Рисунок 3 – Регистрируемые сигналы при питании СВЧ магнетрона по схеме однополупериодного выпрямления с удвоением напряжения (а) и от источника постоянного тока (б)

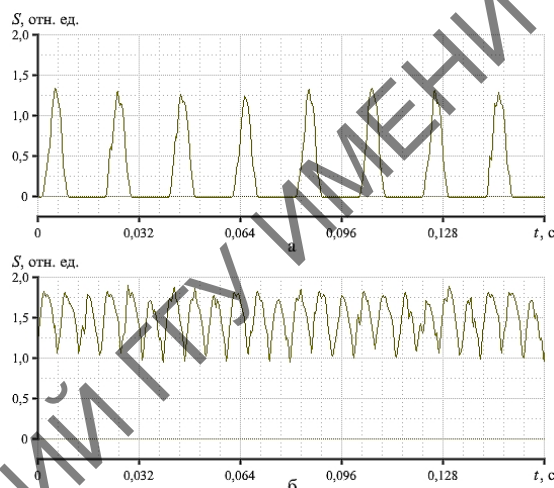


Рисунок 4 – Осциллограммы оптического сигнала свечения плазмы при питании магнетрона по схеме однополупериодного выпрямления с удвоением напряжения (а) и от источника постоянного тока (б)

Представленные на рисунке 4 данные демонстрируют закономерное изменение характера оптического сигнала свечения плазмы, связанное с непрерывным режимом генерации энергии магнетроном. Происходит переход от импульсного режима к непрерывному свечению плазмы, сопровождаемому ростом амплитудного значения регистрируемого оптического сигнала на ~30 %. Оценка площади сигнала оптического свечения на выбранном временном интервале показывает её увеличение при переходе к питанию СВЧ магнетрона от источника постоянного тока. В случае непрерывного режима генерации не наблюдается отсутствие плазмы между моментами погасания и зажигания разряда для каждого импульса, что позволяет уменьшить энергозатраты на ионизацию газа, а также свидетельствует о повышении вкладываемой в газовый разряд СВЧ мощности.

Результаты исследований показали, что работа магнетрона в режиме непрерывной генерации позволяет увеличить энерговыделенность в плазму СВЧ разряда. Использование СВЧ генераторов, работающих в таком режиме, может способствовать реализации более эффективных плазмохимических процессов.

Список использованных источников

- 1 Бордусов, С. В. Плазменные СВЧ-технологии в производстве изделий электронной техники / С. В. Бордусов; под ред. А. П. Достанко. – Минск : Бестпринт, 2002. – 452 с.
- 2 Хлопов, Ю. Н. Магнетрон / Ю. Н. Хлопов. – Москва : Знание, 1967. – 50 с.
- 3 Микроволновой генератор : пат. 2480890 РФ : МПК7 Н 03 В 1/02 / В. Н. Тихонов, Д. В. Пугашкин, Я. А. Четокин – Опубл. 27.04.2013.
- 4 Тихон, О. И. Исследование электрических режимов работы СВЧ магнетрона в составе плазменного технологического оборудования / О. И. Тихон (науч. Рук. С. И. Малвейко) // Актуальные вопросы физики и техники [Электронный ресурс] : материалы IX Республ. науч. конф. студентов, магистрантов и аспирантов, Гомель, 23 апр. 2020 г. : в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: Д. Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. – Электр. текст. данные (12,5 МБ). – Гомель, 2020. – Ч. 1. – С. 134–136.

**О. И. Тюленкова, А. В. Семченко, В. В. Сидский,
В. Е. Гайшун, Д. Л. Коваленко, Д. В. Слепенков**
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ОТ ВИДА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАПОЛНИТЕЛЕЙ И КОНЦЕНТРАЦИИ КОМПОНЕНТОВ

Введение

Основными наполнителями при создании экранов и радиопоглотителей на основе композиционных материалов являются диэлектрические, магнитные и проводниковые материалы.

Удельное сопротивление металлов при комнатной температуре находится в пределах $10^{-8} \div 10^{-5}$ Ом·м; полупроводников $10^{-6} \div 10^{-8}$ Ом·м; диэлектриков $10^8 \div 10^{18}$ Ом·м.

Физической величиной, характеризующей свойства диэлектрической среды, является относительная диэлектрическая проницаемость ϵ . Диэлектрическая проницаемость является безразмерной величиной, которая обусловлена эффектом поляризации диэлектриков под действием электрического поля и определяется характеризующей этот эффект величиной диэлектрической восприимчивости среды. Значение ϵ для реальных сред больше 1 [1–3].

Величина диэлектрической проницаемости, а также влияние на нее температуры и частоты приложенного напряжения определяются строением и видом химической связи. Для большинства неполярных твердых диэлектриков ϵ находится в пределах 2,0–4,5. Диэлектрическая проницаемость большинства полярных твердых диэлектриков в большей степени зависит от температуры и частоты приложенного напряжения и составляет $\epsilon \approx 4,5$ –8,0.

Диэлектрическая проницаемость ϵ в общем случае является комплексной величиной и характеризуется двумя величинами – действительной частью ϵ' и мнимой частью ϵ'' (потери), зависящими от частоты переменного поля. Величина δ называется углом диэлектрических потерь, т. к. наличие разности фаз δ приводит к поглощению энергии переменного электрического поля в диэлектрике.

В технике СВЧ используются твердые диэлектрические материалы различного типа: полимеры, слоистые пластики, ситаллы, керамика. Диапазон технического применения этих материалов весьма широк. В случае применения диэлектрика в качестве составляющей радиопоглощающего материала определяющим является требование высоких диэлектрических потерь, от которых зависит величина ослабления ЭМИ. Необходимая величина диэлектрической проницаемости зависит от рабочей частоты, температуры эксплуатации, типа возбуждаемых волн и требований к оптимальным геометрическим размерам. Так в области дециметровых волн желательны материалы с величиной $\epsilon = 100$ –500, а в диапазоне миллиметровых волн лучше располагать материалами с $\epsilon = 15$ –30.

Одним из основных физико–химических условий создания РПМ СВЧ диапазона является использование таких диэлектрических компонентов и материалов, которые обладали бы высокой стабильностью структуры, состава и свойств при тепловых, коррозионных, механических и других воздействиях.

Методы исследования

Измерения радиопоглощающих свойств образцов композиционных материалов в диапазоне частот 8 ÷ 12 ГГц производились с использованием векторного анализатора цепей VNA MS4644B Anritsu с волноводным измерительным трактом. Образцы помещались в волноводную ячейку, которая закреплялась между плечами волноводного тракта. Измерения проводились после стандартных калибровочных операций.

Радиопоглощающие свойства образцов композиционных материалов на основе диоксида титана, карбонильного железа и углеродного волокна оценивались по измеренным коэффициентам отражения S11 и передачи S21 электромагнитного излучения в волноводном тракте с установленным образцом.

Экспериментальная часть

В качестве материалов с диэлектрическими потерями предложено использовать диоксид титана, рутиловая модификация которого обладает высокими значениями диэлектрической проницаемости. Из проводников электрического тока выбраны углеродсодержащие материалы, обладающие высокими значениями электропроводности и не подвергающиеся окислению. Карбонильное железо помимо электропроводности также обладает магнитными свойствами, что также позволяет повысить эффективность поглощения электромагнитной энергии.

Композиционные материалы изготавливались путем механического смешивания порошка наполнителя с полимерным и кремнийорганическим связующими в различных соотношениях, заливки в форму и сушки на воздухе. Затем из полученного слоя вырезался образец с требуемыми для измерений размерами.

Результаты и обсуждения

На рисунке 1 приведены частотные зависимости коэффициентов отражения и передачи электромагнитного излучения для образцов с различной концентрацией наполнителя. Максимальная концентрация наполнителя определялась экспериментально, исходя из сохранения целостности образцов. Характеристика коэффициента отражения образцов на основе TiO₂ относительно равномерна в исследованном диапазоне частот.

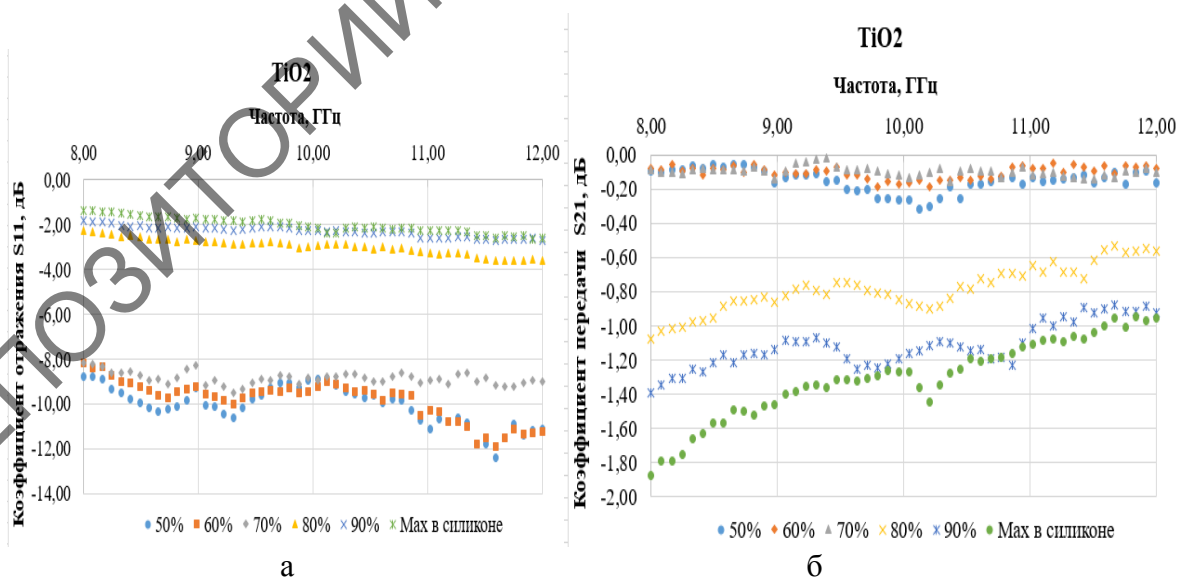


Рисунок 1 – Частотные зависимости коэффициентов отражения (а) и передачи (б) электромагнитного излучения для образцов на основе диоксида титана с различной концентрацией (50–90 %)

Для образцов с концентрацией наполнителя 50–70 % величина коэффициента отражения составляет до минус 8,00 дБ. Превышение концентрации наполнителя до 70 % приводит к увеличению коэффициента отражения до минус 3,9 ÷ 1,6 дБ вследствие роста диэлектрической проницаемости образцов. Это приводит к изменению коэффициента передачи с минус 0,1 до минус 1,8 ÷ 0,8 дБ (рисунок 1).

Концентрация наполнителя в образцах на основе карбонильного железа в полимерном связующем составляла 10, 30, 50, 70 масс. %. Коэффициент передачи для таких образцов составляет от минус 0,4 до минус 0,05 дБ, при этом коэффициент отражения варьируется от минус 17,3 до минус 6,00 дБ и возрастает по мере увеличения концентрации наполнителя (рисунок 2).

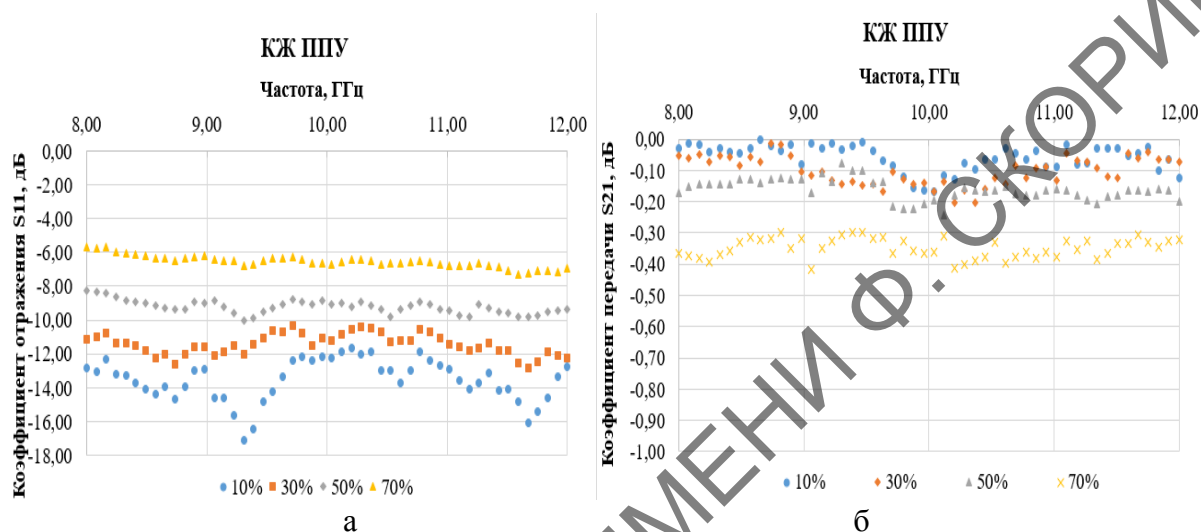


Рисунок 2 – Частотные зависимости коэффициентов отражения (а) и передачи (б) электромагнитного излучения для образцов на основе карбонильного железа с различной концентрацией (10–70 %)

Концентрация наполнителя в образцах на основе карбонильного железа в кремнийорганическом связующем составляла 10, 20, 30, 40, 50 масс. %. Коэффициент передачи для таких образцов составляет от минус 2,75 до минус 0,8 дБ, при этом характеристики коэффициента отражения близки и составляет от минус 4,00 до минус 1,5 дБ (рисунок 3).

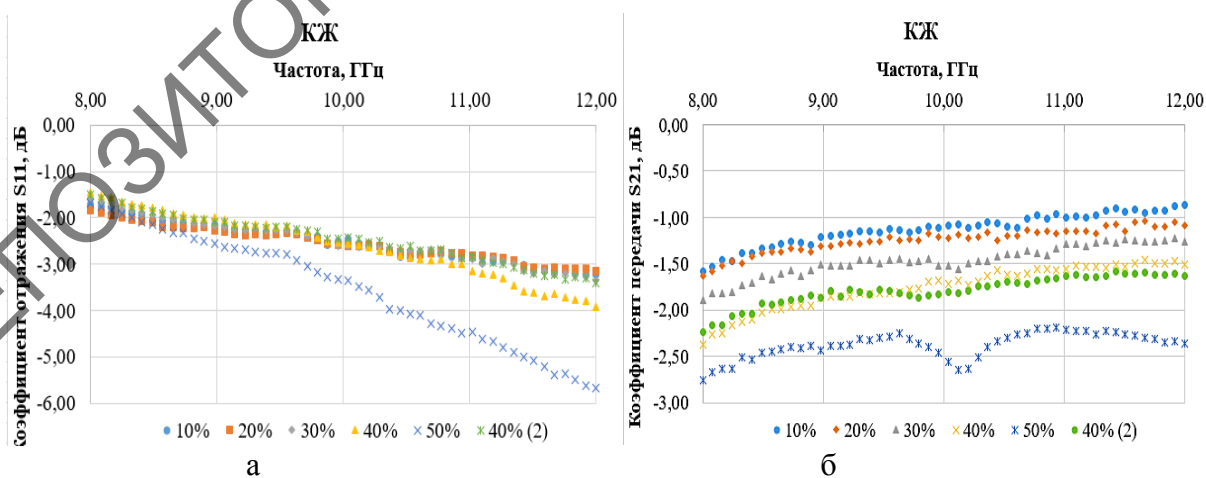


Рисунок 3 – Частотные зависимости коэффициентов отражения (а) и передачи (б) электромагнитного излучения для образцов на основе карбонильного железа с различной концентрацией

Характеристики отражения и передачи электромагнитного излучения образцами на основе углеродного волокна относительно равномерны в диапазоне частот 8 ÷ 12 ГГц. Наименьший коэффициент передачи за счет высокого уровня отражения электромагнитного излучения обеспечивается образцом с концентрацией углеродного волокна 40 масс. % (рисунок 4).

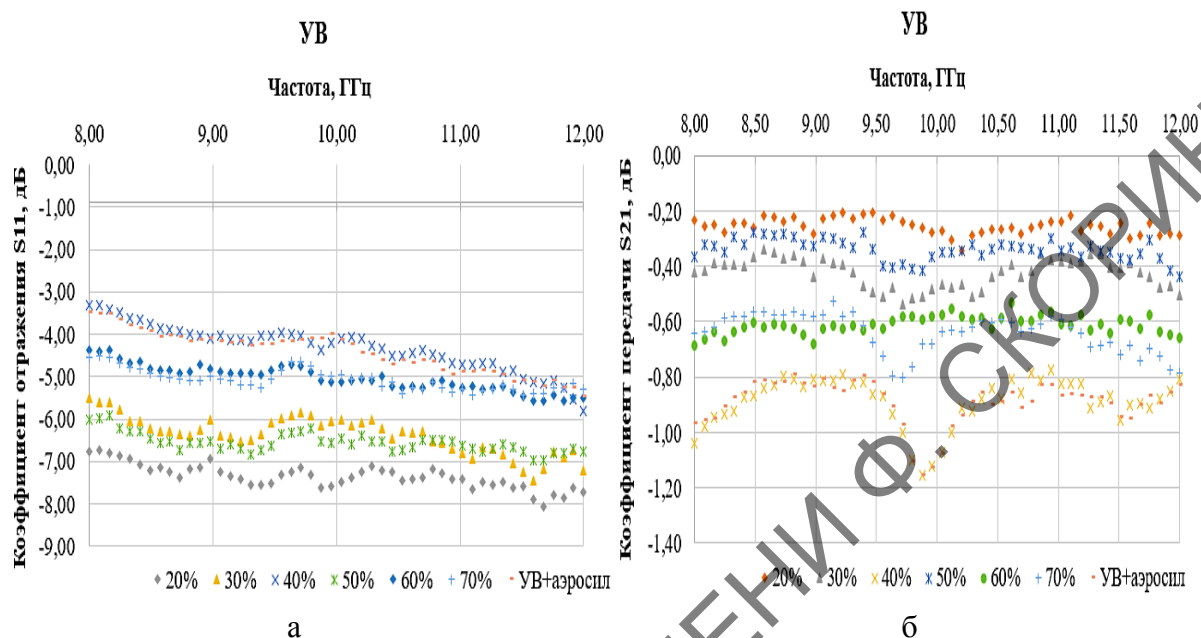


Рисунок 4 – Частотные зависимости коэффициентов отражения (а) и передачи (б) электромагнитного излучения для образцов на основе углеродного волокна с различной концентрацией (20–70 %)

Установлены закономерности формирования многослойных радиопоглощающих материалов на основе полимерного связующего и функциональных наполнителей с проводящими и магнитными свойствами, обладающими радиопоглощающими свойствами в СВЧ-диапазоне, а также установлено влияние состава и структуры отдельных слоев на радиопоглощающие свойства разрабатываемых материалов.

Установлена зависимость радиопоглощающих свойств композиционных материалов от толщины составляющих слоев. Композиционные материалы на основе карбонильного железа в кремнийорганическом связующем позволяют обеспечить условия минимального отражения на металлической подложке при толщине 3,3 мм.

Список использованных источников

- 1 Иванов, Д. А. Дисперсноупрочненные волокнистые и слоистые неорганические композиционные материалы: учеб. пособие / Д. А. Иванов, А. И. Ситников, С. Д. Шляпин; под ред. А. А. Ильина. – Москва : МГУИ, 2010. – 230 с.
- 2 Miazaki, Y. Tapered and grated index type electromagnetic absorbers using inhomogeneous lossy dielectric layers / Y. Miazaki, K. Tanoe // Intern. symp. electromagnetic compability. – 1989. – Vol. 2. – P. 504 – 508.
- 3 Стеклопластики – свойства, применение, технологии / А. И. Преображенский [и др.] / Главный механик. – 2015. – № 5. – С. 27–36.

**О. И. Тюленкова, В. В. Сидский, А. В. Семченко,
В. Е. Гайшун, Д. Л. Коваленко, Г. Е. Айвазян**
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

МОДИФИЦИРОВАНИЕ НАНОСТРУКТУР ZnO ДЛЯ ВЫСОКОЭФФЕКТИВНЫХ МАЛОГАБАРИТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ

Введение

Важной особенностью ZnO является относительная простота получения самых разнообразных наноструктур, наночастиц размером от несколько десятков нанометров до разнообразных столбчатых структур микрометровой длины. Дополнительный потенциал для использования массивов столбчатых структур как элементной базы функциональных устройств дает модифицирование их физических свойств, что может осуществляться, например, легированием затравочного слоя для ориентированного синтеза этих структур, а также путем нанесения на их поверхность наночастиц металлов.

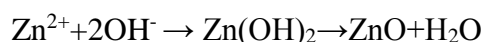
Наноструктурированный оксид цинка (ZnO) является широко используемым технологическим материалом благодаря своей доступности, невысокой цене, химической стабильности, биосовместимости и уникальному сочетанию химических и физических свойств. В частности, наноструктуры ZnO используются в конструкциях газовых датчиков, суперконденсаторов, твердотельных, гибридных и органических солнечных элементов, светоизлучающих диодов, инструментов для биохимического зондирования, ультрафиолетовых лазеров, высокопроизводительных наносенсоров, пьезоэлектрических наногенераторов, коротковолновых светоиспускающих оптоэлектронных наноустройств.

Одним из важнейших результатов МЭМС-технологий является создание на их основе нового класса разнообразных датчиков: высокочувствительных, быстродействующих, при высокой степени интеграции, с малыми размерами и низкой стоимостью. Размер МЭМС уменьшается от года к году открывая новые перспективы для их использования. Уже сегодня множество элементов конструкции МЭМС лежит в нанодиапазоне [1–2]. Таким образом, поиск способов увеличения эффективности работы МЭМС является важной научно-технической задачей.

Экспериментальная часть

Для анализа строения и морфологии полученных нанообъектов использовались методы оптической и сканирующей электронной микроскопии.

Синтез наноструктурированных слоев оксида цинка проводился низкотемпературным гидротермальным методом. В основе гидротермального синтеза оксида цинка лежит следующая реакция:

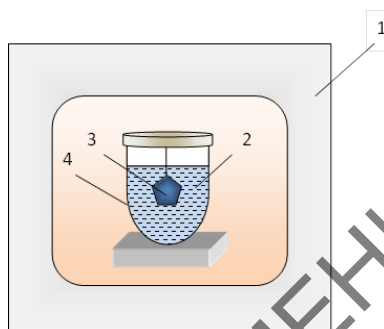


Выращивание столбчатых наноструктур оксида цинка происходило в два этапа. Вначале на подложки золь-гель методом нанесли затравочный слой. В качестве подложек использовались полированные пластины кремния, стеклянные пластины и пластины ниобата лития. Все подложки предварительно были тщательно очищены с помощью ультразвука. Тонкие плёнки ZnO были получены при использовании золя, полученного путём растворения 1,5 г ацетата цинка $\text{Zn}(\text{CH}_3\text{COO})_2$ в 8 мл изопропилового спирта. Созревание золя происходило в течение 2–3 суток при комнатной температуре (22 ± 2) °C. Изопропиловый спирт использовался в качестве жидкой среды для поддержания стабильности раствора и создания необходимой вязкости. Для получения легированных плёнок оксида цинка использовались нитраты алюминия, меди и серебра в количестве 2 масс. %.

Плёнки ZnO на подложки наносили методом центрифугирования. Золь наносился на подложку дозатором и с помощью центрифуги распределялся по поверхности. Частота

вращения подложки составляла 2000 об/мин. После этого подложки помещались в муфельную печь и выдерживались при температуре 250 °С в течение 5 минут. Финишный отжиг, который проводился при температуре 350 °С в течение 60 минут в муфельной печи, приводил к формированию равномерной пленки ZnO на поверхности подложки. Типичная толщина одного слоя по данным электронной микроскопии составляла порядка 30–40 нм. Для некоторых образцов нанесение затравочного слоя проводилось дважды и трижды.

Для синтеза столбчатых наноструктур оксида цинка использовали химическое осаждение из растворов солей цинка. В качестве источника гидроксильной группы использовался этилендиамин. В реакционный стакан помещали 1 мл этилендиамина в 200 мл дистиллированной воды. Далее при постоянном перемешивании по каплям к раствору этилендиамина добавляли 0,2 молярный водный раствор ацетата цинка $Zn(CH_3COOH)_2$ до установления pH 8,5. В получившуюся смесь опускали образцы с нанесенным зародышевым слоем ZnO. Подложки располагали в реакционных сосудах вертикально (рисунок 1).



1 – сушильный шкаф; 2 – рабочий раствор; 3 – подложка; 4 – реакционный сосуд

Рисунок 1 – Схема установки для гидротермального синтеза

Реакционный сосуд в закрытом виде помещали на 2 ч в сушильный шкаф при температуре 90–100 °С. По окончании синтеза образцы осторожно промывали дистиллированной водой и сушили на воздухе.

Результаты и обсуждение

В ходе гидротермального синтеза массивов столбчатых наноструктур были получены сфероподобные структуры, состоящие из совокупности столбчатых структур, обладающих повышенной долей площади поверхностей нанокристаллов оксида цинка, что представляет практический интерес для катализа, фотокатализа и газочувствительных сенсоров (2–5).

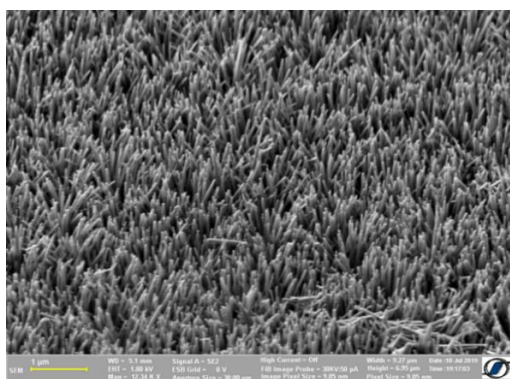


Рисунок 2 – СЭМ изображение упорядоченного массива наностержней ZnO, выращенного на кремниевой подложке с затравочным слоем ZnO/Ag

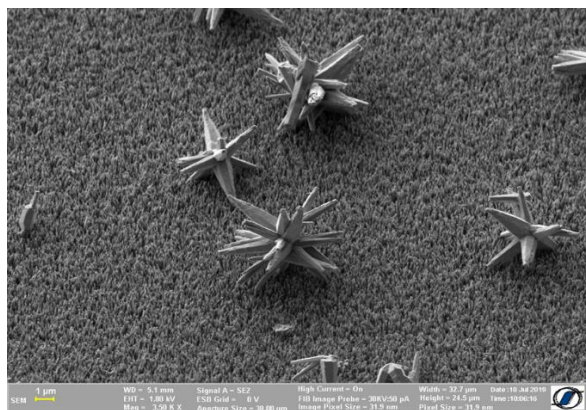


Рисунок 3 – СЭМ изображение упорядоченного массива наностержней ZnO, выращенного на стеклянной подложке с затравочным слоем ZnO/Ag

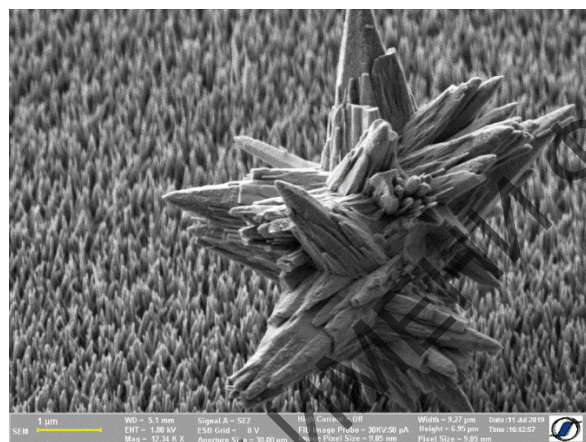


Рисунок 4 – СЭМ изображение упорядоченного массива наностержней ZnO, выращенного на кремниевой подложке с затравочным слоем ZnO/Cu

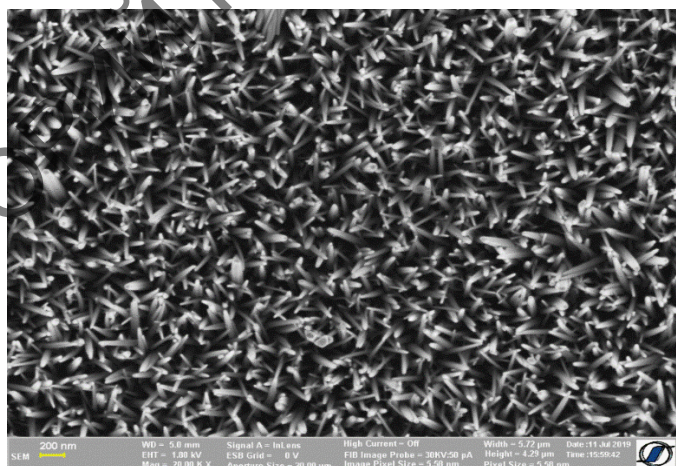


Рисунок 5 – СЭМ изображение упорядоченного массива наностержней ZnO, выращенного на стеклянной подложке с затравочным слоем ZnO/Cu

Согласно данным элементного микроанализа установлено содержание легирующих элементов Al, Cu и Ag в синтезируемых структурах на уровне 0,04–2,0 ат. %.

Методы получения высокодисперсных форм оксида цинка через химическое осаждение и термолиз термически нестабильных соединений имеют широкие химические и

технологические возможности и, вследствие этого, большие возможности выбора в применении к конкретной задаче. Варьирование природы прекурсоров, модифицирующих веществ и условий позволяет синтезировать дисперсные формы ZnO с различной морфологией и размерами.

Модифицирование физических свойств массивов столбчатых структур легированием затравочного слоя, на котором они синтезированы, дает дополнительный потенциал их для использования как элементной базы функциональных устройств.

Исследование выполнено при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научных проектов №Т19МЛДГ-008 и Т20РА-019.

Список использованных источников

1 Wu, W. Piezotronic Nanowire-Based Resistive Switches As Programmable Electromechanical Memories. / W. Wu, Zh. L. Wang. // Nano Letters. – 2011. – № 11(7). – P. 2779–2785.

2 Poole, C. P. Introduction to Nanotechnology / C. P. Poole, F. J. Owens. – New Jersey : Wiley-interscience. – 2003. – 388 p.

С. А. Хахомов, А. В. Семченко, В. В. Сидский,

В. Е. Гайшун, Д. Л. Коваленко

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ СОСТАВА И ТИПА ИОНА-МОДИФИКАТОРА НА СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРОМАГНИТНЫХ BiFeO_3 И $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ СЛОЕВ

Введение

Необходимость получения функциональных материалов, обладающих контролируемыми характеристиками, является причиной исследовательского интереса, проявляемого к сложным оксидам переходных металлов с перовскитоподобной структурой. Известно, что ферроики обладают уникальными свойствами, такими как усиление намагничивания и связи между ферромагнитными и сегнетоэлектрическими параметрами вблизи границ фаз [1]. Контролируемость функциональных параметров может быть достигнута, в частности, за счет использования золь-гель метода, обеспечивающего требуемые свойства путем изменения химического состава, структурных параметров и управления дефектностью и стехиометрией соединений. BiFeO_3 со структурой перовскита представляет интерес для последующего создания устройств записи информации высокой плотности (MRAM), магнитных сенсоров, электрически переключаемых постоянных магнитов и др. Известно, что BiFeO_3 (BFO) имеет ромбоэдрическую структуру перовскита, описываемую пространственной группой R_{3c} . BFO характеризуется сегнетоэлектрическим упорядочением при высокой температуре Кюри (1103 К) и антиферромагнитным упорядочением G-типа с температурой магнитного перехода 643 К. Керамика состава BFO была исследована авторами [2–3]. Электрические свойства ромбоэдрической фазы BFO определяются высокой проводимостью, которая связана с высокой плотностью дефектов [3–5]. Известно [6–7], что введение небольшой примеси (до 10 %) редкоземельного иона в состав BFO облегчает образование перовскитной фазы и, следовательно, приводит к увеличению антиферромагнитных свойств $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ (BFLO) в сравнении с BiFeO_3 .

Химические методы являются перспективными для получения слоев различного состава, в том числе BiFeO_3 и $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ [8–9]. Для получения материалов состава BiFeO_3 и $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ нами предлагается использовать золь-гель метод.

Методы исследования

Слои состава BiFeO_3 и $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ были синтезированы из нитратов металлов, азотной и лимонной кислоты. Соединения растворяли в дистиллированной воде, которую затем выпаривали на горячей плите при 80–90 °С до образования золя (около 4–5 часов). Золь наносили на подложку методом центрифугирования. В качестве подложки использовали монокристаллическую кремниевую пластину с платиновым подслоем. Далее полученные слои нагревали в печи при температуре 180 °С в течение 2 часов. Затем материал отжигался при 550 °С (в течение 3 или 10 часов), 600 °С (в течение 3 часов), 700 °С (в течение 3 часов), 800 °С (в течение 3 часов).

Экспериментальная часть

Слои состава BiFeO_3 и $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ были синтезированы из нитратов металлов, азотной и лимонной кислоты. Соединения растворяли в дистиллированной воде, которую затем выпаривали на горячей плите при 80–90 °С до образования золя (около 4–5 часов). Золь наносили на подложку методом центрифугирования. В качестве подложки использовали монокристаллическую кремниевую пластину с платиновым подслоем. Далее полученные слои нагревали в печи при температуре 180 °С в течение 2 часов. Затем материал отжигался при 550 °С (в течение 3 или 10 часов), 600 °С (в течение 3 часов), 700 °С (в течение 3 часов), 800 °С (в течение 3 часов).

Дифракция рентгеновских лучей проводилась на дифрактометре PANalytical X'Pert MPD Pro в режиме отражения (геометрия Брегга-Брентано) с использованием излучения $\text{Cu-K}\alpha$. Идентификация дифракционных пиков была выполнена с использованием программного обеспечения JCPDS базы данных Search-Match. Обработка дифрактограмм проводилась в программе JANA2006.

Сканирование поверхности проводили с помощью атомно-силовой микроскопии (ACM) на 47 SOLVER-PRO и анализировали с помощью программы Gwyddion.

Результаты и обсуждение

Как видно из данных с содержанием фазы (таблица 1–2), полученные порошки BFO не являются монофазными. Увеличение температуры синтеза приводит к уменьшению содержания фазы перовскита из-за слабой силы связи ионов висмута в кристаллической решетке BFO. Дальнейшее увеличение температуры обработки образцов приводит к дальнейшему уменьшению содержания требуемой фазы (таблица 1). Те же выводы справедливы для слоев BFLO (таблица 2). Однако общее содержание фазы перовскита в легированных слоях выше, чем в слоях без добавления лантана, отожженных при тех же условиях. Это объясняется расширением диапазонов концентраций исходных металлов, необходимых для образования требуемой фазы, за счёт увеличения количества компонентов в материале. Повышение содержания требуемой фазы от 60 % до 65 % при повышении температуры обработки от 700 °С до 800 °С связано с перестройкой кристаллической структуры наноматериала. Однако предельное содержание фазы перовскита при высоких температурах термообработки ниже, чем при термообработке при 550 °С. При этом низкая температура отжига должна компенсироваться длительным временем отжига.

Таблица 1 – Содержание фазы перовскита в полученных образцах BiFeO_3

Образец	Температура и время обработки, °С	Содержание фазы перовскита, %
BFO	550-10 ч	74
	700-3 ч	64
	800-3 ч	63

Условия термообработки наноструктурированных слоев BLFO и результаты рентгеновского анализа представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Содержание фазы перовскита в слоях $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$

Образец	Температура и время обработки, °C	Содержание фазы перовскита, %
BLFO	180-2 часа	-
	550-10 часов	80.5
	700-3 часа	59.8
	800-3 часа	65.5

Также были определены размеры кристаллитов (см. таблицу 3).

Таблица 3 – Размеры кристаллитов в слоях BFO and BFLO, термообработанных в различных условиях

Образец	Температура и время обработки, °C	Размер кристаллита, нм
BFLO	550, 3 часа	25
	600, 3 часа	19
	700, 3 часа	18
	800, 3 часа	16
BFO	550, 10 часов	15
	600, 3 часа	15
	700, 3 часа	15

Результаты исследования поверхности синтезированных слоев после термообработки при 550°C в течение 10 часов показаны на рисунке 1 (изображение АСМ). Было установлено, что средний размер частиц составляет около 125 нм при субшероховатости поверхности порядка 30 нм.

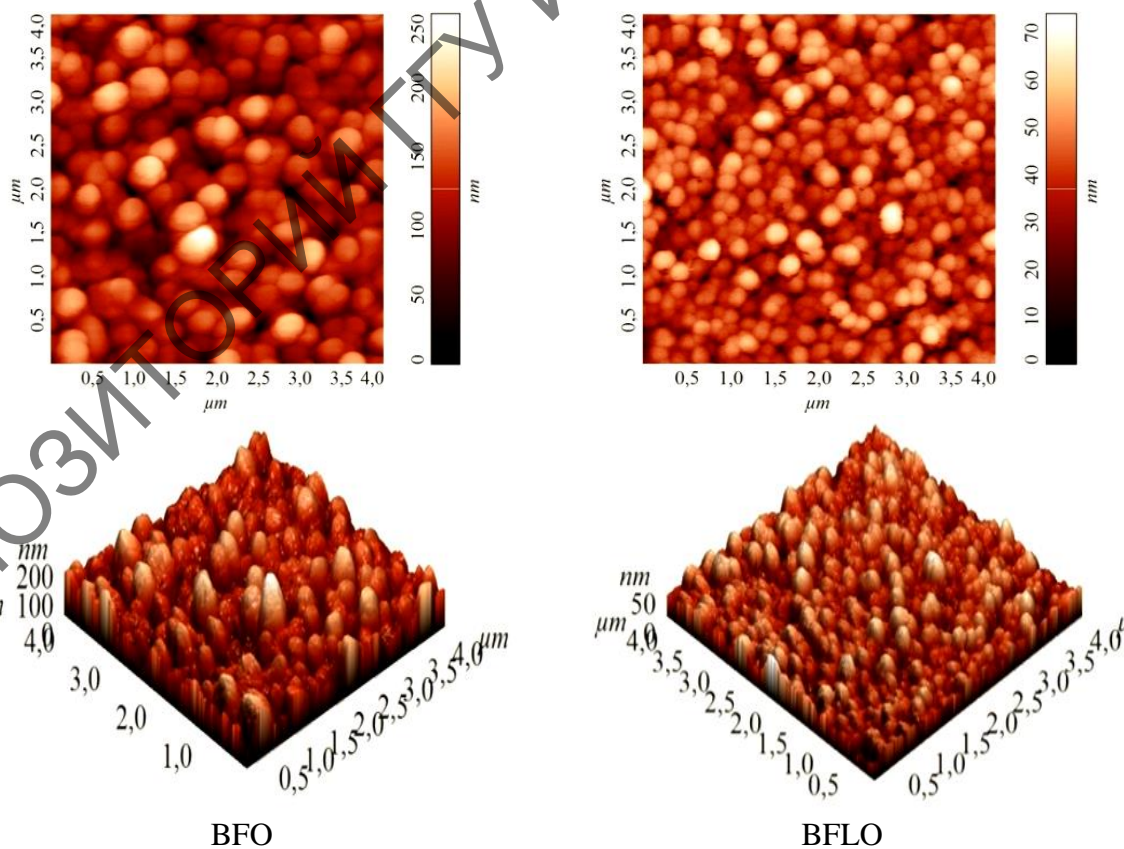


Рисунок 1 – АСМ изображения поверхности слоев BFO и BFLO

Таблица 4 – Параметры поверхности слоев BFO и BFLO

Образец	Субшероховатость R_a , нм	Средний размер частиц, нм
BFO	28	127
BFLO	8	90

Было установлено, что легирование лантаном приводит к значительному (примерно в 1,5 раза) уменьшению среднего размера зерна и уменьшению (примерно в 4 раза) субшероховатости поверхности наноструктурированного слоя BFLO. С точки зрения потенциального использования в нанoeлектронике необходимо достичь минимальной шероховатости поверхности пленки, что делает предпочтительным использование BFLO.

Золь-гель-методом получены наноструктурированные слои состава BiFeO_3 и $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$ с содержанием фазы перовскита до 75 % (BiFeO_3) и до 80 % ($\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$), при этом средний размер частиц составляет около 130 нм (BiFeO_3) и 90 нм ($\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$). Наибольшее содержание требуемой фазы наблюдается для слоев состава $\text{Bi}_{0,9}\text{La}_{0,1}\text{FeO}_3$, отожженных в течение 10 часов при температуре обработки 550 °C. Увеличение температуры синтеза слоев приводит к уменьшению доли фазы перовскита. Формирование примесных фаз происходит из-за потери висмута при пиролизе вследствие высоких температур отжига. Можно предположить, что затруднение формирования структуры перовскита вызваны трудностью обеспечения необходимого стехиометрического состава (BiFeO_3), а также сложностями возникновения устойчивых химических связей между элементами. Введение примеси лантана упрощает формирование фазы перовскита. Легирование лантаном приводит к значительному (примерно в 1,5 раза) уменьшению среднего размера зерна и уменьшению (примерно в 3,5 раза) субшероховатости поверхности наноструктурированного слоя BFLO. С точки зрения потенциального использования в нанoeлектронике необходимо достичь минимальной шероховатости поверхности пленки, что делает предпочтительным использование BFLO.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (грант №Т20Р-359) и программы Евросоюза Horizon 2020 по гранту MSK-Rise № 778070

Список использованных источников

- 1 Damjanovic, D. A morphotropic phase boundary system based on polarization rotation and polarization extension / D. Damjanovic // J. Appl. Phys. Lett. – 2010. – Vol. 97. – P. 062906–062911.
- 2 Phase coexistence in $\text{Bi}_{1-x}\text{Pr}_x\text{FeO}_3$ ceramics / D. V. Karpinsky [et al.] // J. of Materials Science. – 2014. – № 49(20). – P. 6937–6943.
- 3 Arnold, D. C. Composition-driven structural phase transitions in rare-earth-doped BiFeO_3 ceramics: a review / D. C. Arnold // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. – 2014. – 62(1). – P. 62–70.
- 4 Structural and magnetic phase transitions in $\text{Bi}_{1-x}\text{Ca}_x\text{Fe}_{1-x}\text{Mn}_x\text{O}_3$ multiferroics / D. V. Karpinsky [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. – 2017. – Vol. 692. – P. 955–962.
- 5 Suastiyanti, D. Synthesis of BiFeO_3 nanoparticle and single phase by sol-gel process for multiferroic material / D. Suastiyanti, M. Wijaya // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2016. – Vol. 11 (2). – P. 901–905.
- 6 Finite-Temperature Properties of Rare-Earth-Substituted BiFeO_3 Multiferroic Solid Solutions / B. Xu [et al.] // Adv. Funct. Mater. – 2014. – Vol. 23. – P. 552–558.
- 7 Thermodynamic potential and phase diagram for multiferroic bismuth ferrite (BiFeO_3) / D. V. Karpinsky [et al.] // npj Computational Materials. – 2017. – Vol. 3. – P. 20–27.
- 8 Ferroelectric Properties of Nanostructured SBTN Sol-Gel Layers / V. V. Sidsky [et al.] // Recent Global Research and Education, Springer. – 2017. – Vol. 519. – P. 103–108.

9 Nanostructure and Ferroelectric Properties of Sol-Gel SBTN-Films for Electronic Devices / S. A. Khakhomov [et al.] // Recent Advances in Technology Research and Education. INTER-ACADEMIA 2017, Springer. – 2018 – Vol. 660 – P. 144–150.

10 Synthesis of BiFeO₃-Powders by Sol-Gel Process / S. A. Khakhomov [et al.] // Recent Advances in Technology Research and Education. INTER-ACADEMIA 2018, Springer. – 2019. – Vol. 53. – P. 43–48.

С. В. Шалупаев, Ю. В. Никитюк, А. А. Серeda

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

КОМБИНИРОВАННОЕ ЛАЗЕРНОЕ ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР ИЗ СТЕКЛА

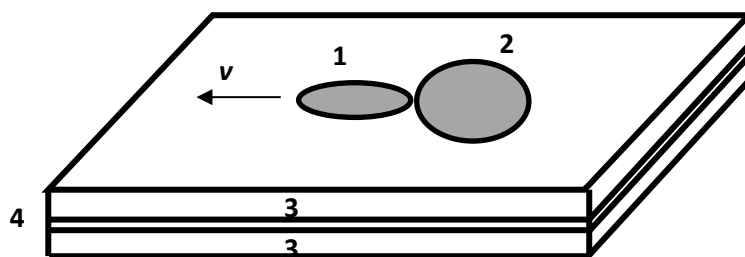
При изготовлении изделий сложной формы из хрупких неметаллических материалов в ряде ситуаций существует необходимость резки по замкнутым криволинейным контурам (примером может служить изготовление заготовок для производства автомобильных зеркал и стекол). Разделение по криволинейным траекториям классическим методом управляемого лазерного термораскалывания, с использованием СО₂-лазера в качестве источника излучения, обусловлено рядом трудностей. Например, для лазерного термораскалывания при резке по криволинейному контуру (особенно если радиусы кривизны малы), происходит смещение зоны воздействия хладагента относительно траектории лазерного воздействия. Это обуславливает заметные отклонения формируемой микротрещины от линии резки. Для устранения этого недостатка была разработана схема установки, отличительной особенностью которой является использование пятикоординатной системы управления [1], а также метода с применением дополнительного объемного нагрева материала лазерным излучением (например, силикатных стекол и алюмооксидной керамики – излучением с длиной волны $\lambda = 1,06$ мкм) [2].

В работах [3]–[9] приведены исследования по получению несквозных каналов в хрупких неметаллических материалах, таких как силикатное и кварцевое стекло, полупроводниковые кристаллы, например арсенид галлия посредством импульсного оптического пробоя поверхности микро-, нано- и фемтосекундными лазерами. При этом образуются каналы диаметром 100–500 мкм.

При разделении стеклоизделий по криволинейным контурам представляется возможным использование серии таких каналов выполненных вдоль контура обработки для инициализации разделяющей трещины и в качестве направляющих при ее развитии по криволинейным траекториям. Ниже выполнены теоретические исследования возможности использования таких каналов в качестве дефектов.

Моделирование процессов лазерного термораскалывания основано на использовании средств термо-прочностного анализа, применимых для проведения прочностного анализа на основе результатов решения задачи теплопроводности. При этом тепловой и прочностной анализ выполняются последовательно друг за другом, что соответствует методике решения несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке [10]–[12].

В соответствии с этим выполнен расчет распределения температурных полей внутри ламинированного стекла (триплекс) при лазерной обработке с использованием эллиптического пучка, а затем по полученным температурным полям в рамках теории термоупругости выполнен расчет полей термоупругих напряжений. Схема процесса представлена на рисунке 1. В качестве образца для моделирования выбрана конструкция из 2 пластин силикатного float-стекла толщиной 3 мм с PVB пленкой толщиной 0,38 мм, размеры пластины 6х6 мм. При этом посередине пластины выполнен сквозной канал диаметром 450 мкм. Свойства стекла и PVB пленки представлены в работах [13]–[19].



1 – зона воздействия CO_2 -лазера, 2 – зона воздействия хладагента,
3 – стеклянные пластины, 4 – PVB пленка.

Рисунок 1 – Схема процесса управляемого лазерного термораскалывания ламинированного стекла (триплекс) с использованием эллиптических пучков

На рисунке 2 представлена модель пластины с каналом.

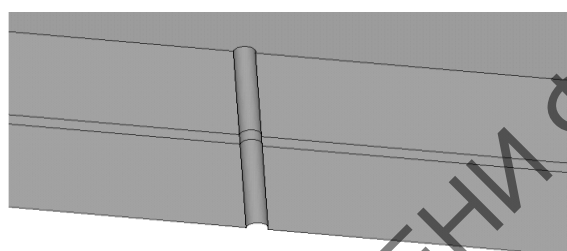


Рисунок 2 – Общий вид модели с отверстием

Пучок CO_2 -лазера, энергия которого поглощается в тонком поверхностном слое материала, моделируется как поверхностный тепловой источник, с плотностью мощности теплового источника $0,8 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$, и с большой и малой полуосями соответственно равными 3 и 1.3 мм. Лазерные пучки и хладагент формируются симметрично с обеих сторон ламинированного стекла (триплекс), поскольку PVB пленка не обладает упругими свойствами и не позволяет образовать сквозную трещину по всей толщине образца. Для окончательного разделения триплекса требуется дополнительное воздействие инфракрасными нагревательными элементами, для размягчения пленки. При используемых параметрах подачи воздушно-водяной смеси обеспечивается охлаждение поверхности стекла с коэффициентом теплоотдачи равным $6800 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ [19]. Хладагент подается на поверхность в виде мелкодисперсной воздушно-водяной смеси диаметром 6 мм. При этом пучок CO_2 -лазера и хладагент на поверхности обрабатываемой пластины располагали непосредственно друг за другом на линии обработки.

Скорость обработки материала v по схемам, представленным на рисунке 1, выбрана равной 10 мм/с. Одним из необходимых условий, которое должно соблюдаться при реализации процесса управляемого лазерного термораскалывания силикатных стекол, является то, что температура материала не должна превышать определенное значение, так называемую «температуру стеклования», которая для выбранных стекол составляет порядка 780 К. Вследствие того, что стекло является аморфным веществом, при превышении данного значения оно теряет упругие свойства.

На рисунке 3 представлено распределение термоупругих напряжений по толщине материала в фиксированный момент времени вдоль линии на которой лежит центр эллиптического лазерного пучка (оси Y) при реализации двухлучевого лазерного термораскалывания пластины триплекса в различные моменты обработки: а) – центр лазерного пучка на расстоянии 2 мм от края, б) – центр лазерного пучка совпадает с центром отверстия, в) – центр хладагента совпадает с центром отверстия, г) – центр лазерного пучка на расстоянии 4 мм от края, д) – центр лазерного пучка на расстоянии 5 мм от края.

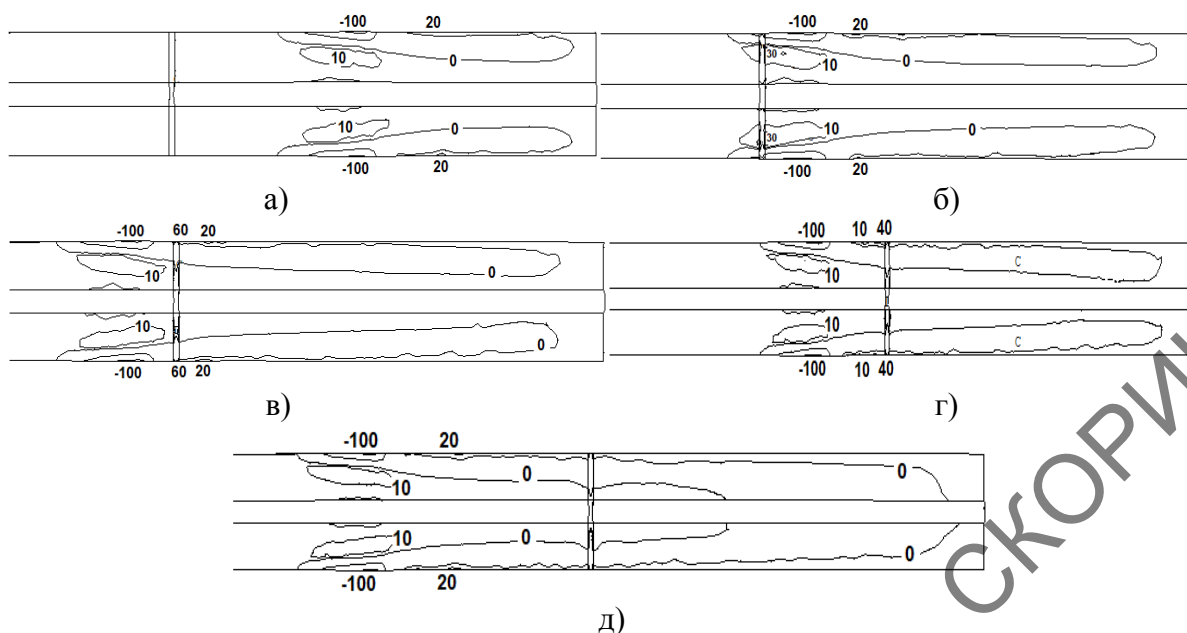


Рисунок 3 – Распределение термоупругих напряжений σ_{yy} (МПа) по толщине ламинированного стекла (триплекс) вдоль линии обработки в процессе двулучевого лазерного термораскалывания пластины триплекса в различные моменты обработки

В области воздействия излучения CO_2 -лазера, происходит интенсивный локальный нагрев поверхности образца. Далее тепловая энергия за счет теплопроводности распространяется вглубь материала. В области воздействия хладагента происходит резкое охлаждение поверхности образца.

Максимальные значения температур во все рассмотренные моменты времени не превышает температуры стеклования и составляет 709 К для варианта а), 721 К для варианта б), 716 К для варианта в), 716 К для варианта г), 700 К для варианта д).

Из анализа представленных на рисунке 4 распределений видно, что на поверхности материала в области подачи хладагента, где происходит резкое охлаждение материала, возникает зона сильных растягивающих напряжений. При этом максимум по величине напряжений лежит на линии воздействия CO_2 -лазера и хладагента. Зарождение трещины происходит на поверхности материала. Величины максимальных растягивающих напряжений для рассмотренных выше вариантов составляют: 20,6 МПа для варианта а), 35,9 МПа для варианта б), 63,6 МПа для варианта в), 45,0 МПа для варианта г), 20,6 МПа для варианта д).

Зона растягивающих напряжений, обусловленная действием хладагента, распространяется вглубь материала и ограничена снизу зонами сжимающих напряжений, сформированных лазерными пучками. Эти зоны ограничивают развитие зародившейся трещины вглубь материала.

Следует отметить, что в момент, когда центр лазерного пучка совпадает с центром отверстия, максимальные величины растягивающих напряжений в зоне под лазерным пучком становятся больше, чем в зонах обусловленной воздействием хладагента, что может привести к инициализации трещины от образовавшегося канала в пластине. Однако далее происходит резкое увеличение величины растягивающих напряжений на поверхности материала в окрестности отверстия, значительно превышающие предел прочности стекла на разрыв, что создает условия для стабильного зарождения разделяющей трещины от каналов, полученных посредством импульсного оптического пробоя поверхности микро-, пико- и фемтосекундными лазерами.

Список использованных источников

1 Установка для лазерной резки хрупких неметаллических материалов : патент № 2164 РБ. / С. В. Шалупаев, Е. Б. Шершнев, Ю. В. Никитюк, А. А. Середа, А. Евтухов. – МКИ7 С 03В 33/02. – Заявка и 20050085, заявлено 2005.04.22. – Опубликовано 30.09. 2005.

2 Лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов по замкнутым криволинейным контурам / С. В. Шалупаев, Ю. В. Никитюк, А. А. Середа // Оптический журнал. – 2008. – Т. 75, № 2. – С. 11–15.

3 Эффект затягивания излучения CO₂-лазера в узкий канал при обработке металлов комбинированным лазерным излучением / А. В. Федин [и др.] // Изв. РАН. Сер. физ. – 1999. – 63, № 10. – С. 2053–2058.

4 Какорин, С. А. Особенности фотовозбуждения и распределения температуры в полупроводнике при встречном двухчастотном воздействии / С. А. Какорин, В. Л. Комолов, М. Н. Либенсон // Письма в ЖТФ. – 1982. – Т. 8, вып. 9. – С. 513–517.

5 Комолов, В. Л. Разогрев и лазерное разрушение полупроводников / В. Л. Комолов, М. Н. Либенсон, Г. Д. Шандыбина // Известия АН СССР, серия физическая. – 1985. – Т.46, №6. – С. 1103–1110.

6 Оптический пробой арсенида галлия при импульсном двухчастотном воздействии / А. М. Бонч-Бруевич [и др.] // Письма в ЖТФ. – 1982. – Т. 8, вып. 8. – С. 507–510.

7 Гагарин, А. П. Исследование крупномасштабного воздействия лазерного излучения на металлы и стекла: автореф. дис. ...д-р. физ.-мат. наук: 05.27.03 / А. П. Гагарин. – Москва, 1999. – 40 с.

8 Кононенко, В. В. Модификация кварцевого стекла лазерными импульсами фемтосекундной длительности / В. В. Кононенко, В. П. Папинин, М. С. Комленок, В. И. Конов // Компьютерная оптика. – Т. 33, №3. – 2009. – С. 254–259.

9 Сергеев, М. С. Исследование крупномасштабного воздействия лазерного излучения на металлы и стекла: дис. ...канд. техн. наук: 01.04.05 / М. С. Сергеев. – Санкт-Петербург, 2016. – 131 с.

10 Шабров, Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н. Н. Шабров. – Ленинград : Машиностроение, 1983. – 212 с.

11 Карзов, Г. П. Физико – механическое моделирование процессов разрушения / Г. П. Карзов, Б. З. Марголин, В. А. Шевцова. – Санкт-Петербург : Политехника, 1993. – 391 с.

12 Коваленко, Л. Д. Основы термоупругости / Л. Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.

13 AGS. Technical Data Sheet - Planibel [Электронный ресурс] / Официальный сайт AGS Glass UK Ltd. – Режим доступа : <https://www.agc-yourglass.com/>. – Дата доступа : 10.03.2019.

14 CAMILLA FORS. MECHANICAL PROPERTIES OF INTERLAYERS IN LAMINATED GLASS – Experimental and Numerical Evaluation (Master's Dissertation) [Электронный ресурс] / Официальный сайт Lund University. FACULTY OF ENGINEERING. – Режим доступа : <http://www.byggmek.lth.se>. – Дата доступа : 20.03.2019.

15 PROPERTIES OF SODA-LIME SILICA FLOAT GLASS [Электронный ресурс] / Technical Bulletin. NSG group. – Режим доступа : <https://www.pilkington.com/resources/ats129propertiesofglass20130114.pdf>. – Дата доступа : 10.03.2019.

16 ГОСТ 9438-85. Пленка поливинилбутиральная клеящая. Технические условия. – Москва : Издательство стандартов, 1985. – 27 с.

17 Properties of SGP and PVB [Электронный ресурс] / Официальный сайт DuPont. – Режим доступа : <https://www.dupont.com/building.html>. – Дата доступа : 24.02.2019.

18 Saflex® Clear PVB interlayer [Электронный ресурс] / Официальный сайт компании Saflex. – Режим доступа : <https://www.saflex.com/products>. – Дата доступа : 15.03.2019.

19 Кикоин, И. К. Таблицы физических величин: Справочник. / И. К. Кикоин, В. Г. Аверин, Б. А. Аронзон ; под ред. И. К. Кикоина. – Москва : Атомиздат, 1976. – 1008 с.



ФИЗИКА

В. В. Андреев

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЖАКОБА-ВИКА

Введение. Парциальное разложение матричных элементов реакций взаимодействий, как известно, представляет собой удобный аппарат для анализа угловых распределений вторичных частиц. При этом сечение реакции можно получить в относительно общем виде. Однако использование этого разложения применительно к диаграммам Фейнмана наталкивается на ряд проблем. Во первых, это вычисление коэффициентов парциального разложения. Структура диаграмм Фейнмана не позволяет находить их непосредственно. Во-вторых, при интегрировании дифференциального сечения по угловым переменным возникают специфические интегралы, которые требуют специальных методов их вычисления.

В данной работе представлена методика вычисления диаграмм Фейнмана и их квадратичных комбинаций, основанная на разложении Джакоба-Вика [1] для бинарных реакций.

1. Разложение Джакоба-Вика. В этом разделе изложим некоторые элементы разложения Джакоба-Вика для бинарных реакций $a(p_1, \lambda_1) + b(p_2, \lambda_2) \rightarrow c(k_1, \tau_1) + d(k_2, \tau_2)$ в системе центра инерции. Удобно определить двухчастичный базис состояний $|i\rangle = |a, b\rangle$ и $|f\rangle = |c, d\rangle$ в переменных полного импульса двух частиц

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{P}_f = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (1)$$

и импульса относительного движения. В системе центра инерции, где $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, относительные импульсы состояний определяются уравнениями

$$\mathbf{p}_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \mathbf{k}_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (2)$$

Пусть в сферической системе координат импульсы (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{12} &= p_{12} \{ \sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i, \cos \theta_i \}, \quad p_{12} = |\mathbf{p}_{12}|, \\ \mathbf{k}_{12} &= k_{12} \{ \sin \theta_f \cos \phi_f, \sin \theta_f \sin \phi_f, \cos \theta_f \}, \quad k_{12} = |\mathbf{k}_{12}|. \end{aligned} \quad (3)$$

Разложение Джакоба-Вика S -матричных элементов для бинарной реакции в системе центра инерции можно представить в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ &= \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi) \langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S_J | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Индексы D -функции Вигнера $\lambda_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$ и $\tau_{12} = \tau_1 - \tau_2$ являются функциями спиральностей частиц a, b, c и d . Углы ϕ, θ связаны с сферическими углами $\phi_f, \theta_f, \phi_i, \theta_i$ формулой

$$D_{\nu,\rho}^{*J}(\phi, \theta, -\phi) = \sum_M D_{M,\tau_1-\tau_2}^{*J}(\phi_f, \theta_f, -\phi_f) D_{M,\lambda_1-\lambda_2}^J(\phi_i, \theta_i, -\phi_i). \quad (5)$$

Соответственно, парциальная спиральная амплитуда $\langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S_J | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ связана с матричным элементом $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ посредством уравнения

$$\langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S_J | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi D_{\nu,\rho}^J(\phi, \theta, -\phi) \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \quad (6)$$

Разложения (4) и (6) обобщены на случай с $\mathbf{P}_i \neq 0$ в [2].

2. Методика вычисления дифференциального сечения. Итак из общей релятивистской теории реакций следует, что соответствующий любой диаграмме Фейнмана бинарной реакции

$$a(p_1, \lambda_1) + b(p_2, \lambda_2) \rightarrow c(k_1, \tau_1) + d(k_2, \tau_2) \quad (7)$$

матричный элемент может быть также представлен в виде разложения (4)

$$\mathcal{M}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, t) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{2J+1}{4\pi} h_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(J) D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi). \quad (8)$$

Для S -матричного элемента диаграмма Фейнмана ряд по J обрывается. Тогда такое разложение становится удобным для практических расчетов. Однако, для t -канальных или u -канальных диаграмм ряд становится бесконечным.

Модифицируем разложение Джакоба-Вика для случая t - и u -канальных диаграмм. Матричные элементы диаграммы Фейнмана раскладываются на набор матричных элементов $\tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$, которые содержат спиновую структуру внешних частиц и инвариантные коэффициенты $F_n(s, t)$

$$\mathcal{M}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, t) = \sum_n F_n(s, t) \tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi; n). \quad (9)$$

Инвариантные коэффициенты $F_n(s, t)$ зависят только от скалярных произведений импульсов частиц. В этом случае, матричный элемент $\tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$ можно разложить уже в конечный ряд вида

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi) = \sum_{J=0}^k \tilde{h}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(J) D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi), \quad (10)$$

где $k = \max(|\lambda_{12}|, |\tau_{12}|)$ (максимальное из возможных значений).

Можно показать, что ряд по J становится бесконечным из-за присутствия инвариантных коэффициентов вида (например для t - и u -канальных диаграмм)

$$F(s, t) \sim \frac{1}{t-m^2}, \quad F(s, t) \sim \frac{1}{u-m^2} \quad (11)$$

вследствие соотношения [3, с.1027, формула 8.791]

$$\frac{1}{t-m^2} = \frac{x}{\cos \theta - y} = (-x) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos \theta) Q_\ell(y), \quad (12)$$

где x и y являются функциями, зависящими только от s и масс частиц бинарной реакции, а функции $P_\ell(y)$ и $Q_\ell(y)$ – полиномы Лежандра первого и второго рода.

В итоге имеем, что вычислительная схема получения матричного элемента диаграммы Фейнмана содержит следующие этапы:

1. Матричный элемент диаграммы Фейнмана представляем в виде

$$\mathcal{M}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, t) = \sum_n F_n(s, t) \tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi; n). \quad (13)$$

2. Функцию $\tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi; n)$ ищем в виде разложения, аналогичному

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi; n) = \sum_{J=0}^k \tilde{h}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(n, J) D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi), \quad (14)$$

где $k = \max(|\lambda_{12}|, |\tau_{12}|)$. Коэффициенты разложения вычисляются посредством уравнения

$$\tilde{h}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(J) = \frac{2J+1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^J(\phi, \theta, -\phi) \tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi). \quad (15)$$

3. Для вычисления $\tilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$ как явно скалярной функции используем метод базисных спиноров[4–6], в котором удастся представить наиболее удобном виде для интегрирования по угловым переменным θ, ϕ .

Запишем квадратичную комбинацию матричных элементов $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*$, которые встречаются в процессе расчета дифференциального сечения на основе формул (13) и (14):

$$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = \sum_{n, n'} \sum_{J, J'} F_n(s, t) F_{n'}^*(s, t) h_n^J h_{n'}^{*J'} D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi) D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{J'}(\phi, \theta, -\phi). \quad (16)$$

Используя разложение Клебша-Гордана для произведения двух D -функций преобразуем (16) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* &= \sum_{n, n'} \sum_{J, J'} F_n(s, t) F_{n'}^*(s, t) h_n^J h_{n'}^{*J'} \times \\ &\times \sum_{\ell=|J-J'|}^{J+J'} (-1)^{\lambda_{12}-\tau_{12}} \mathbf{C} \begin{Bmatrix} J & J' & \ell \\ \lambda_{12} & -\lambda_{12} & 0 \end{Bmatrix} \mathbf{C} \begin{Bmatrix} J & J' & \ell \\ \tau_{12} & -\tau_{12} & 0 \end{Bmatrix} P_\ell(\cos \theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Следующий шаг состоит в интегрировании по угловым переменным.

3. Вычисление интегралов. Однако при вычислении сечения (17), из-за наличия в знаменателях инвариантных коэффициентов $F_n(s, t)$ зависимости от $\cos \theta$ (см. (11)) возникает задача расчета интегралов по углу θ вида

$$\mathcal{I}_{\ell, 0}(z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} P_\ell(x) dx, \quad -1 \leq z_{1,2} \leq 1, \quad (18)$$

$$\mathcal{I}_{\ell, 1}(z_2, z_1, y) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y)} dx, \quad (19)$$

$$\mathcal{I}_{\ell, 2}(z_2, z_1, y_1, y_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y_1)(x-y_2)} dx. \quad (20)$$

Такая задача оказалась непростой при численных расчетах (см. [7]). В некоторых случаях числовые нестабильности, особенно при $\cos \theta \sim \pm 1$ приводят к низкой скорости программ и падению точности расчетов.

Интеграл

$$\mathcal{I}_{\ell,3}(z_2, z_1, y) = \mathcal{I}_{\ell,2}(z_2, z_1, y, y) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y)^2} dx \quad (21)$$

является вспомогательным и также может встречаться в расчетах.

Интеграл (18) несложно рассчитать в общем виде:

$$\mathcal{I}_{\ell,0}(z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} P_\ell(z) dz = \frac{F_\ell(z_2) - F_\ell(z_1)}{2\ell + 1}, F_\ell(z) = P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z). \quad (22)$$

Для вычисления интеграла (19) используем новую формулу

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) P_k(x) \times (P_k(y) w_{n-1}(y) - P_n(y) w_{k-1}(y)), \quad n \geq 1, \quad (23)$$

где $w_n(y)$ является полиномом переменной z [3, с. 1033, формула 8.831].

$$w_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)} P_k(y) P_{n-k}(y) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(2n+1-4k)}{(2k+1)(n+1-k)} P_{n-2k}(y), \quad w_{-1}(y) = 0. \quad (24)$$

Для сокращения дальнейшей записи введем обозначение

$$R_{k,n}(y) = P_k(y) w_{n-1}(y) - P_n(y) w_{k-1}(y). \quad (25)$$

Тогда путем вычитания получим соотношение.

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x) - P_\ell(y)}{x - y} dx + P_\ell(y) \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{x - y} dx. \quad (26)$$

С помощью формул (23) и (26) для интеграла (20) получим, что

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y) = P_\ell(y) \ln \left| \frac{y - z_2}{y - z_1} \right| + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \mathcal{I}_{k,0}(z_2, z_1) R_{k,n}(y). \quad (27)$$

Интеграл (20) преобразуется к уравнению

$$\mathcal{I}_{\ell,2}(z_2, z_1, y) = \frac{1}{y_1 - y_2} \{ \mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y_1) - \mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y_2) \}, \quad \text{при } y_1 \neq y_2. \quad (28)$$

На основе вышеизложенной методики вычитания для интеграла (21) также несложно получить формулу для расчета $\mathcal{I}_{\ell,3}$:

$$\mathcal{I}_{\ell,3}(z_2, z_1, y) = P_\ell(y) \frac{z_2 - z_1}{(y - z_1)(y - z_2)} + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \mathcal{I}_{k,1}(z_2, z_1, y) R_{k,n}(y). \quad (29)$$

Формулы (27), (28) и (29) справедливы как для положительных, так и для отрицательных значений переменной y, y_1, y_2 .

Таким образом с помощью изложенной методики можно получить аналитическое выражение сечения бинарной реакции с учетом кинематических ограничений на угловые переменные.

Список использованных источников

1 Jacob, M. On the general theory of collisions for particles with spin/ M. Jacob, G. C. Wick // Annals of Physics. – 1959. – Vol. 7, 4. – P. 404–428.

2 Верле, Ю. Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – Москва : Атомиздат, 1969. – 442 с.

3 Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – 4-е переработанное изд. – Москва : Гос.изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.

4 Andreev, V. V. Analytic Calculation of Feynman Amplitudes / V. V. Andreev // Physics of Atomic Nuclei. – 2003. – Vol. 66, 2. – P. 383–393.

5 Andreev, V. V. Scattering QCD amplitudes with massive fermions using recursive relations / V. V. Andreev // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2009. – Vol. 12, 4. – P. 338–342.

6 Андреев, В. В. Вычисление фейнмановских диаграмм техникой блоков / В. В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2(19). – С. 7–12.

7 Electroweak radiative corrections to $e^+ e^- \rightarrow W W \rightarrow 4$ fermions in double pole approximation: The RACOONWW approach / A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth, D. Wackerath // Nucl. Phys. B. – 2000. – Vol. 587. – P. 67–117.

В. В. Андреев, О. М. Дерюжкова

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

КОЛЕБАНИЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИКА

Двойной математический маятник (рисунок 1) представляет собой интересную механическую систему, поскольку его колебания кардинальным образом отличаются от колебаний одинарного математического маятника. Как известно, колебания простого маятника носят периодический характер и при малых отклонениях от положения равновесия являются гармоническими. Колебания двойного математического маятника представляют собой чередующиеся колебания двух различных колебательных систем (l_1, m_1 и l_2, m_2) или биения, которые с увеличением энергии становятся хаотическими.

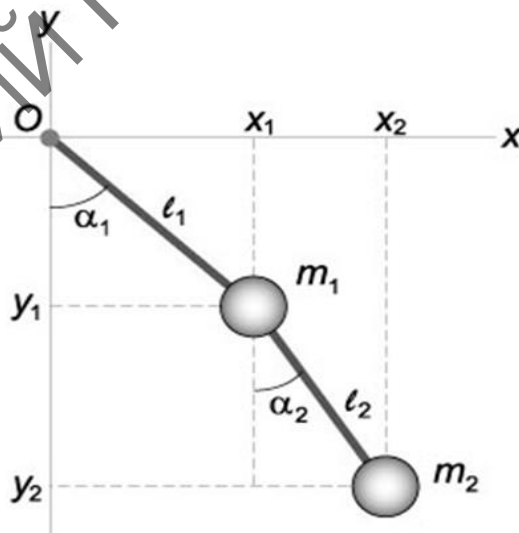


Рисунок 1 – Двойной математический маятник

Информация о двойном маятнике широко представлена как в физической литературе, так и на просторах интернета.

Цель данной работы продемонстрировать возможности современных систем численных и символьных вычислений при решении задач теоретической механики на примере пакета Wolfram Mathematica [1], основывающегося на инновационном языке

Wolfram Language. Wolfram Mathematica имеет доступ к широкой базе Wolfram Knowledgebase, которая включает реальные данные из тысяч предметных областей. База или библиотека содержит более 150000 примеров из Documentation Center и более 10000 демонстраций с открытым кодом в Wolfram Demonstrations Project. Все это позволяет считать систему Wolfram Mathematica цифровой системой знаний. Рассмотрим как используется данная система для изучения движения двойного математического маятника.

Математическое описание данного явления удобно провести в рамках Лагранжевого формализма, т. е. в обобщенных координатах, которыми в данном случае будут углы отклонения маятников от положения равновесия $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ (рисунок 1). Представив декартовы координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 через обобщенные, получим функцию Лагранжа, а затем уравнения колебаний маятников, которые являются уравнениями Лагранжа 2-го рода. В данном подходе функция Лагранжа имеет вид [2]:

$$L = T - U = T_1 + T_2 - (U_1 + U_2) = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1^2 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_2 \cos \alpha_2, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия маятников, U – потенциальная энергия.

Для получения уравнений движения воспользуемся пакетом VariationalMethods с функцией EulerEquations, при этом программный блок выглядит следующим образом:

(* Программный блок 1 *)

Needs["VariationalMethods`"];

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \alpha_1'[t]^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \alpha_2'[t]^2 + m_2 l_1 l_2 \alpha_1'[t] \alpha_2'[t] \text{Cos}[\alpha_1[t] - \alpha_2[t]] + (m_1 + m_2) g l_1 \text{Cos}[\alpha_1[t]] + m_2 g l_2 \text{Cos}[\alpha_2[t]];$$

(* Уравнения движения *)

deqns=EulerEquations[\mathcal{L} , { $\alpha_1[t]$, $\alpha_2[t]$ }, t];

(* Начальные условия *)

$$\text{ics} = \{ \alpha_1[0] = \alpha_{10}, \alpha_1'[0] = 0, \alpha_2[0] = \alpha_{20}, \alpha_2'[0] = 0 \}.$$

В результате выполнения данного блока уравнения движения, полученные на основе функции (1), представляют собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + m_2 l_2 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ + (m_1 + m_2) g \sin \alpha_1 = 0, \\ l_2 \ddot{\alpha}_2 + l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + g \sin \alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Следующий этап получения численного решения системы дифференциальных уравнений (2) для конкретных значений характеристик маятников (длина нити, масса шариков) осуществляется с помощью оператора NDSolve. Решение в виде интерполяционных функций, которое выдает второй модуль sol=NDSolve[{deqns,ics},{ α_1 , α_2 },{t,0,30}][[1]], представлено на рисунке 2. Такой подход дает возможность провести визуализацию, наглядную интерпретацию полученных результатов, продемонстрировать в интерактивном режиме все возможные виды колебаний двойного математического маятника как при больших энергиях, так и вблизи положения равновесия.

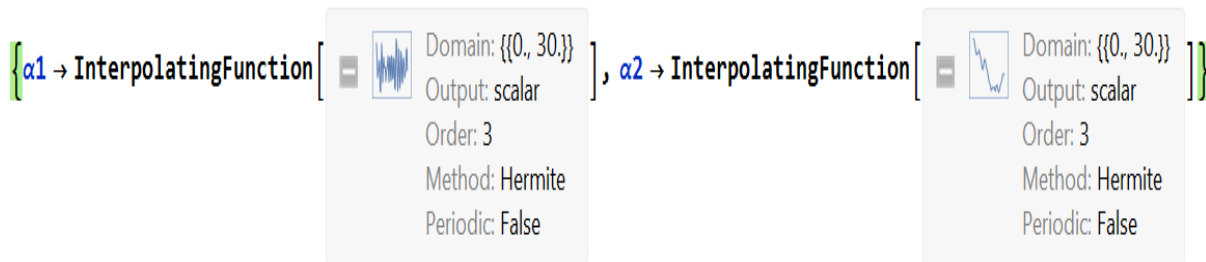


Рисунок 2 – Решение системы дифференциальных уравнений (2) в Wolfram Mathematica в виде интерполяционных функций

Программный блок, который позволяет построить траектории движения математических маятников с помощью функции ParametricPlot и сделать наглядную компьютерную динамическую модель движения такой системы, используя оператор Animate, приведен ниже:

```

x1[t_]:=l1Sin[alpha1[t]];
y1[t_]:= - l1Cos[alpha1[t]];
x2[t_]:=x1[t]+l2Sin[alpha2[t]];
y2[t_]:=y1[t]-l2Cos[alpha2[t]];
tt=30;
(*Графический блок*)
Show[ParametricPlot[Evaluate[{x1[t],y1[t]}/.sol],{t,0,30},PlotStyle->Blue],
ParametricPlot[Evaluate[{x2[t],y2[t]}/.sol],{t,0,30},PlotStyle->Red],
Graphics[{{Black,CapForm["Round"],Thickness[0.03],
Line[{{0,0},{x1[tt],y1[tt]}}]},
{Orange,Thickness[0.03],CapForm["Round"],
Line[{{x1[tt],y1[tt]},{x2[tt],y2[tt]}}]}]/.sol,
PlotRange->All,ImageSize->300]
(* Блок анимации *)
Animate[Graphics[{{Black,CapForm["Round"],Thickness[0.03],
Line[{{0,0},{x1[t],y1[t]}}]},
{Orange,Thickness[0.03],CapForm["Round"],
Line[{{x1[t],y1[t]},{x2[t],y2[t]}}]},Point[{{x2[t],y2[t]}}]/.sol,
PlotRange->{{-4.1,4.1},{2.6,-3.5}},Frame -> True},{t,0,15},
SaveDefinitions->True,AnimationRunning->False].

```

Результ выполнения графического блока представлен на рисунке 3.

Если предположить что углы $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ малы, то колебания маятников вблизи положения равновесия можно описать системой линейных дифференциальных уравнений. Для этого функцию Лагранжа (1) запишем с учетом разложения в ряд в приближении $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1$. Тогда выражение (1) с точностью до константы примет более простой вид:

$$\begin{aligned}
 L = T - U = T_1 + T_2 - (U_1 + U_2) = & \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + \\
 & + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 - \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) g l_1 \alpha_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \alpha_2^2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

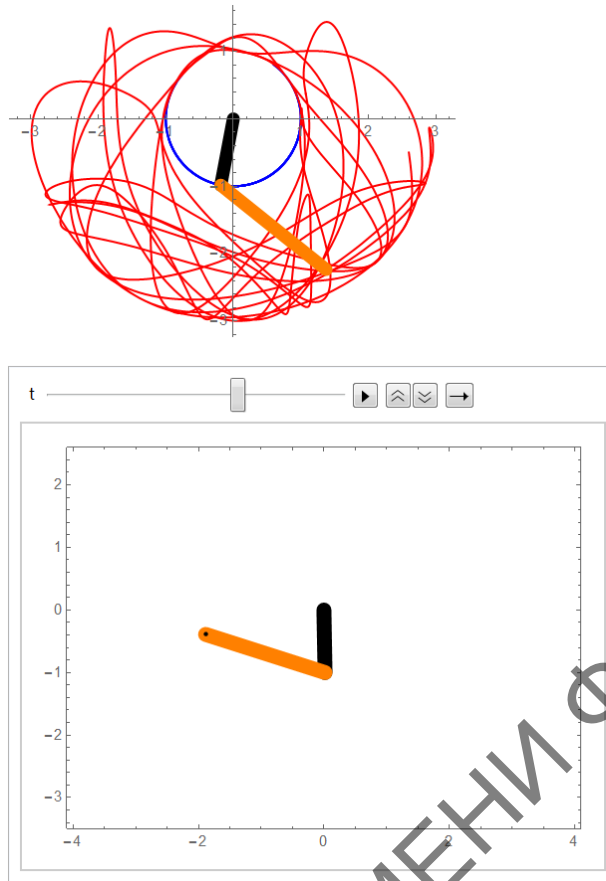


Рисунок 3 – Визуализация решений дифференциальных уравнений (2) в Wolfram Mathematica

а уравнения движения для малых колебаний, полученные при дифференцировании функции Лагранжа (3) по обобщенным координатам α_1 и α_2 , запишутся системой:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 + (m_1 + m_2)g\alpha_1 = 0, \\ l_1 \ddot{\alpha}_1 + l_2 \ddot{\alpha}_2 + g\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Аналитическое решение системы (4) вручную в общем случае весьма громоздко. Получить его можно в матричном или векторном виде используя понятия собственных векторов, собственных частот и нормальных координат.

Возможности системы Wolfram Mathematica значительно упрощают данный процесс. Аналитическое решение уравнений движения (4) системы, совершающей малые линейные колебания осуществляется с помощью оператора DSolve. Применение этого оператора после введения подстановок для случая $l_1 = l_2 = \ell, \dot{\alpha}_1[0] = 0, \dot{\alpha}_2[0] = 0$ дает решение в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{1}{2d} \sum_{\lambda=-1}^1 (d\alpha_1(0) - \lambda \ell \mu \alpha_2(0)) \cos[\omega_\lambda t], \\ \alpha_2(t) &= \frac{1}{2d} \sum_{\lambda=-1}^1 (d\alpha_2(0) - \lambda \ell (1 + \mu) \alpha_1(0)) \cos[\omega_\lambda t], \\ d &= \ell \sqrt{\mu(1 + \mu)}, \mu = \frac{m_2}{m_1}, \omega_\pm = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{(1 + \mu) \pm \sqrt{\mu(1 + \mu)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (5) ω – собственная частота колебаний маятников.

Таким образом, использование возможностей интерактивной системы компьютерной математики Wolfram Mathematica позволяет не только наглядно продемонстрировать колебания двойного математического маятника, но и получить траекторию его хаотического движения. Важно отметить, что создание программных модулей не требует больших временных затрат, поскольку Wolfram Mathematica содержит огромное количество примеров в своей информационной системе (Document Center). Примеры можно легко внедрить в программу расчетов. Важным фактором является и наличие дружелюбного интерфейса, который близок к обычным физико-математическим расчетам.

Список использованных источников

- 1 Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Addison-Wesley, 1999. – 359 p.
- 2 Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 томах / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – Москва : Физматлит, 2018. – Т. 1 : Механика. – 224 с.

Е. В. Вакулина¹, Н. В. Максименко², В. В. Андреев²

¹г. Новозыбков, БГУ имени академика И. Г. Петровского,

²г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ИЗЛУЧЕНИЕ ПИОНА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ПОЛЕМ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Введение. В связи с созданием источников интенсивного электромагнитного поля исследование электродинамических и адронных процессов в таких полях приобретает особую актуальность. В реакциях взаимодействия структурных частиц с электромагнитным полем проявляются квантовые свойства как самих частиц, так и свойства механизмов взаимодействия интенсивных электромагнитных полей с этими частицами.

Поэтому представляет интерес исследование влияния электромагнитного поля на квантовые процессы излучения пионов, взаимодействующих с полем плоской электромагнитной волны.

Известное решение Д. М. Волкова [1], описывающее движение электрона в поле плоской электромагнитной волны, нашло широкое применение в исследованиях квантовых эффектов в электродинамических процессах [2, 3].

В работе [4] представлены результаты исследований распадов элементарных частиц в поле плоской электромагнитной волны.

В процессах рассеяния фотонов на адронах важную роль играют такие структурные константы, как поляризуемости, интерпретация которых была получена на основе общих принципов релятивистской квантовой теории поля [5, 6].

В работах [7–9] в рамках релятивистской квантовой теории поля получены эффективные лагранжианы двухфотонного взаимодействия с адронами с учетом поляризуемостей, которые согласуются с амплитудами в низкоэнергетическом представлении. На основе этих лагранжианов получены релятивистские полевые уравнения движения частиц с поляризуемостями в электромагнитном поле [10]. В работе [11] были найдены точные решения релятивистских волновых уравнений для частиц с дипольными поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны.

Поэтому представляет интерес изучить реакцию электромагнитного излучения пиона, взаимодействующего с полем плоской электромагнитной волны. Данная работа и посвящена этому процессу и сравнению результатов расчета с полным сечением комптоновского рассеяния на пионе, используя методы работ представленные в [2, 3, 12].

1. Излучение фотона пионом в поле плоской электромагнитной волны. Лагранжиан пиона, движущегося в электромагнитном поле, имеет вид:

$$L = L_0 + L_{int}. \quad (1)$$

В этом выражении:

$$L_0 = (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

а лагранжиан взаимодействия:

$$L_{int} = iQA_\nu(\phi\partial^\nu\phi^* - \phi^*\partial^\nu\phi) + Q^2 A^2 \phi^* \phi.$$

В этих уравнениях $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\phi(x)$ – волновая функция пиона, Q – заряд и m – масса пиона, A_μ – четырёхмерный потенциал электромагнитного поля.

Из лагранжиана (1) и условия Лоренца $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ следует уравнение движения:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = -2iQA^\mu \partial_\mu \phi + Q^2 A^2 \phi. \quad (2)$$

Представим решение уравнения (2) следующим образом [1, 4]:

$$\phi(x) = -e^{ipx} \chi(\varphi), \quad (3)$$

где $\varphi = kx$, k – волновой четырёхмерный вектор.

Из уравнений (2) и (3) следует:

$$(pk)\chi' = -i\left(Q(Ap) - \frac{1}{2}Q^2 A^2\right)\chi, \quad (4)$$

где $\chi' = \frac{\partial\chi(\varphi)}{\partial\varphi}$.

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид [2]:

$$\phi_p(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \exp(-ipx - i \int_0^\varphi \frac{Q}{(kp)} \left((pA(\varphi)) - \frac{Q}{2} A^2(\varphi) \right) d\varphi'). \quad (5)$$

Элемент -матрицы для перехода пиона из состояния ϕ_p в состояние $\phi_{p'}$ в случае излучения фотона:

$$A'_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega'}} e_\mu^{(\lambda')} e^{ik'x}$$

с импульсом $k^{\mu'} = (\omega', \vec{k}')$ и поляризацией $e_\mu^{(\lambda')}$ равен:

$$S_{fi} = \int d^4x j^\mu(x) A'_\mu(x). \quad (6)$$

Плотность тока, которая содержится в (6), определяется следующим образом:

$$j^\mu(x) = iQ\phi_{p'}^* \vec{\partial}^\mu \phi_p - 2Q^2 A^\mu(\varphi) \phi_{p'}^* \phi_p, \quad (7)$$

где $\vec{\partial}^\mu = \vec{\partial}^\mu - \delta^\mu$, $A^\mu(\varphi)$ – потенциал плоской волны.

Рассмотрим взаимодействие пиона с плоской электромагнитной волной, которая определяется потенциалом [2, 3]:

$$A(x) = a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi. \quad (8)$$

Амплитуды a_1 и a_2 четырёхмерные вектора равные по величине и взаимно ортогональные:

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2, \quad a_1 \cdot a_2 = 0, \quad a_1 k = a_2 k = 0.$$

В выражении (5) выполним интегрирование по φ с учетом поля (8):

$$\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2q_0}} e^{-iS(p)}, \quad \phi_{p'}^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2q_0}} e^{iS(p')}. \quad (9)$$

В выражении (9) введены функции:

$$S(p) = qx + Q \frac{(a_1 p)}{(kp)} \sin(kx) - Q \frac{(a_2 p)}{(kp)} \cos(kx) \quad (10)$$

и выражение для $S(p')$ следует из (10) в результате замены p на p' . В (10) введен четырехмерный квазиимпульс:

$$q = p - \frac{Q^2 a^2}{2(kp)} k,$$

который удовлетворяет соотношению:

$$q^2 = p^2 - Q^2 a^2 = m_*^2,$$

где $m_* = m \sqrt{1 - \frac{Q^2 a^2}{m^2}}$ – масса частицы с квазиимпульсом q .

Подставляя выражения (7), (9) и (10) в (6) S -матричный элемент примет следующую форму:

$$S_{fi} = Q \int d^4 x \frac{e^{i(k' + q' - q)x}}{\sqrt{8\omega' q_0 q'_0}} e^{-i(\alpha_1 \sin\varphi - \alpha_2 \cos\varphi)} (\Sigma_0 + \Sigma_1 \cos\varphi + \Sigma_2 \sin\varphi). \quad (11)$$

В (11) введены следующие обозначения:

$$\Sigma_0 = (q' + q)e',$$

$$\Sigma_1 = (ke')\beta_1 - 2Q(a_1 e'),$$

$$\Sigma_2 = (ke')\beta_2 - 2Q(a_2 e').$$

В определении (11) в показателе экспоненты содержатся α_1 и α_2 , которые имеют вид:

$$\alpha_1 = Q \left(\frac{(a_1 p)}{(kp)} - \frac{(a_1 p')}{(kp')} \right), \quad \alpha_2 = Q \left(\frac{(a_2 p)}{(kp)} - \frac{(a_2 p')}{(kp')} \right).$$

если в выражениях для α_1 и α_2 заменить знак минус на плюс, то получим соответственно β_1 и β_2 .

Как видно из формулы (11) в определении -матрицы входит три слагаемых:

$$\Sigma_0 e^{-i(\alpha_1 \sin\varphi - \alpha_2 \cos\varphi)}, \quad (12)$$

$$\Sigma_1 \cos\varphi e^{-i(\alpha_1 \sin\varphi - \alpha_2 \cos\varphi)}, \quad (13)$$

$$\Sigma_2 \sin\varphi e^{-i(\alpha_1 \sin\varphi - \alpha_2 \cos\varphi)}. \quad (14)$$

Разложим (12–14) в ряд Фурье следуя [4]. Тогда сумма слагаемых (12–14) примет вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\Sigma_0 B_n + \Sigma_1 B_{1n} + \Sigma_2 B_{2n}) e^{-in\varphi}. \quad (15)$$

Коэффициенты суммы (15) B_n , B_1 и B_2 выражаются через функции Бесселя $J_n(z)$ следующим образом:

$$B_n = J_n(z) e^{in\varphi_0},$$

$$B_{1n} = J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\varphi_0} + J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\varphi_0},$$

$$B_{2n} = \frac{1}{2i} (J_{n+1}(z) e^{i(n+1)\varphi_0} - J_{n-1}(z) e^{i(n-1)\varphi_0}),$$

где введены величины $z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ и определены $\cos\varphi_0 = \frac{\alpha_1}{z}$, $\sin\varphi_0 = \frac{\alpha_2}{z}$.

Подставим (15) в определение S -матричного элемента (11). В результате получим:

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \frac{\delta(k' + q' - q - nk)}{(2\pi)^4 \sqrt{8\omega' q_0 q'_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{fi}^{(n)}.$$

Амплитуды $M_{fi}^{(n)}$ в этом выражении имеют вид:

$$M_{fi}^{(n)} = -iQ(\Sigma_0 B_n + \Sigma_1 B_{1n} + \Sigma_2 B_{2n})$$

и поскольку $q^2 = q'^2 = m_*^2$, то равенство $nk + q = q' + k'$ возможно, если $n \geq 1$.

2. Определение вероятности излучения в поле плоской электромагнитной волны. Дифференциальная вероятность n -гармоники выражается через амплитуду $M_{fi}^{(n)}$ следующим образом [4]:

$$dW_n = \sum_{\lambda'} |M_{fi}^{(n)}|^2 \frac{d^3 k' a^3 q'}{(2\pi)^6 8 \omega' q_0 q_0'} (2\pi)^4 \delta(nk + q - q' - k'). \quad (16)$$

Для неполяризованного излучаемого фотона суммирование по λ' можно осуществить путем замены

$$e_\mu^{(\lambda')} e_\nu^{(\lambda')} \rightarrow -g^{\mu\nu},$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор.

Выполняя суммирование в (16) по λ' квадрата амплитуды $M_{fi}^{(n)}$ и используя свойства функций Бесселя

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z),$$

получим:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda'} |M_{fi}^{(n)}|^2 &= J_n^2(z)(4m^2 + 2n(k'k)) + 2Q^2 a^2 (J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z) - 2J_n^2(z) + \\ &+ 2n \frac{J_n^2(z)}{z^2} (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)(qk + q'k) - \\ &- 4nQ \frac{J_n^2(z)}{z^2} (\alpha_1(qa_1 + q'a_1) + \alpha_2(qa_2 + q'a_2)). \end{aligned} \quad (17)$$

Величины $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 в (17) вычислим в системе отсчета, в которой векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{k}$ направлены по осям x^1, x^2, x^3 соответственно [3]. В результате получим:

$$\alpha_1 = -Q \frac{(\vec{k}' \vec{a}_1)}{(q'k)}, \quad \alpha_2 = -Q \frac{(\vec{k}' \vec{a}_2)}{(q'k)}.$$

Величины β_1 и β_2 отличаются от α_1 и α_2 знаками, то есть:

$$\beta_1 = -\alpha_1, \quad \beta_2 = -\alpha_2.$$

Окончательное вычисление (17) с учетом $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 можно представить следующим образом:

$$\sum_{\lambda'} |M_{fi}^{(n)}|^2 = Q^2 (4m^2 J_n^2(z) + 2m^2 \xi^2 (J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z) - 2J_n^2(z))), \quad (18)$$

где $Q^2 a^2 = -m^2 \xi^2$.

Для определения вероятности излучения введем переменную $U = \frac{(kk')}{(kq')}$ и выполним интегрирование с учетом (18). В результате получим:

$$W = \sum_n W_n = \frac{Q^2 m^2}{8\pi q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{U_n} \frac{dU}{(1+U)^2} \cdot (-2J_n^2(z) + \xi^2 (J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z) - 2J_n^2(z))), \quad (19)$$

где $\frac{2n(kq)}{m_*^2} = U_n$.

Функции Бесселя зависят от переменной z , которая выражается через $U = \frac{(kk')}{(kq')}$ соотношением:

$$z = \frac{2nm^2\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{U}{U_n} \left(1 - \frac{U}{U_n}\right)}.$$

В случае, когда $\xi \ll 1$ при вычислении W_n можно ограничиться вторым порядком по ξ . В этом приближении согласно (19) W_1 представляется так:

$$W_1 = \frac{Q^2 m^2}{8\pi p_0} \xi^2 \int_0^{U_1} \frac{dU}{(1+U)^2} \left(1 - 2\frac{U}{U_1} + 2\frac{U^2}{U_1^2}\right). \quad (20)$$

Соотношение (20) согласуется с полным сечением комптоновского рассеяния на пионе. В самом деле, выполняя интегрирование в (20) и учитывая, следуя работе [3], что $\xi^2 = \frac{Q^2}{m^2} \frac{1}{\omega}$, получим:

$$W_1 = \frac{Q^4}{8\pi p_0 \omega} \frac{1}{x} \left(4 + \frac{x^2}{1+x} - 2\left(1 + \frac{2}{x}\right) \ln(1+x)\right), \quad (21)$$

где

$$x = \frac{s - m^2}{m^2}, \quad s = (k + p)^2.$$

Если W_1 , определяемое (21), разделить на плотность тока, то полное сечение определяется так:

$$\sigma = \frac{W_1}{j} = \frac{Q^4}{4\pi m^2} \frac{1}{x^2} \left(4 + \frac{x^2}{1+x} - 2\left(1 + \frac{2}{x}\right) \ln(1+x)\right). \quad (22)$$

3 Сечение комптоновского рассеяния на пионе в борновском приближении.

Борновская амплитуда комптоновского рассеяния на пионе имеет вид [12]:

$$M_{fi} = e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')*} T^{\mu\nu}, \quad (23)$$

где $e_\mu^{(\lambda)}$ и $e_\nu^{(\lambda')}$ – вектора поляризации начального и конечного фотона соответственно.

Тензор $T^{\mu\nu}$ в (23) в борновском приближении равен:

$$T^{\mu\nu} = 2Q^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{2p_1^\mu p_2^\nu}{s - m^2} - \frac{2p_1^\nu p_2^\mu}{u - m^2} \right).$$

В этом выражении $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор, p_1 и p_2 – четырехмерные импульсы начального и конечного пионов, а кинематические переменные s и u определяются через импульсы $s = (k + p_1)^2$ и $u = (p_1 - k')^2$.

Дифференциальное сечение, вычисленное на основе (23), выражается через инвариантные кинематические переменные [12]:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{4Q^4}{16\pi} \frac{(m^4 - su) + m^4 t^2}{(s - m^2)^2 (u - m^2)^2}, \quad (24)$$

где $t = (k_1 - k_2)^2$.

Выражение для $\frac{d\sigma}{dt}$ выражения (24) можно представить так:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q^4}{4\pi(s-m^2)^2} \left(1 + 2\left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2}\right) + 2\left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2}\right)^2\right). \quad (25)$$

При получении (25) учтено, что $s + t + u = 2m^2$ для комптоновского рассеяния на пионе.

Если использовать переменные $x = \frac{s-m^2}{m^2}$, $y = \frac{m^2-u}{m^2}$ дифференциальное сечение (25) принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q^4}{4\pi m^4 x^2} \left(1 + 2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) + 2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 \right). \quad (26)$$

где $dt = m^2 dy$.

Интегрируя (26) по y при фиксированном x , получим выражение для полного сечения комптоновского рассеяния на пионе:

$$\sigma = \frac{Q^4}{4\pi m^4 x^2} \left(4 + \frac{x^2}{1+x} - 2 \left(1 + \frac{2}{x} \right) \ln(1+x) \right). \quad (27)$$

Таким образом, установлено, что полное сечение, рассчитанное с использованием W_1 , определенного выражением (22), совпадает с полным сечением комптоновского рассеяния на пионе, вычисленное в борновском приближении (27).

Ограничиваясь в разложении (27) первым порядком по x , получим хорошо известное соотношение для полного сечения:

$$\sigma = \frac{Q^4}{(4\pi)^2 m^2} \frac{8\pi}{3} (1-x). \quad (28)$$

В системе покоя мишени (28) принимает вид:

$$\sigma = \frac{Q^4}{(4\pi)^2 m^2} \frac{8\pi}{3} \left(1 - 2 \frac{\omega}{m} \right).$$

Список использованных источников

1 Волков, Д. М. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака / Д. М. Волков // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7. – С. 1286–1289.

2 Ритус, В. И. Квантовые эффекты при взаимодействии элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем / В. И. Ритус // Труды ФИАН. – 1968. – Т. 111. – Москва : Наука, 1979. – С. 5–151.

3 Берестецкий, В. Б. Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. – Москва : Наука, 1980. – 704 с.

4 Люлька, В. А. Распады элементарных частиц в поле интенсивной электромагнитной волны / В. А. Люлька // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 69. – 800 с.

5 Петрунькин, В. А. Двухфотонные взаимодействия элементарных частиц при малых энергиях / В. А. Петрунькин // Труды ФИАН. – 1968. – Т. 41. – С. 165–223.

6 Максименко, Н. В. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов / Н. В. Максименко, С. Г. Шульга // Ядерная физика. – 1990. – Т. 52. – Вып. 2 (8). – С. 524–534.

7 Максименко, Н. В. Феноменологическое описание поляризуемостей элементарных частиц в полевой теории / Н. В. Максименко, Л. Г. Мороз // Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике / ОИЯИ. – Дубна, 1979. – С. 533–543.

8 Андреев, В. В. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевом подходе / В. В. Андреев, Н. В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №4 (9). – С. 7–11.

9 Vakulina, E. V. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin–Kemmer–Petiau Formalism / E. V. Vakulina, N. V. Maksimenko // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2017. – Vol. 14, №. 5. – P. 713–718.

10 Andreev, V. V. Covariant equations of motion of a spin 1/2 particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities / V. V. Andreev, O. M. Deryuzhkova, N. V. Maksimenko // Russ. Phys. Journ. – 2014. – Vol. 56, №. 9. – P. 1069–1075.

11 Вакулина, Е. В. Точные решения волновых уравнений для частиц с дипольными поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны / Е. В. Вакулина, Н. В. Максименко // Журнал Белорусского государственного университета. Физика. – 2019. – № 1. – С. 12–18. – ISSN печатного издания: 2520-2243.

12 Holstein, B. R. Graviton Physics Holstein // American Journal of Physics. – 2006. – Vol. 74. – P. 1002–1011.

В. Ю. Гавриш¹, В. В. Андреев²

¹г. Гомель, ГГТУ имени П. О. Сухого

²г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМ-ФАКТОР ρ – МЕЗОНА В ТОЧЕЧНОЙ ФОРМЕ ДИНАМИКИ

Введение. Прецизионность современных экспериментальных данных по распадам псевдоскалярных и векторных мезонов [1] дает возможность проводить исследования связанных кварк-антикварковых систем с учетом их внутренней структуры в различных подходах и моделях. Особый интерес представляют мезоны легкого сектора, состоящие из u – и d – кварков. Такие системы релятивистские, что требует построения соответствующих подходов и моделей.

Среди многообразия подходов по описанию характеристик связанных систем [2] выделим подходы, основанные на группе Пуанкаре. Известно [3, 4], что такие модели являются чисто релятивистскими, что делает их применение для описания наблюдаемых характеристик мезонов легкого сектора наиболее естественным подходом.

Из трех форм пуанкаре-инвариантной квантовой механики (далее ПикМ) для расчетов характеристик легких мезонов в настоящее время наиболее используемой является динамика на световом фронте. Однако указанная форма ПикМ не лишена недостатков, таких как наличие взаимодействия в операторе углового момента [5] и др. Указанное осложнение приводит к тому, что на матричные элементы перехода $I^\mu(\lambda', \lambda)$ векторных мезонов связаны угловым соотношением.

Мгновенная форма динамики также используется для расчета различных характеристик связанных систем. Так, к примеру, расчеты форм-факторов ρ – мезона в работе [6] выполнены с учетом аномальных магнитных моментов кварков κ_u и κ_d .

Возобновление интереса к исследованию форм-факторов векторных частиц связано с обновлением экспериментальных данных. Так в работе [7] на основе экспериментальных данных коллаборации BaBar в энергетическом диапазоне (0,9; 2,2) ГэВ было проведено определение магнитного момента ρ – мезона. Эти и другие экспериментальные исследования возобновили интерес к изучению легких связанных кварк-антикварковых систем.

В работе проведем изучение форм-фактора векторного ρ – мезона в точечной форме ПикМ. Из особенностей проводимых вычислений отметим использование параметров моделей, полученных из лептонных распадов псевдоскалярных и векторных мезонов с учетом токовых масс кварков [8, 9].

1. Параметризация матричного элемента в точечной форме ПикМ. Параметризация матричного элемента векторного ρ – мезона в точечной форме ПикМ определяется выражением [10, 11]

$$I^\mu(\lambda', \lambda) = \langle \vec{Q}', M', \lambda' | J^\mu | \vec{Q}, M, \lambda \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2V_0 M_0}} \frac{1}{\sqrt{2V'_0 M'_0}} \times \quad (1.1)$$
$$\times (F_1(q^2) (\varepsilon^*(\lambda') \cdot \varepsilon(\lambda)) P^\mu + F_2(q^2) ((\varepsilon^*(\lambda') \cdot P) \varepsilon^\mu(\lambda) + (\varepsilon(\lambda) \cdot P) \varepsilon^{*\mu}(\lambda')) +$$
$$+ F_3(q^2) \frac{(\varepsilon^*(\lambda') \cdot P)(\varepsilon(\lambda) \cdot P)}{2M'_0 M_0} P^\mu, \quad P = Q + Q', \quad q = Q - Q'.$$

В выражении (1.1) форм-факторы F_1 , F_2 и F_3 при $q^2 \rightarrow 0$ определяются как заряд, магнитный момент и квадрупольный магнитный момент векторного ρ – мезона:

$$F_1(0) = e, \quad F_2(0) = -\mu_\rho, \quad F_3(0) = Q_\rho. \quad (1.2)$$

В обобщенной системе Брейта ($\vec{V}_Q + \vec{V}'_Q = 0$) с использованием $(V_Q \cdot V'_Q) = \varpi$ и 4-векторов

$$\ell_{F_1} = \frac{M_0 + M'_0}{2\sqrt{M_0 M'_0}} \left\{ -1, 0, 0, \frac{M'_0 \sqrt{-1 + \varpi} - M}{M_0 + M'_0 \sqrt{1 + \varpi}} \right\}, \quad \ell_{F_2}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M'_0(-1 + \varpi)}{M}} \{0, 1, \pm i, 0\} \quad (1.3)$$

правая часть выражения (1.1) может быть записана в виде матричных элементов, представленных в таблице 1.

Таблица 1 – Матричные элементы для различных спиральностей ρ – мезона

	$\lambda = 1$	$\lambda = 0$	$\lambda = -1$
$\lambda' = 1$	$F_1(q^2) \times I_{F_1}$	$F_2(q^2) \times I_{F_2}^{(+)}$	0
$\lambda' = 0$	$F_2(q^2) \times I_{F_2}^{(-)}$	линейная комбинация F_1, F_2 и F_3	$F_2(q^2) \times I_{F_2}^{(+)}$
$\lambda' = -1$	0	$F_2(q^2) \times I_{F_2}^{(-)}$	$F_1(q^2) \times I_{F_1}$

Процедура получения матричных элементов в точечной форме динамики с учетом структуры кварков подробно изложена в работах [9, 12, 13], поэтому здесь приведем лишь итоговое выражение:

$$I^\mu(\lambda', \lambda) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{V_0 V'_0}} \sum_{v_1, v'_1} \sum_{v_2, v'_2} \int d\vec{k} \Phi(|\vec{k}|, \beta_{q\bar{Q}}^V) \Phi(|\vec{k}_2|, \beta_{q\bar{Q}}^V) \times \quad (1.4)$$

$$\times C \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ v_1 & v_2 & \lambda \end{Bmatrix} C \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ v'_1 & v'_2 & \lambda' \end{Bmatrix} \times \left(\frac{e_q \bar{u}_{v'_1}(\vec{k}_2, m_q) B^{-1}(\vec{u}_{\bar{Q}})}{\sqrt{2 \omega_{m_q}(|\vec{k}_2|) \omega_{m_q}(|\vec{k}|)}} \Gamma_q^\mu B(\vec{u}_{\bar{Q}}) u_{v_1}(\vec{k}, m_q) \right. \\ \left. \times D_{v'_2, v_2}(\vec{n}_{w_2}(\vec{k}, \vec{u}_{\bar{Q}})) + e_Q \frac{\bar{v}_{v_2}(\vec{k}, m_Q) B^{-1}(\vec{u}_{\bar{Q}}) \Gamma_Q^\mu B(\vec{u}_{\bar{Q}}) v_{v'_2}(\vec{k}_1, m_Q)}{\sqrt{2 \omega_{m_Q}(|\vec{k}|) \omega_{m_Q}(|\vec{k}_1|)}} \right) \times \\ \times D_{v'_1, v_1}(\vec{n}_{w_1}(\vec{k}, \vec{u}_{\bar{Q}})), \quad \vec{k}_{1,2} = \vec{k} \pm \vec{v}_Q \left((\varpi + 1) \omega_{m_{q,Q}}(|\vec{k}|) - |\vec{k}| \sqrt{\varpi^2 - 1} \cos \theta_{\vec{k}} \right).$$

В выражении (1.4) вершина взаимодействия кварка с γ – квантом определяется выражением

$$\Gamma_{q,Q}^\mu = F_1^{quark}(q^2) \gamma^\mu + F_2^{quark}(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_{q,Q}} q_\nu^{quark}, \quad q^{quark} = k' - k, \quad (1.5)$$

где кварковые форм-факторы $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ определяют полный и аномальный магнитный момент кварка.

Для выполнения закона сохранения электромагнитного тока выражение (1.4) «расширим» путем введения множителя

$$I^\mu(\lambda', \lambda) \Rightarrow (-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) I_\nu(\lambda', \lambda), \quad (1.6)$$

при этом условие $(I(\lambda', \lambda) \cdot q) = 0$ выполняется автоматически. На основе предложенной методики и параметризации посредством выражения (1.1) проведем исследование поведения форм-фактора векторного мезона.

2. Исследование поведения форм-фактора $F_1(q^2)$. Из соотношений (1.1)–(1.6) с учетом того, что $(\ell_{F_1} \cdot \ell_{F_2}^{(\pm)}) = 0$, можно получить выражение для форм-фактора $F_1(q^2)$

$$(\ell_{F_1} \cdot I(\pm 1, \pm 1)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2V_0 M_0}} \frac{1}{\sqrt{2V'_0 M'_0}} F_1(q^2) (\ell_{F_1} \cdot \ell_{F_1}). \quad (2.1)$$

После вычисления спинорной части выражения (1.4), интегрированию по телесному углу с последующим предельным переходом $q^2 \rightarrow 0$ из (2.1) нетрудно показать, что

$$F_1(0) = \int d|\vec{k}| \left| \Phi(|\vec{k}|, \beta_{q\bar{Q}}^V) \right|^2 (e_q - e_Q), \quad (2.2)$$

что с учетом зарядов u – и d – кварков и нормировки волной функции [3, 4] приводит к $F_1(0) = 1$. Полученный результат подтверждается в динамике на световом фронте и мгновенной форме динамики [6, 10].

Исследование при различных q^2 проведем с учетом соотношения (2.1) и $\varpi = (V_Q \cdot V_Q)$, которое в случае равных масс конститuentных кварков $m_Q = m_q$ для обобщенной системы Брейта в точечной форме динамики определяется как

$$\varpi^2 = 1 - \frac{q^2}{4(m_q^2 + k^2(1 - \cos^2 \theta_k))}. \quad (2.3)$$

Задавая кварковый форм-фактор $F_1^{quark}(q^2)$ (выражение $F_2^{quark}(q^2)$ для спиральностей ρ –мезона $\lambda', \lambda = \pm 1, \pm 1$ не дает вклада) выражением [13]

$$F_1^{quark}(q^2) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6} a \frac{q^2}{m_q^2}} \quad (2.4)$$

с параметром $a = 0,3$ и базовыми параметрами модели, полученными в работах [8, 9, 12, 13] из лептонных распадов псевдоскалярных и векторных мезонов получаем поведение форм-фактора векторного ρ –мезона (рисунок 1).

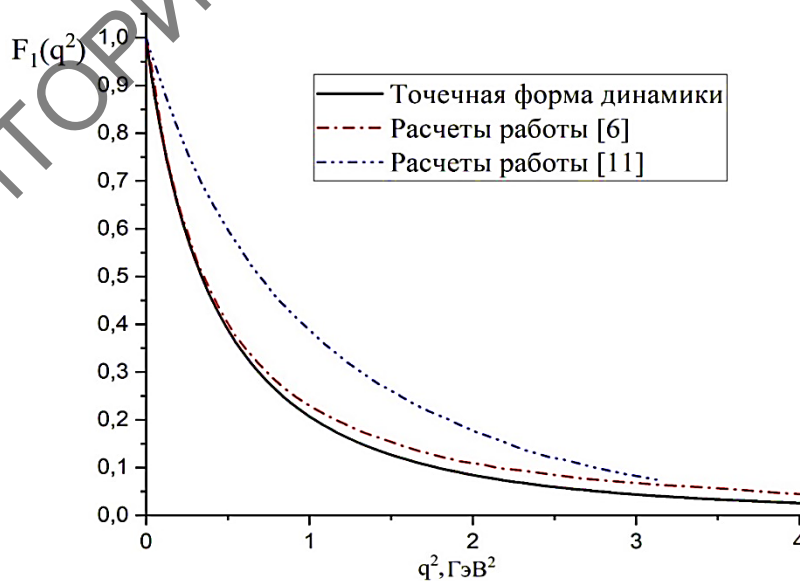


Рисунок 1 – Поведение форм-фактора $F_1(q^2)$ векторного ρ –мезона в различных подходах и моделях

Заключение. Работа посвящена исследованию форм-фактора векторного ρ -мезона в точечной форме ПиКМ. В ходе работы была продемонстрирована процедура получения параметризации с последующим расчетом поведения форм-фактора $F_1(q^2)$ с параметрами модели, полученными из распадов псевдоскалярных и векторных мезонов. Анализ рисунка 1 показывает, что предложенная модель предсказывает удовлетворительное поведение форм-фактора по сравнению с моделями, основанными на динамике светового фронта и мгновенной форме динамики.

Список использованных источников

- 1 Zyla, P. A. Review of Particle Physics / P. A. Zyla, R. M. Beringer [Particle Data Group] // Progress of Theoretical and Experimental Physics. – 2020. – Vol. 2020. – P. 2050–3911.
- 2 Greiner, W. Quantum chromodynamics / W. Greiner, S. Schramm, E. Stein // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2007. – 554 p.
- 3 Keister, B. D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B. D. Keister, W. N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
- 4 Mini review of Poincare invariant quantum theory / W. N. Polyzou, Y. Huang, Ch. Elster [et. all] // Few Body Syst. – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.
- 5 Zhang, W. M. Light front dynamics and light front QCD / W. M. Zhang // Chinese J. Phys. – 1994. – Vol. 32. – P. 717.
- 6 Krutov, A. F. Magnetic moment of the ρ -meson in instant-form relativistic quantum / A. F. Krutov, R. G. Polezhaev, V. E. Troitsky // Phys. Rev. D. – 2018. – Vol. 3. – P. 033007.
- 7 Gudino, D. Garcia. Determination of the magnetic dipole moment of the rho meson using 4 pion electroproduction data / D. Garcia Gudino, G. Toledo Sanchez // Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. – 2013. – Vol. 35. – P. 1460463.
- 8 Haurysh, V. Yu. Electroweak decays of unflavored mesons in Poincare covariant quark model / V. Yu. Haurysh, V. V. Andreev // Turkish journal of physics. – 2019. – Vol. 43. – P. 167–177.
- 9 Haurysh, V. Yu. Constituent quark masses in Poincare-invariant quantum mechanics / V. Yu. Haurysh, V. V. Andreev // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 938. – P. 012030.
- 10 Jaus, W. Consistent treatment of spin 1 mesons in the light front quark model / W. Jaus // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – P. 094010.
- 11 Choi, H.-M. Electromagnetic structure of the rho meson in the light front quark model / H.-M. Choi, Ch.-R. Ji // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 70. – P. 053015.
- 12 Гавриш, В. Ю. Методика вычисления электрослабых характеристик мезонов в пуанкаре-инвариантной квантовой механике / В. Ю. Гавриш, В. В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 7–19.
- 13 Гавриш, В. Ю. Электромагнитный форм-фактор векторных мезонов в релятивистской кварковой модели / В. Ю. Гавриш, В. В. Андреев // Журнал Белорусского Государственного Университета. Физика. – 2019. – № 1. – С. 63–71.

Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОДНОМЕРНЫМ ОСЦИЛЛЯТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Введение. Одной из ключевых проблем, возникающих при исследовании квантовых составных систем на основании квазипотенциального подхода [1, с. 380, 2, с. 125],

является поиск решений уравнений, описывающих такие системы. В данной работе рассмотрен метод приближённого аналитического решения уравнения Логунова-Тавхелидзе с одномерным аналогом потенциала гармонического осциллятора:

$$V(\rho) = \omega^2 \rho^2, \quad -\infty < \rho < \infty, \quad (1)$$

где ω – константа связи, ρ – координата в одномерном релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [3, с. 656].

1. Одномерное уравнение Логунова-Тавхелидзе. В импульсном представлении одномерное уравнение Логунова-Тавхелидзе для связанных состояний системы двух скалярных частиц имеет следующий вид [4, с. 183]:

$$\psi(2E_q, p) = \frac{-m}{2\pi} G(E_q, p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{m^2 + k^2}} V(p, k) \psi(2E_q, k), \quad -\infty < p < \infty, \quad (2)$$

где величина $2E_q$ – энергия системы, p – относительный импульс, m – масса каждой частицы, $\psi(2E_q, p)$ – волновая функция, $V(p, k)$ – потенциал, $G(E_q, p)$ – функция Грина, имеющая форму

$$G(E_q, p) = (E_p^2 - E_q^2 - i0)^{-1}, \quad E_p = \sqrt{m^2 + p^2}. \quad (3)$$

В РКП уравнение (2) принимает следующий вид [5, с. 5331]:

$$\psi(\chi_q, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' G(\chi_q, \rho - \rho') V(\rho') \psi(\chi_q, \rho'), \quad -\infty < \rho < \infty, \quad (4)$$

где величина $\chi_q > 0$ связана с энергией $2E_q$ двухчастичной системы как

$$2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q, \quad (5)$$

$G(\chi_q, \rho - \rho')$ – функция Грина, $V(\rho)$ – потенциал. Входящие в уравнение (4) величины связаны с соответствующими величинами в импульсном представлении посредством интегрального преобразования [3, с. 660], которое в одномерном случае аналогично преобразованию Фурье [5, с. 5331]. Так, преобразование для потенциала имеет следующую форму:

$$V(p, k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \exp[-i(\chi - \chi')m\rho] V(\rho), \quad (6)$$

где χ (χ') – быстрота, связанная с импульсом p (k) по формуле $p = m \operatorname{sh} \chi$ ($k = m \operatorname{sh} \chi'$).

2. Задача Штурма-Лиувилля в импульсном представлении. Подстановка (1) в формулу (6) и последующее вычисление интеграла приводит к следующему выражению:

$$V(p, k) = -\frac{2\pi\omega^2}{m^3} \frac{d^2}{d\chi^2} \delta(\chi - \chi'). \quad (7)$$

Подстановка потенциала (7) в уравнение (2) и интегрирование с учётом свойств дельта-функции приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\omega^2}{m^2} \frac{d^2}{d\chi^2} \psi(\chi_q, \chi) = m^2 [\operatorname{ch}^2 \chi - \operatorname{ch}^2 \chi_q] \psi(\chi_q, \chi), \quad (8)$$

где выполнено переобозначение $\psi(2E_q, p) \Rightarrow \psi(\chi_q, \chi)$. Дополнив уравнение (8) граничными условиями

$$\psi(\chi_q, \chi) \Big|_{\chi \rightarrow \pm\infty} \cong 0, \quad (9)$$

получим задачу Штурма-Лиувилля (ЗШЛ). Условия (9) могут быть получены из интегрального уравнения (2).

3. Приближённое аналитическое решение ЗШЛ. Рассмотрим приближённое аналитическое решение ЗШЛ (8), (9). Разделим бесконечную область определения волновой функции на две подобласти: I) $\chi < 0$ и II) $\chi > 0$. Решение уравнения (8) будем искать отдельно в каждой из этих подобластей. Дополним функцию $\psi(\chi_q, \chi)$ в каждой из них соответствующим индексом I и II. При этом на решения в каждой из подобластей I и II будет налагаться лишь по одному из граничных условий (9). Таким образом, для решения обсуждаемой ЗШЛ нужны дополнительные условия. Введём условия сшивания для волновых функций и их первых производных на границе $\chi = 0$:

$$\psi_I(\chi_q, 0) = \psi_{II}(\chi_q, 0); \quad \psi'_I(\chi_q, 0) = \psi'_{II}(\chi_q, 0). \quad (10)$$

В подобласти I осуществим замену переменной $z = \omega^{-1}m^2 \exp(-\chi)/2$. Представим уравнение (8) и соответствующее граничное условие (9) в виде

$$\left[\left(z \frac{d}{dz} \right)^2 - z^2 + \frac{m^4}{2\omega^2} \operatorname{ch} 2\chi_q \right] \psi_I(\chi_q, z) = \frac{m^8}{16\omega^4} \frac{1}{z^2} \psi_I(\chi_q, z), \quad z \geq \omega^{-1}m^2/2, \quad (11)$$

$$\psi_I(\chi_q, z) \Big|_{z \rightarrow \infty} \cong 0. \quad (12)$$

Замена переменной $z = \omega^{-1}m^2 \exp(\chi)/2$ в подобласти II, приводит к аналогичному уравнению и граничному условию для волновой функции $\psi_{II}(\chi_q, z)$. Пренебрежём в обоих полученных уравнениях правой частью. Такое приближение оправдано, например, при больших значениях величины ω . Полученным в результате приближения уравнениям удовлетворяют модифицированные функции Бесселя [6, с. 13]. С учётом граничных условий решения представим в форме

$$\psi_I(\chi_q, z) = C_I K_{i_V}(z); \quad \psi_{II}(\chi_q, z) = C_{II} K_{i_V}(z), \quad (13)$$

где $K_{i_V}(z)$ – функция Макдональда [6, с. 13], C_I и C_{II} – неизвестные константы, величина V связана с величиной χ_q по формуле

$$V = m^2 / \omega \sqrt{1/2 \operatorname{ch} 2\chi_q}. \quad (14)$$

Подстановка функции (13) в условия сшивания (10) приводит к линейной системе однородных уравнений относительно величин C_I и C_{II}

$$\begin{pmatrix} K_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) & -K_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) \\ K'_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) & K'_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_I \\ C_{II} \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Условием существования ненулевого решения однородной системы является равенство нулю определителя её матрицы. Приравняв определитель матрицы системы (15) к нулю, мы получаем два трансцендентных уравнения для величины V

$$K_{i_{V+1}}(\omega^{-1}m^2/2) + K_{i_{V-1}}(\omega^{-1}m^2/2) = 0; \quad K_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) = 0. \quad (16)$$

Равенства (16) являются условиями квантования энергии. Численное решение уравнений (16) показывает, что их корни являются вещественными и они чередуются. При этом, наименьшее значение принимает корень первого уравнения. Обозначим корни первого из уравнений (16) как $v_q^{(2s)}$, а корни второго – $v_q^{(2s+1)}$, где $s = 0, 1, 2, \dots$ – номер состояния релятивистского гармонического осциллятора. Аналогичный верхний индекс введём для величин χ_q . Для определения приближённых значений энергии найденные $\chi_q^{(n)}$ должны быть затем подставлены в формулу (5).

С учётом введенных обозначений, приближённые волновые функции могут быть записаны в виде

$$\psi(\chi_q^{(2s)}, \chi) = C_I^{(2s)} K_{i\nu_{2s}} \left(\omega^{-1} m^2 \exp(|\chi|)/2 \right), \quad (17)$$

$$\psi(\chi_q^{(2s+1)}, \chi) = -\text{sgn}(\chi) C_I^{(2s+1)} K_{i\nu_{2s+1}} \left(\omega^{-1} m^2 \exp(|\chi|)/2 \right),$$

где $\text{sgn}(\chi)$ – функция знака, величины ν_n связаны с корнями $\chi_q^{(n)}$ согласно формуле (14). Константы $C_I^{(n)}$ могут быть найдены из условия нормировки волновых функций.

4. Численные результаты. Обсудим теперь результаты численных расчётов по найденным формулам. В таблице 1 приведены значения энергии. Они были получены двумя способами: численно – методом стрельбы [7, с. 320] и рассмотренным в этой работе методом при $m = 1$, для разных значений константы связи ω .

Таблица 1 – Значения энергии релятивистского гармонического осциллятора

Номер состояния	Численное решение	Приближённое решение
$\omega=1$		
0	2,9741627287	2,8942841821
1	4,4575152620	4,4340640700
2	5,7706817286	5,7495433152
3	6,9820603827	6,9688640519
4	8,1237806279	8,1116158608
$\omega=5$		
0	6,3274523548	6,3023457130
1	11,5099200672	11,5059921196
2	16,1610588266	16,1553709125
3	20,4845030635	20,4818426838
4	24,5863745919	24,5833876084
$\omega=10$		
0	9,9250292628	9,9113808547
1	18,7458717683	18,7441886720
2	26,8141909273	26,8110403639
3	34,3783383262	34,3770590345
4	41,5915699664	41,5899589097

Сравнение величин энергии, найденных численным решением ЗШЛ с соответствующими величинами, найденными приближённо аналитически, показывает, что с увеличением константы связи ω точность возрастает. Таким образом, приближённый метод более эффективен для решения при больших значениях ω .

На рисунке 1 приведены волновые функции первых четырёх состояний, построенные по формулам (17) при $m = 1$, $\omega = 5$. Номер графика равен номеру квантового состояния гармонического осциллятора.

Как видно на рисунке, особенностью волновых функций одномерного релятивистского гармонического осциллятора в импульсном представлении является равенство количества нулей номеру состояния. Аналогичным свойством обладают волновые функции в импульсном представлении трёхмерного релятивистского гармонического осциллятора [8, с. 1650], а также волновые функции в случае других типов взаимодействий, например, потенциалов однобозонного обмена [9, с. 438].

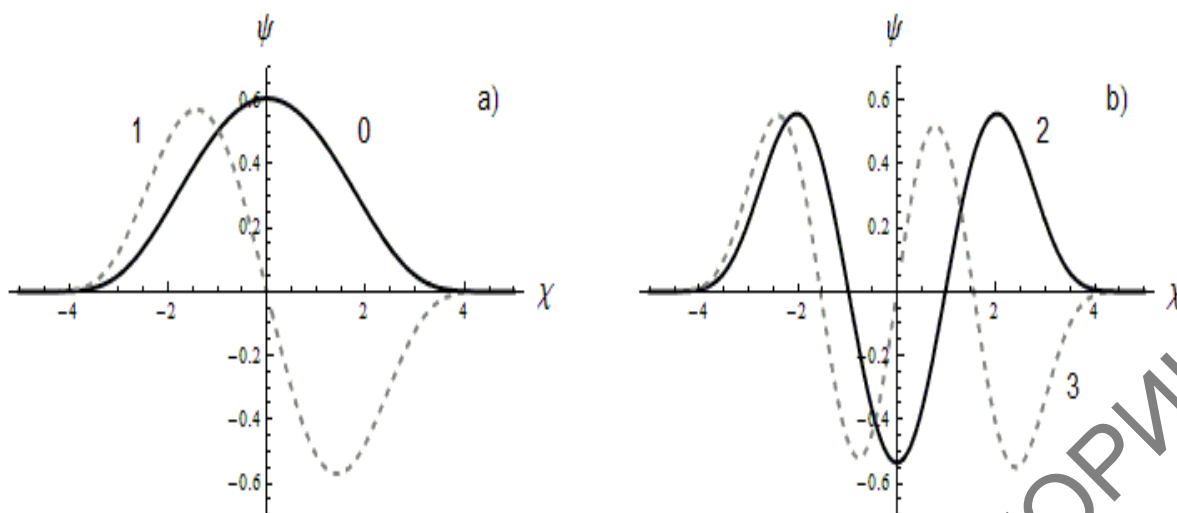


Рисунок 1 – Волновые функции:
 а) нулевого и первого состояний; б) второго и третьего состояний

Заключение. В работе получены решения уравнения Логунова-Тавхелидзе для одномерного гармонического осциллятора в релятивистском конфигурационном представлении. Интегральное уравнение в импульсном представлении было сведено к задаче Штурма-Лиувилля, решение которой было получено приближённо аналитически и численно. Приближённые волновые функции были выражены через функцию Макдональда мнимого индекса. При этом были получены трансцендентные уравнения для определения значений энергии релятивистского осциллятора.

Список использованных источников

- 1 Logunov, A. A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze // *Nuovo Cimento*. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
- 2 Kadyshevsky, V. G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V. G. Kadyshevsky // *Nucl. Phys.* – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.
- 3 Кадышевский, В. Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // *ЭЧАЯ*. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
- 4 Faustov, R. N. Relativistic wavefunction and form-factors of the bound system / R. N. Faustov // *Annals of physics*. – 1973. – Vol. 78, № 1. – P. 176–189.
- 5 Kapshai, V. N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ -potentials / V. N. Kapshai, T. A. Alferova // *J. Phys. A*. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.
- 6 Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1974. – Т. 2. – 296 с.
- 7 Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
- 8 Grishechkin, Yu. A. Solution of the Logunov-Tavkhelidze equation for the three-dimensional oscillator potential in the relativistic configuration representation / Yu. A. Grishechkin, V. N. Kapshai // *Russian Physics Journal*. – 2018. – Vol. 61, № 9. – P. 1645–1652.
- 9 Grishechkin, Yu. A. Numerical solution of relativistic problems on bound states of systems of two spinless particles / Yu. A. Grishechkin, V. N. Kapshai // *Russian Physics Journal*. – 2013. – Vol. 56, № 4. – P. 435–443.

Е. А. Дей

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Развитие нанотехнологий связано с теоретическим и численным решением непрерывно расширяющегося множества задач квантовой механики. При этом естественным образом повышаются требования к точности получаемых результатов.

Для численного решения уравнения Шредингера [1] метод конечных разностей [2, 3] является одним из самых удобных с точки зрения программной реализации и быстродействия. Однако при использовании стандартной аппроксимации второй производной волновой функции с использованием конечно-разностной производной второго порядка метод не обеспечивает приемлемой точности результатов вычислений.

Известен ряд подходов, позволяющих повысить точность результатов при использовании метода конечных разностей. Одним из самых эффективных является использование конечно-разностных производных высших порядков [2]. Обобщение конечно-разностных соотношений для этого случая было реализовано в работе [4]. В ней исследована вычислительная эффективность метода конечных разностей высших порядков точности при решении одномерного уравнения Шредингера с потенциалом гармонического осциллятора и радиального уравнения Шредингера с потенциалом Вудса-Саксона. Показано, что практический порядок сходимости результатов соответствует теоретическим оценкам. Высокая эффективность метода конечных разностей, основанного на высших порядках аппроксимации производной, для численного решения задач квантовой механики была также выявлена при решении двумерного [5] и трехмерного [6] стационарного уравнения Шредингера с модельными потенциалами.

Еще один способ повышения точности результатов при решении стационарного уравнения Шредингера основан на процедуре уточнения численной производной методом Нумерова [7]. Обобщение конечно-разностных соотношений на случай совместного применения высших порядков аппроксимации производной и метода Нумерова (разработка обобщенного метода Нумерова) выполнено в работе [8]. Показана высокая эффективность метода при решении ряда тестовых задач.

Метод Эйткена (метод экстраполяции на последовательности сеток) [2, 3] представляет собой качественно иной способ уточнения численных результатов. Он основан на повторении численных расчетов при изменении шага дискретизации области, что позволяет выявить практическую зависимость погрешности от величины шага и учесть ее в окончательном результате.

В данной работе продолжено исследование возможностей повышения точности результатов метода конечных разностей при решении одномерного стационарного уравнения Шредингера. Реализовано и проанализировано совместное применение высших порядков аппроксимации второй производной в уравнении Шредингера и уточнения результатов на последовательности сеток.

Для численного решения задачи нахождение собственных значений стационарного одномерного уравнения Шредингера [1]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

будем рассматривать ограниченную область изменения аргумента $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, в которой введем равномерную сетку $x_0 \dots x_N$ с шагом $h = (x_{\max} - x_{\min})/N$, так что $x_i = x_{\min} + i \cdot h$, $\psi(x_i) \equiv \psi_i$. Вторую производную волновой функции аппроксимируем центральными конечно-разностными соотношениями вида

$$\psi''(x_i) \approx \frac{1}{h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i+k}, \quad (2)$$

где $C_{-p/2}, C_{-p/2+1}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_{p/2-1}, C_{p/2}$ – неопределенные коэффициенты. Вследствие симметрии центральных конечно-разностных выражений справедливы равенства $C_{-p/2} = C_{p/2}, \dots, C_{-1} = C_1$. Значения коэффициентов для центральных конечно-разностных аппроксимаций второй производной приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Коэффициенты конечно-разностных аппроксимаций второй производной в центральной точке шаблона

P	C0	C-1 = C1	C-2 = C2	C-3 = C3	C-4 = C4	C-5 = C5	C-6 = C6
2	-2	1					
4	-5/2	4/3	-1/12				
6	-49/18	3/2	-3/20	1/90			
8	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560		
10	-5269/1800	5/3	-5/21	5/126	-5/1008	1/3150	
12	-5369/1800	12/7	-15/56	10/189	-1/112	2/1925	1/16632

В результате получается конечно-разностная аппроксимация второй производной от волновой функции в i -м узле сетки с точностью $O(h^p)$

$$\left. \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right|_i = \frac{1}{h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i+k} - \frac{h^p}{(p+2)!} \left(\sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^{p+2} \right) \psi_i^{(p+2)}. \quad (3)$$

Заменяя вторую производную в уравнении Шредингера на конечно-разностное выражение (7), получаем систему уравнений относительно значений волновой функции в узлах сетки. В системе единиц $\hbar = m = 1$ система имеет вид

$$-\frac{1}{2h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i+k} + V(x_i) \psi_i = E \psi_i, \quad i = 1..N - 1. \quad (4)$$

Следует отметить, что повышение точности метода конечных разностей достигается минимумом средств: в каждой строке матричной задачи на собственные значения добавляется два элемента. В результате при $P=2$ матрица является трехдиагональной, при $P=4$ – пятидиагональной и так далее. После заполнения матрицы все дальнейшие вычислительные операции не зависят от P , то есть, никаких изменений в расчетной схеме не требуется.

Так как за пределами области волновую функцию для связанных состояний можно при численном расчете приближенно считать равной 0, в данном случае использование многоточечной аппроксимации второй производной не вызывает проблем. При использовании ее в точках вблизи границы те коэффициенты, которые соответствуют узлам вне области, не дают вклада в систему уравнений.

По результатам трех последовательных расчетов с удвоением шага ($h, 2h, 4h$) можно определить практический порядок сходимости численного метода \tilde{P} . Предполагая, что при достаточно большом количестве N погрешность в вычислении собственного значения пропорциональна h^P , получаем [8]

$$\tilde{P} = \log_2 \left(\frac{E^{(4h)} - E^{(2h)}}{E^{(2h)} - E^{(h)}} \right). \quad (5)$$

Применяя эту формулу для оценки энергетических уровней гармонического осциллятора, получаем значения практического порядка сходимости \tilde{P} для различных значений порядка аппроксимации P второй производной в уравнении Шредингера

Результаты трех последовательных расчетов с уменьшением шага сетки можно использовать для получения нового, более точного результата. Формула Эйткена в этом случае имеет следующий вид [5]

$$E_{\text{утчн}} = E^{(h)} + \frac{(E^{(h)} - E^{(2h)})^2}{2E^{(2h)} - E^{(h)} - E^{(4h)}}. \quad (6)$$

Программная реализация метода конечных разностей с уточнением методом Эйткена для $P=2..12$ выполнена в системе Matlab. В качестве тестовой задачи рассмотрено численное решение одномерного уравнения Шредингера с потенциалом гармонического осциллятора. В системе единиц $\hbar = 1$, $m=0.5$ потенциал имеет вид $V(x, y) = x^2/2$, а точные собственные значения энергии $E_n = n + 1/2$, $n = 0, 1, \dots$

Значения погрешности численного решения для первых 100 уровней приведены в Таблице 2 и Таблице 3 при выполнении расчетов с $x_{min} = -20$, $x_{max} = 20$, $h = 0,04$.

Таблица 2 – Погрешность расчета уровней энергии одномерного гармонического осциллятора методом конечных разностей порядков $P=2, 4, 6$ с учетом уточнения по методу Эйткена

n	P=2		P=4		P=6	
	$\Delta E^{(h)}$	$\Delta E_{\text{утчн}}$	$\Delta E^{(h)}$	$\Delta E_{\text{утчн}}$	$\Delta E^{(h)}$	$\Delta E_{\text{утчн}}$
0	5.0e-005	8.0e-008	2.7e-008	1.3e-010	2.4e-011	2.6e-013
20	4.2e-002	1.5e-003	3.1e-004	1.2e-005	2.8e-006	2.4e-007
40	1.6e-001	1.3e-002	2.3e-003	1.3e-004	4.2e-005	6.8e-006
60	3.7e-001	4.7e-002	7.8e-003	4.2e-004	2.1e-004	4.5e-005
80	6.5e-001	1.3e-001	1.8e-002	5.3e-004	6.5e-004	1.6e-004
100	1.0e+000	3.2e-001	3.5e-002	9.1e-004	1.6e-003	3.7e-004

Таблица 3 – Погрешность расчета уровней энергии одномерного гармонического осциллятора методом конечных разностей порядков $P=8, 10, 12$ с учетом уточнения по методу Эйткена

n	P=8		P=10		P=12	
	$\Delta E^{(h)}$	$\Delta E_{\text{утчн}}$	$\Delta E^{(h)}$	$\Delta E_{\text{утчн}}$	$\Delta E^{(h)}$	$\Delta E_{\text{утчн}}$
0	6.3e-015	2.5e-014	7.6e-014	7.6e-014	4.9e-014	5.0e-014
20	3.0e-008	3.9e-009	3.4e-010	6.3e-011	4.1e-012	1.1e-012
40	8.7e-007	2.3e-007	2.0e-008	7.5e-009	4.6e-010	2.4e-010
60	6.4e-006	2.5e-006	2.1e-007	1.3e-007	7.5e-009	6.2e-009
80	2.6e-005	1.3e-005	1.2e-006	9.3e-007	5.4e-008	6.3e-008
100	7.9e-005	4.4e-005	4.3e-006	4.2e-006	2.5e-007	3.8e-007

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) метод Эйткена приводит к заметному уточнению собственных значений энергии для низших порядков аппроксимации производной, для которых зависимость погрешности от шага сетки не является существенно нелинейной; 2) уточнение результатов при использовании высших порядков аппроксимации требует учета большего количества десятичных знаков, чем обеспечивается разрядной сеткой вещественных данных двойной точности.

Список использованных источников

- 1 Давыдов, А. С. Квантовая механика / А. С. Давыдов. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1973. – 704 с.
- 2 Калиткин, Н. Н. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ / Н. Н. Калиткин, Е. А. Алыпина. – Москва : Издательский центр «Академия», 2013. – 304 с.
- 3 Вержбицкий, В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. – Москва : Директ-Медиа, 2013. – 847 с.
- 4 Дей, Е. А. Эффективность высших порядков метода конечных разностей при решении стационарного уравнения Шредингера / Е. А. Дей // Известия ГГУ. – 2013. – № 6. – С. 178–183.

5 Дей, Е. А. Эффективность метода конечных разностей при решении двумерного стационарного уравнения Шредингера / Е. А. Дей // Материалы IV Международной научной конференции «Проблемы взаимодействия излучения с веществом», посвященной 90-летию со дня рождения Б. В. Бокутя (9–11 ноября 2016 г.) – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – С. 235–241.

6 Дей, Е. А. Эффективность метода конечных разностей при решении трехмерного стационарного уравнения Шредингера / Е. А. Дей // Материалы V Международной научной конференции «Проблемы взаимодействия излучения с веществом», посвященной акад. Б. В. Бокутю (Гомель, 14–16 ноября 2018 г.) – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. – Часть 1. – С. 260–267

7 González, J. L. M. Getting started with Numerov's method / J. L. M. González, D. Thompson // Computers in Physics – 1997. – Vol. 11. – P. 514–515.

8 Дей, Е. А. Обобщение метода Нумерова и численное решение стационарного уравнения Шредингера / Е. А. Дей // Сборник трудов III Международной научной конференции «Проблемы взаимодействия излучения с веществом» посвященной 85-летию со дня рождения Б. В. Бокутя. – Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. – Ч. 1. – С. 114–121.

О. М. Дерюжкова, А. С. Парахневич

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ЧИСЛЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИЗОТОПАХ ВОДОРОДА С ПОМОЩЬЮ САЙТА ЦДФЭ

В настоящее время известно семь изотопов ядра водорода ${}_1H$: протон $p={}_1H^1$, дейтрон $d={}_1H^2$, которые стабильны; тритон $t={}_1H^3$, подвергающийся бета-распаду и очень неустойчивые тяжелые изотопы ${}_1H^4$, ${}_1H^5$, ${}_1H^6$, ${}_1H^7$. Изотопы водорода уникальны тем, что для каждого из них наблюдаются значительные отличия физических, химических, термодинамических и ядерных свойств, что не имеет аналогов в периодической системе. Этим обусловлен интерес к изучению свойств и характеристик данных изотопов.

Продемонстрируем как получить численные данные для характеристик изотопов водорода ${}_1H$, используя калькуляторы системы реляционных баз данных (БД), находящиеся в свободном доступе на интерактивном веб-сайте Центра данных фотоядерных экспериментов (ЦДФЭ) НИИЯФ МГУ [1]. Калькуляторы дают возможность на основе оцененных ядерных данных рассчитать энергию связи и удельную энергию связи атомных ядер, энергию распадов всех известных ядер, а также вычислить пороги и энергии ядерных реакций. Система БД согласно необходимому запросу строит графики зависимости полученных энергий от полного числа нуклонов A .

На рисунке 1 приведена поисковая форма БД калькулятор «Энергии связи ядер» для определения энергии связи, удельной энергии связи и разности энергий связи, полученных экспериментально и с помощью формулы Вайцзеккера, для изотопов водорода ${}_1H$, а также выходная форма запроса [1]. Энергия связи является важнейшей характеристикой прочности ядра и вычисляется по формулам в соответствии с определением [2]

$$E_{cb}(Z, A) = Zm_p + Nm_n - M_{яд}(Z, A)$$

и согласно теории Вайцзеккера

$$E_{cb} = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_4 (N - Z)^2 A^{-1} + \delta E_{cb},$$

где $a_1 = 15,75$ МэВ; $a_2 = 17,8$ МэВ; $a_3 = 0,71$ МэВ; $a_4 = 23,7$ МэВ; $|\delta| = 34 \cdot A^{-3/4}$.

Удельная энергия связи – это энергия связи, приходящаяся на один нуклон:

$$\varepsilon_{cb}(Z, A) = \frac{E_{cb}(Z, A)}{A}.$$

1. Энергии связи ядер

Каждое поле формы может быть пустым. [Помощь...]

Входные параметры	
Z:	<input type="text" value="1"/> Пример: 20, 40-60
N:	<input type="text"/> Пример: 20, 40-60
A:	<input type="text"/> Пример: 20, 40-60
Варианты расчета:	<input checked="" type="checkbox"/> Энергия связи <input checked="" type="checkbox"/> Удельная энергия связи <input checked="" type="checkbox"/> Разность энергий связи (Эксперимент - Вайцзеккер)
На ось абсцисс:	<input type="radio"/> Z <input type="radio"/> N <input checked="" type="radio"/> A
<input type="button" value="Вычислить"/> <input type="button" value="Построить график"/> <input type="button" value="Очистить"/>	

Result - $E_{св}(A,Z)$, $\epsilon(A,Z) = E_{св}(A,Z)/A$, $\delta(A,Z) = E_{св}(A,Z)_{exp} - E_{св}(A,Z)_{theor}$:

Elem	Z	N	A	$E_{св}$	ϵ	δ
H	1	0	1	0.0000	0.0000	26.4600
H	1	1	2	2.2245	1.1123	19.7603
H	1	2	3	8.4821	2.8274	6.6499
H	1	3	4	5.6036	1.4009	23.6249
H	1	4	5	6.6851	1.3370	23.0579
H	1	5	6	5.7467	0.9578	42.4805
H	1	6	7	6.6182	0.9455	46.5178

Рисунок 1 – Входная и выходная формы запроса по определению энергии связи ядер для изотопов водорода ${}_1H$

Используя полученные численные данные из таблицы рисунка 1 можно построить графики зависимости трех видов энергий связи от полного числа нуклонов A для изотопов водорода ${}_1H$ (рисунок 2).

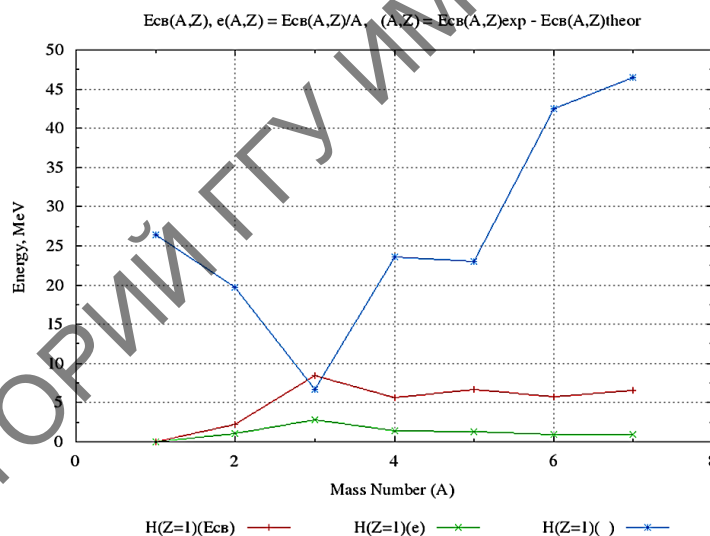


Рисунок 2 – График зависимости энергии связи от полного числа нуклонов A для изотопов водорода ${}_1H$

Из графиков рисунка 2 видно, что энергия связи изотопов водорода ${}_1H$ плавно растет с увеличением числа нуклонов A и лежит в интервале примерно 2–9 МэВ (красная линия), удельная энергия связи для всех изотопов водорода ${}_1H$, исключая стабильный протон, примерно одинакова и находится в пределах 1–3 МэВ/нуклон (зеленая линия). Максимальное значение удельной энергии связи 2,8274 МэВ/нуклон (рисунок 1) соответствует тритию ${}_1H^3$, в ядре которого нуклоны связаны наиболее прочно. Данные результаты подтверждают выводы о том, что удельная энергия связи легких атомных ядер мала из-за поверхностных эффектов, происходящих в ядре, что объясняется на основе полуэмпирической формулы Вайцзеккера.

На рисунке 3 приведена поисковая форма БД калькулятор «Энергии распадов» и выходная форма запроса для расчёта энергии распада выбранного ядра [1]. Калькулятор позволяет определить энергии α -распада, электронного или β -распада, позитронного или β^+ -распада, а также электронного захвата. В качестве исследуемых ядер выбираем изотопы водорода 1H .

3. Энергии распадов

Энергии распадов рассчитаны на основании значений атомных масс по [следующим формулам](#).
Каждое поле формы может быть пустым. [\[Помощь \]](#)

Входные параметры	
Z:	<input type="text" value="1"/> Пример: 20, 40-60
N:	<input type="text"/> Пример: 20, 40-60
A:	<input type="text"/> Пример: 20, 40-60
Тип распада:	<input checked="" type="checkbox"/> α (альфа-распад) <input checked="" type="checkbox"/> β^- (бета-распад) <input checked="" type="checkbox"/> β^+ (позитронный бета-распад) <input checked="" type="checkbox"/> ϵ (электронный захват)
На оси абсцисс:	<input type="radio"/> Z <input type="radio"/> N <input checked="" type="radio"/> A
<input type="button" value="Вычислить"/> <input type="button" value="Построить график"/> <input type="button" value="Очистить"/>	

Result - $Q\alpha(A,Z)$, $Q\beta^-(A,Z)$, $Q\beta^+(A,Z)$, $Q\epsilon(A,Z)$:

Elem	Z	N	A	$Q\alpha$	$Q\beta^-$	$Q\beta^+$	$Q\epsilon$
H	1	2	3	-	0.0190	-	-
H	1	3	4	-	23.4750	-	-
H	1	4	5	-	21.5000	-	-
H	1	5	6	-	24.3049	-	-
H	1	6	7	-	22.9990	-	-

Рисунок 3 – Входная и выходная формы запроса по определению энергии распада изотопов водорода 1H

Из таблицы рисунка 3 видно, что α -распаду не подвержен ни один изотоп водорода 1H , т. к. это легкое ядро, а α -распад характерен в основном для тяжелых ядер. Электронный или β^- -распад наблюдается у 5 из 7 изотопов водорода 1H ($A = 3-7$), протон и дейтрон стабильны. Позитронный или β^+ -распад и e -захват не характерны для изотопов водорода 1H .

На основе полученных численных данных можно построить график зависимости энергии β^- -распада, так как другие отсутствуют, от полного числа нуклонов A для изотопов водорода 1H (рисунок 4). Под энергией, выделяющаяся в результате β^- -распада $Q\beta^-$, следует понимать максимальную энергию, которую приобретает электрон в результате β^- -распада. Ее обычно называют верхней границей β^- -спектра. Из рисунка 4 видно, что энергия β^- -распада увеличивается с ростом числа A и лежит в интервале 0-24,5 МэВ. Для тяжелых изотопов водорода ($A = 4-7$) она примерно одинакова. Явно выраженные максимумы и минимумы энергии на графике рисунка 4 свидетельствует об эффекте спаривания одинаковых нуклонов, при этом изотопы водорода с четным числом нуклонов $A = 4$ и 6 обладают большей энергией распада, а с нечетным числом нуклонов $A = 5$ и 7 – меньшей.

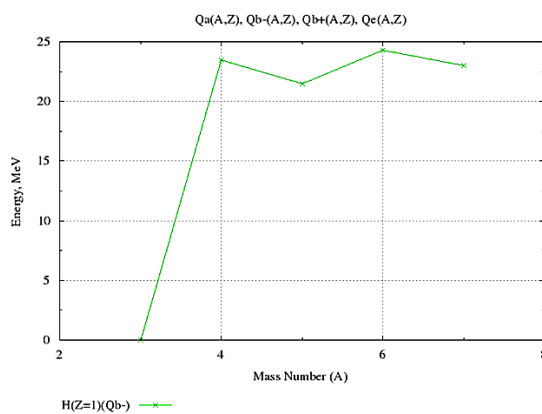


Рисунок 4 – График зависимости энергии β^- -распада от полного числа нуклонов A для изотопов водорода 1H

Рассмотрим работу калькулятора «Пороги и энергии реакций» системы базы данных [1]. Он дает возможность рассчитать энергетические пороги и энергии любых ядерных реакций: под действием любых налетающих частиц и для любой комбинации образующихся продуктов. Энергия реакции Q – это кинетическая энергия, выделяющаяся или поглощающаяся в процессе реакции. Порог ядерной реакции $E_{пор}$ – минимальная кинетическая энергия налетающей частицы, при которой начинается эндотермический процесс ($Q < 0$). Формула для вычисления энергии реакции через известные дефекты масс частиц и ядер Δ , участвующих в данной реакции, имеет вид [3]:

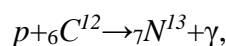
$$Q = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4.$$

Порог ядерной реакции определяется формулой:

$$E_{пор} = |Q| \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right),$$

где m_1 и m_2 – массы налетающей частицы и ядра-мишени соответственно.

На рисунке 5 приведена поисковая форма калькулятора для определения порога и энергии термоядерной реакции на Солнце углеродно-азотного цикла [2]:



а также результат работы калькулятора или выходная форма запроса. В соответствии с видом реакции налетающей частицей в выпадающем меню выбирается протон p , как ядро-мишень указывается ядро с $Z = 6$ и $A = 12$, как вылетающая частица 1 отмечен γ -квант с $Z = 0$ и $A = 0$, в поле ядро-продукт реакции система автоматически выдает ядро с $Z = 7$ и $A = 13$.

4. Пороги и энергии реакций

Каждое поле формы может быть пустым [Помощь]

Входные параметры:	Z:	A:	Число частиц
Ядро-мишень:	6	12	1
Налетающая частица:	p(протон) (для ввода ионов >>>)		
Вылетающая частица 1:	0	0	0
Вылетающая частица 2: <small>(если больше частиц >>>)</small>			0
Ядро-продукт реакции:	7	13	1

Входные параметры:	Символ:	Z:	A:	Масса, u:
• Ядро-мишень:	C	6	12	12
• Налетающая частица:	протон	1	1	0
• Ядро-продукт реакции:	N	7	13	13.005738609

Результаты расчета: Порог реакции: нет порога
Энергия реакции: 1.94349 (26) МэВ

Деление по данному каналу происходит при любой энергии налетающей частицы.

Рисунок 5 – Входная и выходная формы запроса по определению энергетического порога и энергии термоядерной реакции углеродно-азотного цикла

Как видно из данных, представленных на рисунке 5, порог термоядерной реакции $p + {}_6^{12}\text{C} \rightarrow {}_7^{13}\text{N} + \gamma$ не определяется, так как реакция является экзотермической $Q = 1,94349$ МэВ ($Q > 0$), следовательно, происходит при любой энергии налетающей частицы.

Таким образом, можно сделать вывод, что применение калькуляторов «Энергии связи ядер», «Энергии распадов» и «Пороги и энергии реакций» позволяет на основе современных экспериментальных данных рассчитать необходимые численные значения с заданной точностью, максимально быстро и доступно. Калькуляторы веб-сайта ЦДФЭ дают возможность провести качественную наглядную интерпретацию полученных результатов с помощью автоматически сформированных таблиц числовых данных и соответствующих им графиков. При этом вычисления ограничены только количеством известных изотопов и численной информацией по их свойствам.

Список использованных источников

1 Центр данных фотоядерных экспериментов (ЦДФЭ) [Электронный ресурс] / Центр данных фотоядерных экспериментов (ЦДФЭ) – ЦДФЭ, 2003. – Режим доступа : <http://cdfe.sinp.msu.ru/index.ru.html> – Дата доступа : 14.10.2020.

2 Широков, Ю. М. Ядерная физика / Ю. М. Широков, Н. П. Юдин. – Москва : Наука, 1980. – 728 с.

3 Варламов, В. В. Физика ядра и банки ядерных данных: учебное пособие / В. В. Варламов, Н. Г. Гончарова, Б. С. Ишханов. – Москва : Университетская книга, 2010. – 246 с.

В. Н. Капшай, А. А. Гришечкина

г. Гомель, ГТУ им. Ф. Скорины

ПАРЦИАЛЬНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СОСТОЯНИЙ РАССЕЙНИЯ В СЛУЧАЕ ЕДИНИЧНОГО ОРБИТАЛЬНОГО МОМЕНТА

Важными проблемами современной релятивистской физики элементарных частиц являются проблема описания их связанных состояний и проблема описания их упругого рассеяния. Одними из первых уравнений для описания связанных состояний и состояний рассеяния, выведенных в квантовой теории поля, явились уравнения Бете-Солпитера, однако их использование сопряжено с рядом трудностей. Более простыми оказались подходы, основанные на трёхмерных редукциях уравнения Бете-Солпитера, а наиболее популярным оказался трёхмерный квазипотенциальный подход, предложенный в работах Логунова и Тавхелидзе и Кадышевского. В рамках этого подхода была введена концепция релятивистского конфигурационного представления, которое является обобщением координатного представления нерелятивистской квантовой механики. Однако, для того, чтобы изучать как связанные состояния, так и состояния рассеяния, в этом представлении, требуется одна принципиально важная вещь: знание явного вида функций Грина (ФГ). Вплоть до недавнего времени были вычислены только функции Грина двухчастичных систем с нулевым орбитальным моментом. В данной работе мы находим явный вид функций Грина систем с единичным орбитальным моментом для состояния рассеяния.

Парциальные ФГ системы двух частиц для состояний рассеяния в случае орбитального момента равного единице определяются [1, с. 38], как (g_1 – ФГ модифицированного уравнения Кадышевского, g_2 – ФГ уравнения Лагунова-Тавхелидзе, g_3 – ФГ модифицированного уравнения Лагунова-Тавхелидзе, g_4 – ФГ уравнения Кадышевского)

$$g_1(r, r') = - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p_1(\chi_k, r) p_1^*(\chi_k, r')}{\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} \text{sh}^2 \chi_k d\chi_k, \quad (1)$$

$$g_2(r, r') = - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{p_1(\chi_k, r) p_1^*(\chi_k, r')}{\text{ch}^2 \chi_k - \text{ch}^2(\chi_q + i\varepsilon)} \text{sh}^2 \chi_k d\chi_k, \quad (2)$$

$$g_3(r, r') = - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{p_1(\chi_k, r) \text{ch } \chi_k p_1^*(\chi_k, r')}{\text{ch}^2 \chi_k - \text{ch}^2(\chi_q + i\varepsilon)} \text{sh}^2 \chi_k d\chi_k, \quad (3)$$

$$g_4(r, r') = - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p_1(\chi_k, r) p_1^*(\chi_k, r')}{\text{ch } \chi_k (\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon))} \text{sh}^2 \chi_k d\chi_k. \quad (4)$$

Здесь функция $p_1(\chi_k, r)$ имеет вид

$$p_1(\chi_k, r) = \frac{1}{(r+i)\operatorname{sh}^2 \chi_k} \left(-\cos(r\chi_k) \operatorname{sh} \chi_k - \frac{\operatorname{ch} \chi_k \sin(r\chi_k)}{r} \right). \quad (5)$$

В выражениях (1)–(5) χ_k – быстрота, связанная с релятивистским импульсом k соотношением $k = m \operatorname{sh} \chi_k$, χ_q – параметр, с помощью которого параметризуется энергия состояния рассеяния $2E = 2m \operatorname{ch} \chi_q$, а m – масса каждой из частиц.

Рассмотрим нахождение явного вида функции (1). После подстановки выражения (5) в (1) и использования свойств тригонометрических и гиперболических функций, получим

$$g_1(r, r') = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(r+i)(r'-i)} \times \left(\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 + \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r'} \right) I_3 + \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r'} \right) I_4 + \frac{1}{2rr'} (I_5 - I_6) \right). \quad (6)$$

При этом в выражении (6) использованы обозначения:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos(\chi_k(r-r'))}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos(\chi_k(r+r'))}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \quad (7)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \chi_k \sin(\chi_k(r-r'))}{\operatorname{sh} \chi_k (\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon))} d\chi_k, \quad I_4 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \chi_k \sin(\chi_k(r+r'))}{\operatorname{sh} \chi_k (\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon))} d\chi_k, \quad (8)$$

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}^2 \chi_k \cos(\chi_k(r-r'))}{\operatorname{sh}^2 \chi_k (\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon))} d\chi_k, \quad I_6 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}^2 \chi_k \cos(\chi_k(r+r'))}{\operatorname{sh}^2 \chi_k (\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon))} d\chi_k. \quad (9)$$

Таким образом, нахождение функции Грина (1) сводится к вычислению интегралов (7)–(9).

Для вычисления интеграла I_1 , представим его в виде

$$I_1 = \frac{1}{4} (I_{11} + I_{12}), \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\chi_k(r-r')}}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \quad I_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\chi_k(r-r')}}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k. \quad (11)$$

Для нахождения интегралов (11) воспользуемся методами теории функций комплексной переменной [2, с. 119]. Перейдем в комплексную плоскость, рассмотрев вместо интегралов вдоль вещественной прямой (11), интегралы по замкнутому контуру $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (рисунок 1). Нетрудно показать, что, например, необходимый нам интеграл I_{11} связан с интегралом по контуру C соотношением

$$I_{11} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi(r-r')}} \int_C \frac{e^{i(r-r')z}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} dz. \quad (12)$$

Последний интеграл можно определить используя теорему о вычетах [2, с. 122, 3, с. 8]. Определяя полюсы, попадающие внутрь контура интегрирования, и значения вычетов в них [4, с. 353], для интегралов I_{11} и I_{12} в пределе $\varepsilon \rightarrow +i0$ получим выражения

$$I_{11} = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)}, \quad I_{12} = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{sh}(-(r-r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}(-(r-r')\pi)}. \quad (13)$$

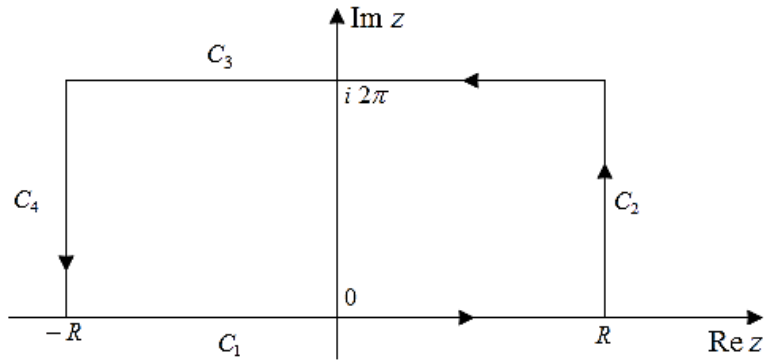


Рисунок 1 – Контур интегрирования в комплексной плоскости

Подставив (13) в (10) для интеграла I_1 , а, действуя аналогично и для I_2 , получим

$$I_1 = \frac{\pi i}{\operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)}, \quad I_2 = \frac{\pi i}{\operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}((r+r')\pi)} \quad (14)$$

Интеграл I_3 представим в виде

$$I_3 = \frac{1}{4i} (I_{31} - I_{32}), \quad (15)$$

где $I_{31} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \chi_k}{\operatorname{sh} \chi_k} \frac{e^{i\chi_k(r-r')}}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k$, $I_{32} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \chi_k}{\operatorname{sh} \chi_k} \frac{e^{-i\chi_k(r-r')}}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k$.

Перейдя в комплексную плоскость для интеграла I_{31} , легко обнаружить, что некоторые из полюсов подынтегрального выражения попадут на контур интегрирования. В таком случае, заменим I_{31} интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \chi_k}{\operatorname{sh}(\chi_k + i\gamma)} \frac{e^{i\chi_k(r-r')}}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \quad (16)$$

в котором полюсы смещены с контура интегрирования в нижнюю комплексную полу-плоскость. В итоге, применяя ранее рассмотренный метод для интегралов I_{31} и I_{32} , в пределе $\gamma, \varepsilon \rightarrow +0$ получим

$$I_{31} = \frac{i\pi}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{e^{-\pi(r-r')}}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} 2 \operatorname{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi)) \right], \quad (17)$$

$$I_{32} = \frac{-i\pi}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{e^{\pi(r-r')}}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} 2 \operatorname{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi)) \right]. \quad (18)$$

Используя выражения (17)–(18), представим I_3 , и аналогично I_4 , в виде

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{\operatorname{ch}((r-r')\pi)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} 2 \operatorname{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi)) \right], \quad (19)$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\operatorname{sh}((r+r')\pi)} \left[\frac{\operatorname{ch}((r+r')\pi)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} 2 \operatorname{ch}((r+r')(i\chi_q + \pi)) \right]. \quad (20)$$

При использовании для вычисления интегралов (9) того же метода, что и для интегралов (8), особенность будет состоять в том, что в случае (9) на контур попадут полюсы второго порядка. Сдвигая их с помощью замены $\text{sh}(\chi_k) \rightarrow \text{sh}(\chi_k + i\gamma)$ и проводя аналогичные вычисления, получим

$$I_5 = \frac{1}{2} \frac{\pi i}{\text{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{i(r-r') \text{ch}((r-r')\pi)}{1 - \text{ch} \chi_q} - \frac{i(r-r') \text{ch}^2 \chi_q}{1 + \text{ch} \chi_q \text{sh}^3 \chi_q} 2 \text{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi)) \right], \quad (21)$$

$$I_6 = \frac{1}{2} \frac{\pi i}{\text{sh}((r+r')\pi)} \left[\frac{i(r+r') \text{ch}((r+r')\pi)}{1 - \text{ch} \chi_q} - \frac{i(r+r') \text{ch}^2 \chi_q}{1 + \text{ch} \chi_q \text{sh}^3 \chi_q} 2 \text{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi)) \right]. \quad (22)$$

Подставляя соотношения (14), (19), (20), (21), (22) в (6), получим выражение для функции Грина (1):

$$\begin{aligned} g_1(r, r') = & - \frac{1}{(r+i)(r'-i)} \left(\frac{i}{2 \text{sh} \chi_q} \frac{\text{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi))}{\text{sh}((r-r')\pi)} + \frac{i}{2 \text{sh} \chi_q} \times \frac{\text{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi))}{\text{sh}((r+r')\pi)} + \right. \\ & + \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r'} \right) \frac{1}{2 \text{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{\text{ch}((r-r')\pi)}{1 - \text{ch} \chi_q} - \frac{1}{1 + \text{ch} \chi_q} + 2 \frac{\text{ch} \chi_q}{\text{sh}^2 \chi_q} \text{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi)) \right] + \\ & + \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r'} \right) \frac{1}{2 \text{sh}((r+r')\pi)} \times \left[\frac{\text{ch}((r+r')\pi)}{1 - \text{ch} \chi_q} - \frac{1}{1 + \text{ch} \chi_q} + 2 \frac{\text{ch} \chi_q}{\text{sh}^2 \chi_q} \text{ch}((r+r')(i\chi_q + \pi)) \right] + \\ & + \frac{1}{2rr'} \left(\frac{i}{2 \text{sh}((r-r')\pi)} \times \left[\frac{i(r-r') \text{ch}((r-r')\pi)}{1 - \text{ch} \chi_q} - \frac{i(r-r')}{1 + \text{ch} \chi_q} + 2 \frac{\text{ch}^2 \chi_q}{\text{sh}^3 \chi_q} \text{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi)) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{i}{2 \text{sh}((r+r')\pi)} \times \left[\frac{i(r+r') \text{ch}((r+r')\pi)}{1 - \text{ch} \chi_q} - \frac{i(r+r')}{1 + \text{ch} \chi_q} + 2 \frac{\text{ch}^2 \chi_q}{\text{sh}^3 \chi_q} \text{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi)) \right] \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично получим выражения для функций Грина (2)–(4)

$$\begin{aligned} g_2(r, r') = & - \frac{1}{(r+i)(r'-i)} \left(\frac{i}{\text{sh} 2\chi_q} \frac{\text{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi/2))}{\text{sh}((r-r')\pi/2)} + \frac{i}{\text{sh} 2\chi_q} \times \frac{\text{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi/2))}{\text{sh}((r+r')\pi/2)} + \right. \\ & + \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r'} \right) \frac{1}{\text{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{\text{ch}((r-r')\pi) + 1}{1 - \text{ch}^2 \chi_q} + \frac{2 \text{ch}((r-r')\pi/2) \text{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi/2))}{\text{sh}^2 \chi_q} \right] + \\ & + \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r'} \right) \frac{1}{\text{sh}((r+r')\pi)} \times \left[\frac{\text{ch}((r+r')\pi) + 1}{1 - \text{ch}^2 \chi_q} + \frac{2 \text{ch}((r+r')\pi/2) \text{ch}((r+r')(i\chi_q + \pi/2))}{\text{sh}^2 \chi_q} \right] + \\ & + \frac{1}{2rr'} \left(\frac{i}{\text{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{i(r-r')(\text{ch}((r-r')\pi) + 1)}{1 - \text{ch}^2 \chi_q} + 2 \frac{\text{ch} \chi_q}{\text{sh}^3 \chi_q} \times \text{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi/2)) \text{ch}((r-r')\pi/2) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{i}{\text{sh}((r+r')\pi)} \times \left[\frac{i(r+r')(\text{ch}((r+r')\pi) + 1)}{1 - \text{ch}^2 \chi_q} + 2 \frac{\text{ch} \chi_q}{\text{sh}^3 \chi_q} \text{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi/2)) \text{ch}((r+r')\pi/2) \right] \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
g_3(r, r') = & -\frac{1}{(r+i)(r'-i)} \left(\frac{i}{2 \operatorname{sh} \chi_q} \frac{1}{\operatorname{ch}((r-r')\pi/2)} \frac{\operatorname{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi/2))}{\operatorname{ch}((r-r')\pi/2)} + \frac{i}{2 \operatorname{sh} \chi_q} \times \right. \\
& \times \frac{\operatorname{ch}((r+r')(i\chi_q + \pi/2))}{\operatorname{ch}((r+r')\pi/2)} + \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r'} \right) \frac{1}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{\operatorname{ch}((r-r')\pi) - 1}{1 - \operatorname{ch}^2 \chi_q} + \right. \\
& + 2 \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} \operatorname{sh}((r-r')\pi/2) \operatorname{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi/2)) \left. \right] + \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r'} \right) \times \\
& \times \frac{1}{\operatorname{sh}((r+r')\pi)} \left[\frac{\operatorname{ch}((r+r')\pi) - 1}{1 - \operatorname{ch}^2 \chi_q} + 2 \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} \operatorname{sh}((r+r')\pi/2) \times \right. \\
& \times \operatorname{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi/2)) + \frac{1}{2rr'} \left(\frac{i}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \times \right. \\
& \times \left[\frac{i(r-r')(\operatorname{ch}((r-r')\pi) - 1)}{1 - \operatorname{ch}^2 \chi_q} + 2 \frac{\operatorname{ch}^2 \chi_q}{\operatorname{sh}^3 \chi_q} \operatorname{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi/2)) \right] \times \\
& \times \operatorname{sh}((r-r')\pi/2) \left. \right] - \frac{i}{\operatorname{sh}((r+r')\pi)} \left[\frac{i(r+r')(\operatorname{ch}((r+r')\pi) - 1)}{1 - \operatorname{ch}^2 \chi_q} + \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\operatorname{ch}^2 \chi_q}{\operatorname{sh}^3 \chi_q} \operatorname{ch}((r+r')(i\chi_q + \pi/2)) \operatorname{sh}((r+r')\pi/2) \right] \right] \Bigg), \tag{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4(r, r') = & -\frac{1}{2} \frac{1}{(r+i)(r'-i)} \left(\frac{i}{\operatorname{sh} 2\chi_q} \left[\frac{i \operatorname{sh} \chi_q}{\operatorname{ch}((r-r')\pi/2)} + \frac{2 \operatorname{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \right] + \right. \\
& + \frac{i}{\operatorname{sh} 2\chi_q} \left[\frac{i \operatorname{sh} \chi_q}{\operatorname{ch}((r+r')\pi/2)} + \frac{2 \operatorname{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}((r+r')\pi)} \right] + \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r'} \right) \frac{1}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \times \\
& \times \left[\frac{\operatorname{ch}((r-r')\pi)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{2 \operatorname{ch}((r-r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} \right] + \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r'} \right) \times \\
& \times \frac{1}{\operatorname{sh}((r+r')\pi)} \left[\frac{\operatorname{ch}((r+r')\pi)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{2 \operatorname{ch}((r+r')(i\chi_q + \pi))}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} \right] + \tag{26} \\
& + \frac{1}{2rr'} \left(\frac{i}{\operatorname{sh}((r-r')\pi)} \left[\frac{i(r-r') \operatorname{ch}((r-r')\pi)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{i(r-r')}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + 2 \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^3 \chi_q} \operatorname{sh}((r-r')(i\chi_q + \pi)) \right] - \frac{i}{\operatorname{sh}((r+r')\pi)} \times \right. \\
& \left. \left. \times \left[\frac{i(r+r') \operatorname{ch}((r+r')\pi)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{i(r+r')}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + 2 \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} \operatorname{sh}((r+r')(i\chi_q + \pi)) \right] \right) \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим поведение полученных функций Грина на примере $g_1(r, r')$. На рисунках 2, 3 изображены графики зависимости действительной $\text{Re}(g_1)$ и мнимой $\text{Im}(g_1)$ частей функции Грина от r при $r' = 0$ и $\chi_q = 1$.

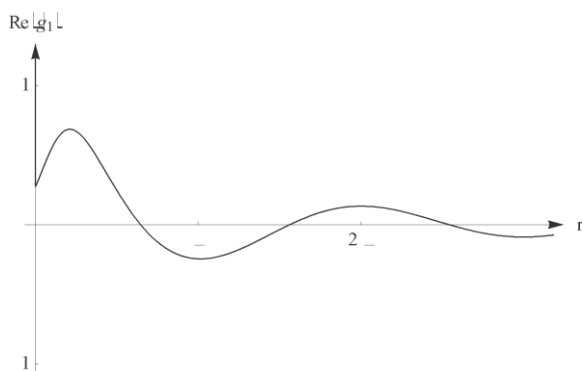


Рисунок 2 – График зависимости действительной части функции Грина (23) от одной из координат при фиксировании другой

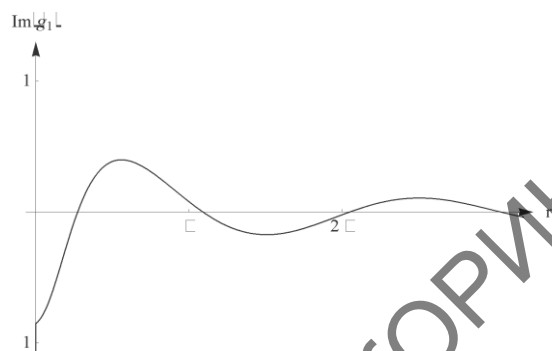


Рисунок 3 – График зависимости мнимой части функции Грина (23) от одной из координат при фиксировании другой

Таким образом, в данной работе была рассмотрена одна из ключевых задач изучения состояний рассеяния элементарных частиц в подходе релятивистского конфигурационного представления. Для решения этой задачи необходимо знание явного вида функций Грина, который для единичного орбитального момента в настоящей работе получен.

Список использованных источников

1 Капшай, В. Н. Решения релятивистских двухчастичных уравнений с произвольным орбитальным моментом / В. Н. Капшай, С. И. Фиалка // Известия ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 34–43. (Kapshai, V.N. Solution of relativistic two-particle equations with arbitrary orbital angular momentum / V.N. Kapshai, S.I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2017. – Vol. 60, № 1. – P. 37–49.)

2 Теория функций комплексного переменного / В. Г. Кротов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 431 с.

3 Гельфонд, А. О. Вычеты и их приложения / А. О. Гельфонд // Москва : Ленанд, 2018. – 114 с.

4 Wunsch, A. D. Complex variables with applications / A. D. Wunsch. – 3rd ed. – New York : P A W, 2005. – 676 p.

В. Н. Капшай, А. А. Шамына, А. И. Толкачѳв

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ СЖАТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Введение. Нелинейные оптические явления второго порядка активно используются в микроскопии, спектроскопии и при получении когерентного излучения удвоенной частоты или суммарных частот. Необходимым условием для наблюдения таких яв-

лений является наличие анизотропии у объекта, в котором они происходят. В изотропных средах такими объектами могут быть границы раздела сред, поверхности частиц и другие неоднородности.

В работе [0, с. 1374] рассмотрена генерация в поверхностном слое диэлектрических частиц эллипсоидальной формы, однако полученные её авторами формулы представлены в крайне неудобном для анализа виде и имеют множество неточностей и опечаток. Также входящие в состав указанных формул ряды сходятся только при значениях квадрата отношения полуосей эллипсоида вращения более $1/2$, что объясняет необходимость повторного рассмотрения этого явления с исправлением указанных недостатков.

Ранее подобные задачи были решены нами для случаев диэлектрических частиц сферической [2, с. 417; 3, с. 795; 4, с. 71] и цилиндрической [5, с. 105; 6, с. 724; 7, с. 732; 8, с. 740] форм с получением итоговых формул в тензорном виде. Цель настоящей работы применить тот же подход для решения задачи о генерации второй гармоники в поверхностном слое диэлектрических частиц в форме сжатого эллипсоида вращения, когда квадрат отношения полуосей имеет значения менее 2. Для упрощения модели при решении задачи используется обобщённое приближение Рэля–Ганса–Дебая [0, с. 053850], в котором показатели преломления частицы и окружающей среды практически не отличаются. Тогда накоплением разности фаз в объёме диэлектрической частицы, а также рассеянием падающих и генерируемых электромагнитных волн на поверхности частицы можно пренебречь.

1. Постановка задачи. Направим ось Oz декартовой системы координат вдоль оси симметрии диэлектрической частицы в форме эллипсоида вращения. Начало координат поместим в геометрический центр частицы. Зададим длины полуосей эллипсоида вращения равными $a_x = a_y$ и a_z вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно (рисунок 1), а толщину оптически нелинейного слоя на его поверхности равной d_0 ($d_0 \ll a_x, d_0 \ll a_y$). С учётом введённых обозначений вектор электрической напряжённости падающей плоской волны можно записать в форме

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_0 \mathbf{e}^{(\omega)} \exp(i\mathbf{k}^{(\omega)} \mathbf{x} - i\omega t), \quad (1)$$

где E_0 – комплексная амплитуда падающей волны, $\mathbf{e}^{(\omega)}$ – единичный вектор, задающий её поляризацию, $\mathbf{k}^{(\omega)}$ – волновой вектор падающей волны, а ω – её циклическая частота. Здесь и далее символ i вне индексов означает мнимую единицу. Для удобства записи формул в дальнейшем множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается.

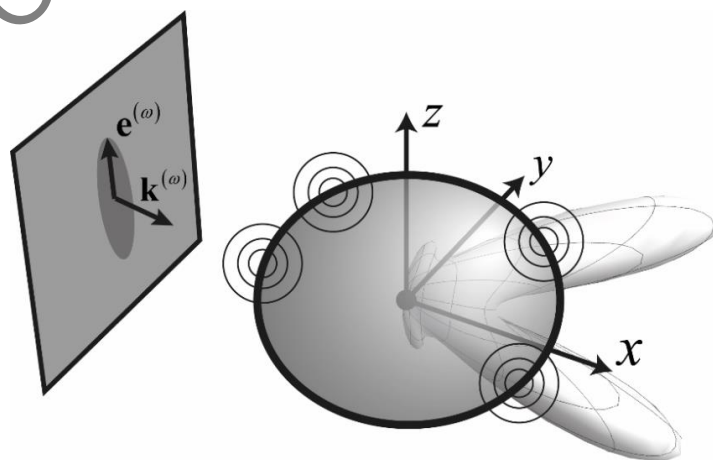


Рисунок 1 – Схема задачи о генерации второй гармоники в поверхностном слое диэлектрической частицы в форме сжатого эллипсоида вращения

Нелинейную часть поляризации поверхностного слоя, в соответствии с дипольной моделью, в приближении Рэля–Ганса–Дебая можно записать с использованием правила суммирования по повторяющимся индексам как

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k, \quad (2)$$

где $E_{j,k}$ – компоненты вектора электрической напряжённости падающей волны, а $\chi_{ijk}^{(2)}$ – тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка для элементарного участка поверхностного слоя:

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} n_m (n_k \varepsilon_{ijm} - n_j \varepsilon_{imk}), \quad (3)$$

где $\chi_{1-4}^{(2)}$ – численные значения независимых компонент, δ_{ij} , ε_{ijm} – дельта-символ Кронекера и символ Леви–Чивита соответственно, $n_{i,j,k}$ – компоненты вектора нормали к участку поверхностного слоя. Нижние индексы i, j, k могут принимать значения x, y, z .

2. Решение. Для дальней зоны вектор напряжённости электрического поля второй гармоники в Гауссовой системе единиц можно вычислить с использованием метода функции Грина [2, с. 417]:

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega} r)}{c^2 r} \int_V \exp(-i\mathbf{k}^{(2\omega)} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4)$$

где вектор \mathbf{e}_r – один из базисных векторов $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ сферической системы координат с центром в точке геометрического центра частицы, символ \otimes означает тензорное произведение, $\mu_{2\omega}$ – это магнитная проницаемость окружающей среды на частоте 2ω , $k_{2\omega} = |\mathbf{k}^{(2\omega)}|$ – модуль волнового вектора генерируемой волны, $r = |\mathbf{x}|$ – расстояние от геометрического центра частицы до точки наблюдения. Интегрирование ведётся по объёму поверхностного оптически нелинейного слоя V .

После подстановки (1), (2) в (4) и вычисления интеграла получаем:

$$E_i^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \mu_{2\omega} \left((2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega} r) / (c^2 r) \right) d_0 a_x^2 (\delta_{im} - e_{r,i} e_{r,m}) e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)} X_{ijk}^{(2\omega)}, \quad (5)$$

где $X_{ijk}^{(2\omega)}$ – тензор эффективной нелинейной диэлектрической восприимчивости:

$$X_{ijk}^{(2\omega)} = \chi_1^{(2)} I(n_i n_j n_k) + \chi_2^{(2)} I(n_i) \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (I(n_j) \delta_{ki} + I(n_k) \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} (I(n_m n_k) \varepsilon_{ijm} - I(n_m n_j) \varepsilon_{imk}). \quad (6)$$

Для записи явного вида слагаемых в (6) нам понадобится вспомогательная функция:

$$M_{2s,c,q}(z_1, z_2, \rho) = \frac{z_2^{2\{q/2\}}}{z_1^{q/2+\{q/2\}}} \frac{4\pi}{i^{c-2\{q/2\}}} \times \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^s \sum_{k=0}^{s-m} \sum_{l=0}^{2m+c} \sum_{d=0}^n \frac{(-1)^{k+l+g+d} (q+2\{q/2\}+2d+2g+2k-1)!!}{(2g+2\{q/2\})!} \times \times \begin{pmatrix} -(c+q-1)/2-s \\ -(c+q-1)/2-s-n, n-d, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ m, k, s-m-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m+c \\ l \end{pmatrix} \times \times (q/2 + \{q/2\} + d + g + k)_l (\rho^2 - 1)^n j_{q/2+\{q/2\}+d+g+k}^{(2m+c-l)}(z_1) z_1^{-(d+g+k+l)} z_2^{2g}, \quad (7)$$

где $\{q/2\}$ – дробная часть числа $q/2$, конструкции $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k_1, k_2, k_3}$ – биномиальный и мультиномиальный коэффициенты соответственно, обозначение $\binom{n}{k}$ принято для символа Похгаммера, $j_m^{(p)}(z)$ – производная p -го порядка от сферической функции Бесселя m -го порядка. Значения индексов s, c, q являются целыми неотрицательными числами, а область определения функции $M_{2s,c,q}(z_1, z_2, \rho)$ ограничена условиями

$$\rho^2 < 2, \rho^2 \neq 1, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0. \quad (8)$$

Тогда функции I можно записать в виде

$$\begin{aligned} I\left(\binom{n_z}{m}\right) &= M_{0,0,m}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho), & m &= 1, 2, 3; \\ I\left(\binom{n_z}{m} n_i\right) &= \rho M_{0,1,m}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho) v_i, & m &= 0, 1, 2; \quad i = x, y; \\ I\left(\binom{n_z}{m} n_i n_j\right) &= \rho^2 (M_{0,2,m}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho) - M_{2,0,m}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho)) v_i v_j + \\ &+ \rho^2 M_{2,0,m}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho) \delta_{ij}, & m &= 0, 1; \quad i, j = x, y; \\ I(n_i n_j n_k) &= \rho^3 (M_{0,3,0}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho) - 3M_{2,1,0}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho)) v_i v_j v_k + \\ &+ \rho^3 M_{2,1,0}(q_{\perp}a_x, q_z a_z, \rho) (v_i \delta_{jk} + v_j \delta_{ki} + v_k \delta_{ij}), & i, j, k &= x, y. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{q}_{\perp} = (1 - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \mathbf{q}, \quad q_{\perp} = |\mathbf{q}_{\perp}|, \quad \mathbf{v} = \mathbf{q}_{\perp} / |\mathbf{q}_{\perp}|, \quad \rho = a_z / a_x. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{q} – вектор рассеяния, который может быть вычислен по формуле $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}^{(\omega)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}$.

Заключение. Приведенные в настоящей работе выражения позволяют с любой точностью определить компоненты вектора электрической напряжённости генерируемого поля второй гармоники. Рассмотренный случай сжатого эллипсоида вращения, когда квадрат отношения его полуосей меньше 2, дополняет приведенный в работе [0, с. 149] случай генерации в поверхностном слое вытянутого эллипсоида вращения, когда квадрат отношения его полуосей больше 1/2.

Полученные формулы можно использовать при планировании эксперимента по генерации второй гармоники в поверхностном слое деформированных эллипсоидальных и сферических частиц, а также при решении задач о генерации суммарной частоты в поверхностных слоях диэлектрических частиц подобных форм и при описании нелинейной генерации несколькими электромагнитными волнами [0, с. 126].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф20М–011).

Список использованных источников

- 1 Beer, A. G. F. Theory of Optical Second-Harmonic and Sum-Frequency Scattering from Arbitrarily Shaped Particles / A. G. F. de Beer, S. Roke, J. I. Dadap / J. Opt. Soc. Am. B. – 2011. – Vol. 28, iss. 6. – P. 1374–1384.
- 2 Kapshai, V. N. Second-Harmonic Generation from a Thin Spherical Layer and No-Generation Conditions / V. N. Kapshai, A. A. Shamyna // Optics and Spectroscopy. – 2017. – Vol. 123, № 3. – P. 440–453.
- 3 Kapshai, V. N. Sum-Frequency Generation from a Thin Spherical Layer: I. Analytical Solution / V. N. Kapshai, A. A. Shamyna // Optics and Spectroscopy. – 2018. – Vol. 124. – № 6. – P. 826–833.
- 4 Shamyna, A. A. Sum-Frequency Generation from a Thin Spherical Layer: II. Analysis of Solution / A. A. Shamyna, V. N. Kapshai // Optics and Spectroscopy. – 2018. – Vol. 125, № 1. – P. 74–81.

5 Shamyna, A. A. Sum-Frequency Generation from a Thin Cylindrical Layer / A. A. Shamyna, V. N. Kapshai // Optics and Spectroscopy. – 2018. – Vol. 124. – № 1. – P. 103–120.

6 Шамына, А. А. Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. I. Аналитическое решение / А. А. Шамына, В. Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 126, вып. 6. – С. 726–733.

7 Капшай, В. Н. Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. II. Анализ решения / В. Н. Капшай, А. А. Шамына // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 126, вып. 6. – С. 734–741.

8 Шамына, А. А. Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. III. Условия отсутствия генерации / А. А. Шамына // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 126, вып. 6. – С. 742–749.

9 Viarbitskaya, S. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen and T. Hansson // Phys. Rev. A. – 2010. – № 81. – P. 053850.

10 Шамына, А. А. Генерация второй гармоники в тонком оптически нелинейном слое, нанесённом на поверхность диэлектрической частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения, при её облучении плоской электромагнитной волной / А. А. Шамына // Проблемы взаимодействия излучения с веществом: материалы V Международ. науч. конф., посвящённой академику Б. В. Бокутю, Гомель, 14–16 ноября 2018 г. : в 2 ч. / редкол.: Д. Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2018. – Ч. 1. – С. 149–154.

11 Толкачёв, А. И. Оптимизация эффективности генерации второй гармоники–суммарной частоты в тонком сферическом слое / А. И. Толкачёв, В. Н. Капшай, А. А. Шамына / Проблемы взаимодействия излучения с веществом: материалы V Международ. науч. конф., посвящённой академику Б. В. Бокутю, Гомель, 14–16 ноября 2018 г.: в 2 ч. / редкол.: Д. Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2018. – Ч. 1. – С. 126–132.

С. А. Лукашевич, Н. В. Максименко, О. М. Дерюжкова

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦЫ СПИНА $\frac{1}{2}$ С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ

Введение. В электродинамике адронов теория взаимодействия электромагнитного поля с адронами базируется на основных принципах релятивистской теории поля. В рамках простых модельных представлений взаимодействия фотонов с адронами в основном используется диаграммная техника [1, 2]. В области низких энергий взаимодействие электромагнитного поля реализуется со сложными кварк-глюонными системами, где методы КХД слабо эффективны, и в последнее время все больше используется низкоэнергетические теоремы и правила сумм [3, 4, 5, 6].

Благодаря повышению точности измерения электромагнитных характеристик адронов открываются новые возможности для более глубокого анализа существующих теоретико-полевых и модельных представлений о взаимодействии адронов с электромагнитным полем. При исследовании электромагнитных характеристик адронов особое внимание отводится поляризуемостям, поскольку эти характеристики чувствительны не только к особенностям самой структуры адронов, но и к механизмам поглощения и излучения электромагнитного поля.

В настоящее время известен достаточно широкий класс двухфотонных электродинамических процессов, на основе которых можно получить экспериментальные данные о поляризуемости адронов. В связи с этим возникает задача о последовательном ковариантном определении вклада поляризуемостей в амплитуды и сечения электродинамиче-

ских процессов на адронах. [7, 8]. Решение подобных задач возможно выполнить в рамках теоретико-полевого ковариантного представления взаимодействия электромагнитного поля с адронами с учетом их поляризуемостей [6, 9, 10, 11].

Релятивистский эффективный Лагранжиан, предложенный в [6, 9, 10] использован в работе [12] для определения вершины взаимодействия γ -кванта с протонами с учетом поляризуемостей и на этой основе выполнено фитирование экспериментальных данных по комптоновскому рассеянию на протоне в энергетической окрестности рождения $\Delta(1232)$ резонанса в работе [13].

Данная работа является продолжением исследований, результаты которых представлены в статьях [6, 9, 10, 11]. На основе ковариантного факторизованного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля со структурной поляризующейся частицей спина $\frac{1}{2}$ используя метод эффективного метрического тензора подобного [14], получено уравнение движения, вычислены канонический и метрический тензоры энергии-импульса. Определена плотность энергии-импульса и плотность энергии взаимодействия поляризующейся частицы с электромагнитным полем.

1. Лагранжиан и уравнения движения частицы с учетом поляризуемости. На основе принципа соответствия классической квантовой электродинамики из функции Лагранжа

$$L = -\frac{2\pi}{m} \left[(\alpha + \beta) F_{\mu\sigma} F^{\mu\rho} - \frac{\beta}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} \right] u^{\rho} u^{\sigma}. \quad (1)$$

Получим Лагранжиан взаимодействия поляризующейся частицы с электромагнитным полем [6]

$$\mathcal{L} = K_{\rho\sigma} \theta^{\rho\sigma}. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) введены обозначения: u^{ρ} – компоненты 4-х-скорости частицы,

$$K_{\rho\sigma} = \left(-\frac{2\pi}{m} \right) \left[(\alpha + \beta) F_{\mu\rho} F^{\mu}_{\sigma} - \frac{g_{\rho\sigma}}{2} \beta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (3)$$

где α и β – электрическая и магнитная поляризуемости частицы, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ – тензор электромагнитного поля, а тензор $\theta^{\rho\sigma}$ имеет вид:

$$\theta^{\rho\sigma} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\rho} \overleftrightarrow{\partial}^{\sigma} \psi, \quad (4)$$

где в (4) ψ и $\bar{\psi}$ – волновые функции частицы спина $\frac{1}{2}$, $\overleftrightarrow{\partial}^{\sigma} = \overrightarrow{\partial}^{\sigma} - \overleftarrow{\partial}^{\sigma}$, стрелки указывают направление действия производной, γ^{ρ} – матрицы, удовлетворяющие соотношению $\gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} + \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} = 2g^{\rho\sigma}$.

В отличие от других подобных лагранжианов, которые используются для описания двухфотонных взаимодействий [15, 16], лагранжиан (2) тоже согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния на нуклоне, но он факторизован и представляется в виде двух блоков, которые определяются электромагнитным полем ($K_{\rho\sigma}$) и полем фермиона спина $\frac{1}{2}$ ($\theta^{\rho\sigma}$).

Используя принцип калибровочной инвариантности и метод эффективного метрического тензора подобного [14] лагранжиан (2) можно представить в виде [17]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\widehat{D} - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\widehat{D} + m) \psi, \quad (5)$$

где $\widehat{D} = \eta_{\sigma\nu} \gamma^{\sigma} \overrightarrow{\partial}^{\nu} + iQ\hat{A}$, $\widehat{D} = \overleftarrow{\partial}^{\sigma} \gamma^{\sigma} \eta_{\sigma\nu} - iQ\hat{A}$.

Эффективный метрический тензор $\eta_{\sigma\nu}$ определяется следующим образом

$$\eta_{\sigma\nu} = g_{\sigma\nu} + \frac{2\pi}{m} \left[\alpha F_{\sigma\mu} F^{\mu}_{\nu} + \beta \widetilde{F}_{\sigma\mu} \widetilde{F}^{\mu}_{\nu} \right], \quad (6)$$

где $\widetilde{F}_{\sigma\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\mu\rho\nu} F^{\rho\nu}$.

Подставляя \mathcal{L} , определенное в (5), в уравнения Лагранжа-Эйлера, получим уравнения движения частицы в электромагнитном поле с учетом ее заряда, спина и поляризуемостей:

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = Q\hat{A}\psi - iK_{\sigma\nu}\gamma^\sigma\partial^\nu\psi, \quad (7)$$

$$\bar{\psi}(i\hat{\partial} + m) = -Q\bar{\psi}\hat{A} - i(\partial^\nu\bar{\psi})\gamma^\sigma K_{\sigma\nu}. \quad (8)$$

2. Определение тензора энергии-импульса частицы с учетом поляризуемости и взаимодействия с электромагнитным полем. Получим тензор энергии-импульса на основе лагранжиана вида:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^{(Y)} + \mathcal{L}_0^{(D)}. \quad (9)$$

Здесь $\mathcal{L}_0^{(Y)} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, а $\mathcal{L}_0^{(D)} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$. Из (9) очевидно, что \mathcal{L}_0 зависит от $\bar{\psi}$, ψ , $\partial_\sigma\psi$, $\partial_\sigma\bar{\psi}$ и $\partial_\mu A_\nu$.

Вычислим производную $\partial_\sigma\mathcal{L}_0$ с учетом указанной зависимости \mathcal{L}_0 в (9). В результате получим

$$\begin{aligned} \partial^\rho\mathcal{L}_0 = & \partial^\rho\psi\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\psi} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\psi)}\right) + \partial^\rho\bar{\psi}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\bar{\psi})}\right) - \\ & - \partial^\rho A_\kappa\left(\partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma A_\kappa)}\right) + \partial_\sigma\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\psi)}\partial^\rho\psi + \partial^\rho\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\bar{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma A_\kappa)}\partial^\rho A_\kappa\right). \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнении (10) три первых слагаемых равны нулю на основании уравнения Лагранжа-Эйлера, а оставшиеся слагаемые перенесем влево. Тогда из (10) следует:

$$\partial_\sigma T_{can}^{\sigma\rho} = 0. \quad (11)$$

В выражении (11) $T_{can}^{\sigma\rho}$ – тензор энергии-импульса, построенный на основе лагранжиана (9), определяется соотношением

$$T_{can}^{\sigma\rho} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\psi)}\partial^\rho\psi + \partial^\rho\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\bar{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma A_\kappa)}(\partial^\rho A_\kappa) + g^{\sigma\rho}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \quad (12)$$

где учтено, что $\mathcal{L}_0^{(D)} = 0$ в выражении (12).

В последнем члене уравнения (12) феноменологически введем лагранжианы взаимодействия электромагнитного поля с частицами с учетом заряженного тока и их поляризуемостей. Тогда уже с учетом дираковского поля $\mathcal{L}_0^{(D)}$ получим:

$$\begin{aligned} T_{can}^{\sigma\rho} = & \partial^\rho\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\bar{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma\psi)}\partial^\rho\psi + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma A_\kappa)}(\partial^\rho A_\kappa) - \\ & - g^{\sigma\rho}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + K_{\sigma\rho}\theta^{\rho\sigma}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая определение \mathcal{L}_0 (9), выражение (13) приведем к виду

$$T_{can}^{\sigma\rho} = -F^{\sigma\nu}\partial^\rho A_\nu + \theta^{\rho\sigma} - g^{\sigma\rho}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + K_{\sigma\rho}\theta^{\rho\sigma}\right). \quad (14)$$

Если воспользуемся неоднозначностью определения тензора энергии-импульса

$$T'^{\sigma\rho} = T^{\sigma\rho} + \partial_\nu(F^{\sigma\nu}A^\rho), \quad (15)$$

то (14) можно представить следующим образом

$$T_{metr}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + \theta^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}j_\rho A^\rho - g^{\mu\nu}K_{\sigma\rho}\theta^{\rho\sigma}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что плотность энергии взаимодействия электромагнитного поля с поляризуемой частицей спина $\frac{1}{2}$ определяется электромагнитным полем, полем частицы и их взаимодействием.

Плотность энергии взаимодействия электромагнитного поля с поляризуемой частицей определяется так [16]:

$$T_{metr}^{00} = -K_{\sigma\rho}\theta^{\rho\sigma}. \quad (16)$$

В системе покоя частицы из (16) получим

$$\mathcal{E} = -\frac{2\pi}{m}\theta^{00}(\alpha\vec{E}^2 + \beta\vec{B}^2)K_{\sigma\rho}\theta^{\rho\sigma}. \quad (17)$$

Определение (16) позволяет использовать методы вторичного квантования для вычисления амплитуд двухфотонного взаимодействия с адронами спина $\frac{1}{2}$.

Закключение. В лагранжевом ковариантном формализме получены уравнения движения частицы спина $\frac{1}{2}$ на основании ковариантного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с поляризуемыми частицами. Определено соответствие между ковариантным лагранжианом, каноническим и метрическим тензорами энергии-импульса. В системе покоя частицы получена плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостями и электромагнитным полем.

Список использованных источников

1 Brodsky, S. J. The Electromagnetic Interaction of Composite Systems / S. J. Brodsky, J. R. Primack // *Annals of Physics*. – Vol. 52. – 1969. – P. 315–365.

2 Scherer, S. Virtual Compton scattering off the nucleon at low energies / S. Scherer, A. Yu Korchin, J. H. Koch // *Phys. Rev.* – C 54. – 1996. – P. 904–919.

3 Levchuk, M. I. Gyration nucleon as one of the characteristics of its electromagnetic structure / M. I. Levchuk, L. G. Moroz // *Vesti AN BSSR Ser.: fiz.-mat. nauk.* – 1985. – № 1. – P. 45–54.

4 Lvov, A. J. Dispersion Theory of Proton Compton Scattering in the First and Second Resonance Regions / A. J. Lvov, V. A. Petrun'kin // *Phys. Rev.* – Vol. 55C. – 1997. – P. 359–377.

5 Hutt, M.-Th. Compton Scattering by Nuclei / M.-Th. Hutt, A. J. L'vov, A. J. Milstein, M. Schumacher // *Physics Reports*. – Vol. 323, № 6. – 2000. – P. 458–595.

6 Maksimenko, N. V. Phenomenological description polarizabilities of elementary particles in a field-theory / N. V. Maksimenko, L. G. Moroz // *Proceedings of the XI International young scientists school on high energy physics and relativistic nuclear physics. D2-11707, JINR, Dubna.* – 1979. – P. 533–543.

7 Carlson, C. E. Constraining off-shell effects using low-energy Compton Scattering / C. E. Carlson, M. Vanderhaeghen [Electronic resource]. – 2011. – Mode of access: <http://physics.atom-ph/1109.3779>. – Date of access: 04.10.2011.

8 Krupina, N. Separation of proton polarizabilities with the beam asymmetry of Compton scattering / N. Krupina, V. Pascalutsa // *Phys. Rev. Lett.* – Vol. 110, № 26. – 2013. – P. 262001-1-4.

9 Belousova, S. A. Description of the spin polarizabilities of hadrons based on the covariant Lagrangian / S. A. Belousova, N. V. Maksimenko // *Proc. Of "OFTHEP 2000"*. – Tver, Russia. – 2000. – P. 305–308. – arXiv: hep-ph/0009334.

10 Maksimenko, N. V. The electromagnetic characteristics of hadrons in the covariant Lagrangian approach / N. V. Maksimenko, O. M. Deryuzhkova, S. A. Lukashevich. // *Proc. Of International School-Seminar "Actual Problems of Particles Physics"*. – Dubna. – 2002. – Vol. II. – P. 145–156.

11 Андреев, В. В. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевого подходе / В. В. Андреев, Н. В. Максименко // *Проблемы физики, математики и техники.* – №4(9). – 2011. – С. 7–11.

12 Ilyichew, A. Static Polarizability vertex and It's Application / A. Ilyichew, S. Lukashevich, N. Maksimenko. – arXiv: hep-ph/0611327v1.

13 Zang, Y. Proton Compton scattering in a unified proton- Δ^+ Model / Y. Zang, K. Savvidy // *Phys. Rev. C.* – Vol. 88. – 2013. – P. 064614-1-12.

14 Delgado-Acosta, E. G. / Second order formalism for spin $\frac{1}{2}$ fermions and Compton scattering / E. G. Delgado-Acosta, Mauro Napsucuale, Simon Rodriguez. – arXiv: 1012.4130[hep-ph]. Phys. Rev. – Vol. D83. – 2011. – P. 073001.

15 Feinberg, G. Spin-dependent two-photon-exchange forces: Spin-0 particle and charged spin- particle / G. Feinberg, J. Sucher // Phys. Rev. – Vol. D 45, № 7. – 1992. – P. 2493–2517.

16 Ициксон, К. Квантовая теория поля / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер // Москва : Мир. – Т. 1. – 1984. – 448 с.

17 Andreev, V. V. / Covariant equations of motion of a spin $\frac{1}{2}$ particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities / V. V. Andreev, O. M. Deryuzhkova, N. V. Maksimenko // Russian Physics Journal. – Vol. 56, № 9. – 2014. – P. 1069–1075.

Г. С. Митюрин¹, В. П. Вежновец²

¹г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины,

²г. Речица, СООО «СинерджиКом»

НЕРАЗРУШАЮЩИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА МОДЕЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИНГИБИРУЮЩИХ СВОЙСТВ БУРОВЫХ РАСТВОРОВ МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОЙ ФОТОАКУСТИЧЕСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Осыпи и обвалы глинистых пород, слагающих стенки скважины, являются одним из основных видов осложнений, возникающих при бурении глубоких скважин. Для уменьшения рисков возникновения осложнений применяются ингибирующие буровые растворы на водной основе, основная задача которых – обеспечить устойчивость стенок скважины на время, достаточное для строительства и проведения исследований в открытом стволе. Для оценки ингибирующих свойств буровых растворов применяются модельные образцы в виде таблеток, спрессованных из глинопорошка либо буровых шламов, от качества подготовки которых зависит качество сравнения различных рецептур. Оцениваемым свойством является коэффициент линейного набухания глин или глинопорошков в среде бурового раствора.

Существует три основных методики оценки линейного набухания глин, применяемые на практике – метод Жигача-Ярова [1] и метод измерения динамического линейного набухания глинистых пород OFITE [2] и Fann [3].

По методу Жигача-Ярова на дно измерительного цилиндра укладывают кружок фильтровальной бумаги диаметром 24,8 мм, на котором ровным слоем размещают навеску глины (глинопорошка), высушенную до постоянной массы при температуре 105 °С и измельченную до размера частиц, проходящих через сито с номинальным размером ячейки 0,1 мм, массой 1 г и покрывают сверху кружком фильтровальной бумаги. Далее при помощи ручного пресса производят уплотнение глины до получения стабильных показателей деформации образца с точностью до 0,001 мм [1].

Рекомендации по подготовке образцов для измерений по методу OFITE сводятся к тому, что навеску глины (глинопорошка) массой 10–20 г прессуют под давлением 6000 psi (41,4 МПа) в течении 30 мин [2].

В инструкции к тестеру линейного набухания Fann рекомендован следующий порядок подготовки образцов. Навеску глины (глинопорошка) массой 25 г измельчают и просеивают через сито с номинальным размером ячейки 0,075 мм, высушивают при температуре 105 °С либо увлажняют деионизированной водой до влажности 5 %. Далее образец массой 20 г при помощи ручного пресса уплотняют при давлении 10000 psi (68,9 МПа) в течении 90 мин [3].

Основным недостатком вышеприведенных методик является отсутствие учета геологических условий литогенеза пород – их образование происходит путем уплотнения и дегидратации влажного осадка. В основе данных процессов лежит ряд взаимосвязанных

явлений: старение алюмокремниевых гелей, агградация глинистых минералов, изменение состава порового раствора и обменного комплекса, преобразование органического вещества, синерезис и др. [4].

Отсутствие привязки состояния модели к состоянию горной породы в естественном залегании приводит к следующим недостаткам при определении ингибирующих свойств буровых растворов: несоответствие скоростей и механизмов смачивания породы (для высушенных образцов будет характерен фильтрационный и капиллярно-диффузионный характер смачивания, для реальной породы – капиллярно-диффузионный и осмотический), несоответствие типа контактов между частицами породы (для высушенных образцов глин основным будет механическое сцепление, для реальной породы – коагуляционные и фазовые), слабо развитый двойной электрический слой у высушенных образцов и др. [5, 6].

Для учета данных факторов Аль-Авадом и Смартон [7] предложена следующая методика формирования образцов. Изначально по результатам геофизических исследований определяется плотность глинистой породы в естественном залегании. Навеску глинистой породы измельчают, высушивают до постоянной массы при 105 °С и просеивают через сито с номинальным диаметром ячейки 0,075 мм. Далее проводят определение оптимальной влажности породы по методике, аналогичной ГОСТ 22733-2002 [8]. Оптимальная влажность – значение влажности горной породы, соответствующее максимальной плотности сухой горной породы. Увлажненную до оптимальной влажности навеску уплотняют при помощи ручного пресса до плотности, соответствующей плотности пород в естественном залегании.

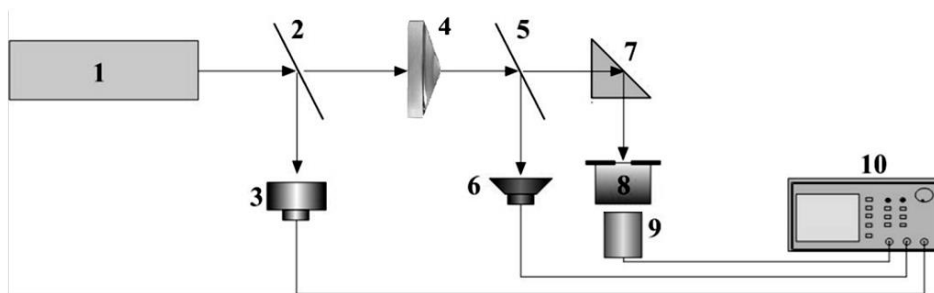
Данная методика позволяет обеспечить формирование модельного образца, по характеристикам близкого к породам в естественном залегании. Недостатком данной методики является невозможность контроля качества образцов при массовом производстве испытаний, что неизбежно приводит к появлению погрешностей при лабораторном определении ингибирующих свойств буровых растворов.

Для устранения данных недостатков авторами предложена методика неразрушающего контроля качества модельных образцов для оценки ингибирующих свойств буровых растворов, основанная на методах лазерной фотоакустической спектроскопии. Контролируемым параметром в данной методике является скорость продольных упругих волн V_L , которая зависит от вещественного состава, характера структурных связей и фазового состава исследуемых горных пород, а также связана с их упругими, деформационными, прочностными, плотностными и фильтрационными характеристиками [9]. Наличие данных видов связи позволяет говорить о скорости продольных упругих волн, как о комплексном параметре, зависящем от характера структурных связей, фазового состава, и ряда характеристик, постоянство которых для модельных образцов важно при массовом производстве испытаний ингибирующих буровых растворов.

В данной работе для определения скорости продольных звуковых волн использована схема установки, аналогичная примененной в исследовании емкостных и прочностных характеристик образцов горных пород [10].

В целях лазерного импульсного возбуждения ультразвука использовалось излучение YAG:Nd+3 лазера модели LS-2134У, генерирующего в режиме модулируемой добротности на длине волны 1064 нм и на частоте второй гармоники (532 нм) – с энергией в импульсе порядка 15÷20 мДж при длительности импульсов около 10 нс и частоте следования импульсов 10÷12 Гц. Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 1.

Регистрация возбуждаемых акустических импульсов осуществлялась пьезопреобразователем на основе поляризованной керамики 115 ЦТС-5, толщиной 0,2 мм, который работал без усилителя с максимальной частотой 15 МГц. В указанных целях использовался также широкополосный пьезоприемник на основе ПВДФ-пленки толщиной 25 мкм с предварительным усилителем, работающим в режиме «холостого хода», ограничивающим рабочую полосу частот сверху частотой 15 МГц. Сигнал с пьезопреобразователя регистрировался цифровым двухканальным осциллографом типа TektronixTDS220 с аналоговой полосой 60 МГц при частоте дискретизации 1 ГГц. Для регистрации времени воздействия лазерного импульса на поверхность модельного образца использовался фотодиод Hamamatsu S5971-1.



1 – лазер; 2 – делительная пластина; 3 – фотодиод; 4 – аксикон;
 5 – делительная пластина; 6 – измеритель плотности лазерной энергии;
 7 – стеклянная поворотная призма; 8 – исследуемый образец керна;
 9 – пьезоэлектрический преобразователь; 10 – цифровой осциллограф

Рисунок 1 – Схема лазерной импульсной фотоакустической спектроскопии

Выполнены исследования для образцов массой 8 г, спрессованных из бентонитового глинопоршка ПБМВ при исходной влажности 12 %, 18 %, 21 % и 22,5 %. Уплотнение глинопоршка проводилось при давлении 90 МПа в течении 30 мин.

Для образцов с исходной влажностью глинопоршка 12 % и 18 % акустический сигнал получен не был, что связано со слабыми структурными связями в породе.

Для образцов с исходной влажностью глинопоршка 21 % (образцы № 1, 2, 3) и 22,5 % (образцы № 4, 5) получен устойчивый фотоакустический сигнал (рисунок 2), найденные скорости продольных волн указаны в таблице 1.

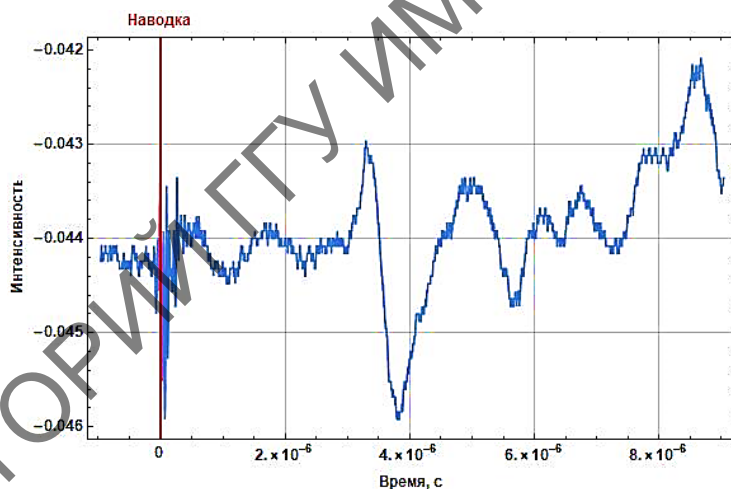


Рисунок 2 – Профиль акустического импульса гауссового светового пучка для образца № 4

Таблица 1 – Результаты определения скоростей продольных волн

№ образца	1	2	3	4	5
Скорость продольной волны V_L , км/с	1,63	1,64	1,68	1,24	1,22

По результатам исследований можно отметить необходимость внедрения технологического контроля качества модельных образцов для уменьшения погрешности при сравнении различных рецептур ингибирующих буровых растворов. Предложенная технология позволяет провести быстрый контроль качества образцов непосредственно перед оценкой линейного набухания глин, тем самым существенно уменьшив погрешность массовых испытаний новых рецептур буровых растворов.

Список использованных источников

- 1 Стандарт организации. Буровые растворы. Методика выполнения измерений коэффициента набухания глин и глинопорошков : СТО Газпром 2-3.2-020-2005. – Взамен РД 00158758-20-98; введ. 01.08.2005. – Москва : ООО «ТюменНИИгипрогаз», 2005. – 16 с.
- 2 Dynamic Linear Swell Meter with Compactor: Instruction Manual; updated 28.06.2018. – Houston, Texas : OFI Testing Equipment, Inc., 2015. – 28 p.
- 3 Linear Swell Meter, Model 2100: Instruction Manual. – Houston, Texas : Fann Instrument Co., 2018. – 77 p.
- 4 Осипов, В. И. Микроструктура глинистых пород / В. И. Осипов, В. Н. Соколов, Н. А. Румянцева – Москва : Недра, 1989. – 211 с.
- 5 Осипов, В. И. Глины и их свойства. Состав, строение и формирование свойств / В. И. Осипов, В. Н. Соколов. – Москва : ГЕОС, 2013. – 578 с.
- 6 Королев, В. А. Термодинамика грунтов: учеб. пособие / В. А. Королев. – Москва : МГУ, 1997. – 168 с.
- 7 Al-Awad, Musaed N. J. Characterization of Shale-Drilling Fluid Interaction Mechanisms Related to Wellbore Instability / Musaed N. J. Al-Awad, B. G. D. Smart // J. King Saud Univ., Vol. 8, Eng. Sci (2). – Riyadh, 1996. – P. 187–215.
- 8 Грунты. Метод лабораторного определения максимальной плотности (с Поправкой): ГОСТ 22733-2016. – Взамен ГОСТ 22733-2002; введ. РБ 01.11.2017. – Москва : ОАО «ПНИИС», 2016. – 18 с.
- 9 Применение сейсмоакустических методов в гидрогеологии и инженерной геологии / Мин-во геол. СССР; Всесоюз. науч.-исслед. ин-т. гидрогеол. и инж. геол. ; ред. Н. Н. Горяинов. – Москва : Недра, 1992. – 264 с.
- 10 Определение емкостных и прочностных характеристик образцов горных пород (кернов) методом импульсной лазерной фотоакустической спектроскопии / Г.С. Митюрин [и др.] // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам: материалы XII Междунар. науч.-практ. конф., Мозырь, 5–6 марта 2020 г.: в 2 ч. / Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина; редкол. И. Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь, 2020. – С. 169–171.

Г. С. Митюрин¹, Е. И. Горбачёв²

¹г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины,

²г. Солигорск, ОАО «Беларуськалий»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕМКОСТНЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРТЛАНДЦЕМЕНТОВ ПЦТ П-50 МЕТОДОМ ИМПУЛЬСНОЙ ЛАЗЕРНОЙ ФОТОАКУСТИЧЕСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

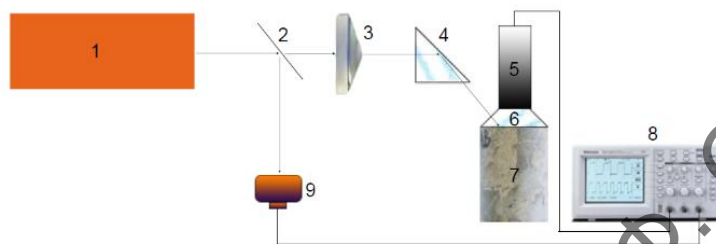
Введение. В настоящее время важное значение имеет использование методов технической диагностики цементных растворов с целью определения их физических свойств. В качестве тампонажных цементов используют портландцемент ПЦТ П-50. Физические характеристики портландцементов, такие как пористость, прочность, фильтрационная способность, после затвердевания, играют важную роль в сохранении металлических труб от коррозии и в предотвращении смешивания нефти и газа с различных горизонтов.

Лазерная оптоакустика позволяет проводить неразрушающую экспресс-диагностику твёрдых и жидких тел с высоким пространственным разрешением [1]. Для определения пористости портландцемента, был предложен ультразвуковой эхо-метод с использованием импульсного лазерного возбуждения ультразвуковых колебаний [2–4]. Метод основан на распространении упругих колебаний в твёрдом образце и приёме отражённых акустических импульсов.

Цель нашей работы – исследование возможностей лазерной фотоакустической спектроскопии при изучении портландцементов с различной пористостью, фильтрационными и прочностными свойствами цемента.

Экспериментальная установка. Портландцемент для изучения был представлен РУП ПО «Белоруснефть».

Лазерная установка включает в себя импульсный Nd:YAG-лазер для возбуждения упругих колебаний в образце, пьезоприёмник для регистрации широкополосных акустических сигналов, цифровой осциллограф марки TektronixTDS220 для вывода сигнала на экран. Возбуждение бесселевых световых пучков осуществлялось путём падения гауссового светового пучка на аксикон с углом конусности $\alpha=1$. Схема установки изображена на рисунке 1.



- 1 – лазер; 2 – делительная пластина; 3 – аксикон; 4 – поворотное зеркало;
5 – пьезоэлектрический преобразователь; 6 – стеклянная призма;
7 – исследуемый образец; 8 – цифровой осциллограф; 9 – фотодиод

Рисунок 1 – Схема лазерной импульсной фотоакустической спектроскопии

Теоретическое рассмотрение. Определение пористости методом отражения заключается в хорошей корреляционной связи между объёмной пористостью (V_n) и нормированной величиной энергии (W_n) структурного шума [5]:

$$V_n = \varphi(W_n), \quad (1)$$

где φ – корреляционная функция, W_n – нормированная энергия структурного шума.

Нормированная энергия структурного шума (W_n) рассчитывается с использованием компьютерной программы по спектрам зондирующего импульса и импульсов, рассеянных в обратном направлении [5]:

$$W_n = \frac{\int_{f_{min}}^{f_{max}} [S(f) - S_0(f)]^2 df}{\int_{f_{min}}^{f_{max}} S_0^2(f) df}, \quad (2)$$

где f – частота; f_{min} и f_{max} – граничные частоты рабочего диапазона, в котором наблюдается структурный шум.

Аксикон в лазерной установке служит для более эффективного создания в цементном образце поперечных упругих колебаний, величины которых используются для расчёта прочностных характеристик, таких как модуль сдвига, коэффициент Пуассона, модуль Юнга, коэффициент всестороннего объёмного сжатия.

Определение упругих модулей портландцемента проводилось по следующим формулам (3)–(6).

Модуль сдвига G :

$$G = \rho \vartheta_t^2, \quad (3)$$

где ρ – плотность породы, ϑ_t – скорость поперечных упругих колебаний.

Коэффициент Пуассона μ :

$$\mu = \frac{1-0,5(\vartheta_l/\vartheta_t)^2}{1-(\vartheta_l/\vartheta_t)^2}, \quad (4)$$

где ϑ_l и ϑ_t – скорости продольных и поперечных упругих колебаний соответственно.

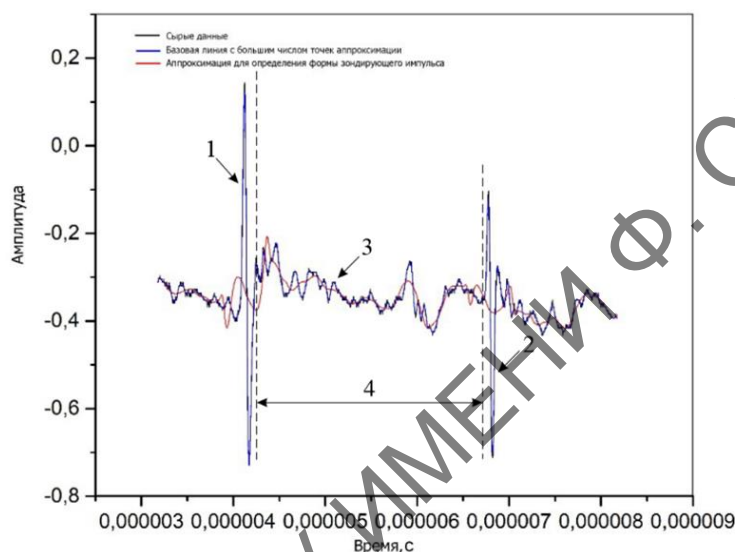
Модуль Юнга E :

$$E = 2G(1 + \mu), \quad (5)$$

Модуль объёмной упругости K (коэффициент всестороннего сжатия):

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (6)$$

Экспериментальные результаты и их обсуждение. На рисунке 2 приведена форма акустического сигнала, регистрируемая в методе отражения.



- 1 – сигнал, отражённый от поверхности цементного образца; 2 – донный импульс – сигнал, отражённый от противоположной стороны цементного образца;
3 – структурный шум; 4 – рабочий участок временного трека, на котором определяют нормированную энергию (W_n) структурного шума

Рисунок 2 – Временной трек сигналов при прохождении по цементу

Объёмная пористость хорошо коррелируется квадратичной функцией с нормированной энергией (W_n) структурного шума:

$$V_n = a_1 W_n^2 + a_2 W_n + a_3, \quad (7)$$

где a_1, a_2, a_3 – коэффициенты квадратичного полинома.

Коэффициенты квадратичного полинома были получены эмпирически, путём аппроксимации. Поскольку изучение портландцементов проводилось впервые методом лазерной оптоакустики, то искалась в первую очередь литология, которая будет схожа по своим свойствам с цементом. Наиболее схожий с цементом оказался известняк.

Таблица 1 – Коэффициенты $a_{1,2,3}$ для известняка

Литология	№ образца	Толщина, мм	Модуль сдвига, Па 10^9	Коэффициент Пуассона	Модуль Юнга, Па 10^9	Коэффициент всестороннего сжатия, Па 10^9
Цемент	Тек47	10	9,522	0,095	20,85	8,58
	Тек48	10	9,193	0,100	20,22	8,42

Зная коэффициенты, можно подставить их в выражение (3) и получить объёмную пористость для цемента. Результаты определения пористости представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты определения пористости цемента

Литология	Коэффициенты		
	a_1	a_2	a_3
Известняк	$-4 \cdot 10^{-13}$	$-5 \cdot 10^{-6}$	4,8314

Для определения прочностных характеристик, делались замеры продольных и поперечных скоростей в цементных образцах таблица 3

Таблица 3 – Скорости распространения упругих колебаний в образцах керна

Литология	№ образца	Толщина, мм	Пористость методом отражения, %
Цемент	Тек49	10	4,49
	Тек50	10	4,6

На основании результатов, представленных в таблице 3, можно рассчитать прочностных характеристики подставив скорости распространения упругих колебаний в уравнения 3, 4, 5, 6. Результаты представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Результаты определения прочностных параметров портландцементов

Литология	№ образца	Толщина, мм	Время, мкс
Цемент	Тек47	10	3,21
	Тек48	10	3,27

Заключение. Таким образом, проведены экспериментальные изыскания по определению емкостных и прочностных характеристик образцов портландцементов, методом импульсной оптоакустики, при лазерном возбуждения в цементе ультразвуковых упругих колебаний. Измеренные прочностные характеристики соответствуют стандартам и могут в дальнейшем использоваться для более подробных исследований портландцемента. Данный метод определения прочностных и емкостных свойств твёрдых образцов менее затратный по времени, и может значительно увеличить продуктивность исследования, что в свою очередь позволит повысить скорость других смежных производственных процессов без потери в качестве.

Список использованных источников

- 1 Гусев, В. Э. Лазерная оптоакустика / В. Э. Гусев, А. А. Карабутов. – Москва : Наука, 1991. – 304 с.
- 2 Kablov, E. Diagnostics of Polymer Composites by Acoustic Methods / E. Kablov, V. Murashov, A. Rumyantsev // Ultrasounds. Kaunas: Technologija. – 2006. – № 2. – P. 7–10.
- 3 Способ определения физико-механических характеристик полимерных композиционных материалов и устройство для его осуществления : пат. RU 2214590 / Е. Н. Каблов, Г. М. Гуняев, А. А. Карабутов, В. В. Мурашов, И. М. Пеливанов, Н. Б. Подымова, А. Ф. Румянцев. – Опубл. 20.10.03.
- 4 Способ определения физико-механических характеристик и состава полимерных композиционных материалов в конструкциях ультразвуковым методом: RU 2196982 / Е. Н. Каблов, В. В. Мурашов, А. Ф. Румянцев, Г. М. Гуняев, А. П. Тищенко, М. П. Уральский. – Опубл. 20.01.03.

5 Мурашов, В. В. Определение пористости в монолитных конструкциях из углепластиков ультразвуковым эхо-методом с использованием лазерного возбуждения ультразвуковых колебаний / В. В. Мурашов, А. С. Бойчук, В. Ю. Чертищев, И. А. Диков // Труды ВИАМ. – 2016. – Т. 48, № 12. – С. 74–82.

М. Н. Невмержицкий^{1,2}, Р. Г. Шуляковский¹

¹г. Минск, Институт прикладной физики НАН Беларуси,

²г. Минск, Институт физики НАН Беларуси

О ПОЛНОМ СЕЧЕНИИ РЕАКЦИИ ФОТОРОЖДЕНИЯ π^- -МЕЗОНОВ НА ДЕЙТРОНЕ В ОБЛАСТИ ПОРОГОВЫХ ЭНЕРГИЙ

Вследствие отсутствия свободной плотной нейтронной мишени реакции на ядре, прежде всего – на дейтроне, служат основным источником сведений о нейтроне и об «элементарных» амплитудах взаимодействия на нем. Богатая информация о структуре нуклона может быть извлечена в реакции фоторождения пионов на нуклонах. Неудивительно, что этот процесс привлекает пристальное внимание как теоретиков, так и экспериментаторов уже в течение многих десятилетий. Отметим, что знание амплитуд фоторождения пионов на нуклоне имеет большое значение при интерпретации данных по фоторождению пионов на ядрах. Детальное обсуждение фоторождения пионов на нуклоне и лёгких ядрах можно найти в известном обзоре [1].

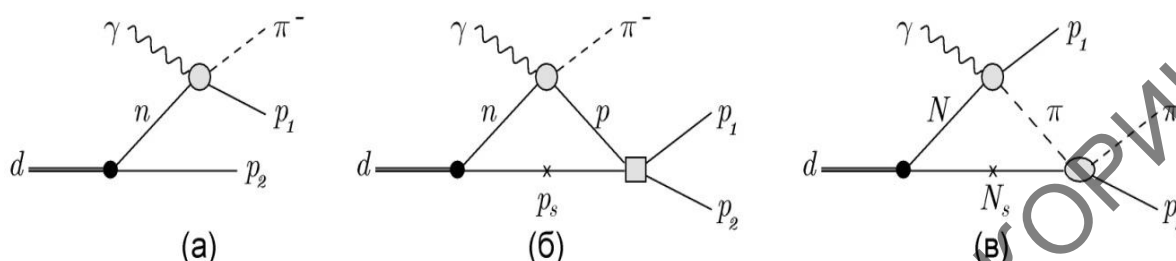
Теоретические предсказания хорошо согласуются с измеренными сечениями по когерентному фоторождению нейтральных пионов на дейтроне, $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$, которые были получены на установке МАМІ [2, 3]. Однако в случае некогерентной реакции $\gamma d \rightarrow \pi NN$ есть заметные расхождения между предсказываемыми всеми имеющимися моделями и измеренными сечениями, особенно в окрестности Δ -пика и для канала с фоторождением нейтральных π^0 -мезонов (см., например, работу [4]).

Практически все имеющиеся данные по реакции $\gamma d \rightarrow \pi NN$ относятся к области энергий $E_\gamma > 200$ МэВ. Только в одном эксперименте измерялось полное сечение реакции $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$ при энергиях до 22 МэВ выше порога [5]. Недавно были выполнены первые измерения полного сечения реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$ в пороговой области энергий $E_\gamma < 160$ МэВ [6]. В этой же работе приведены предсказания теоретической модели В. Е. Тарасова и др. [7]. Оказалось, что при энергиях от 147 МэВ до 157 МэВ в пределах неопределенностей модель удовлетворительно описывает полученные данные. Однако выше 157 МэВ теоретические предсказания заметно превышают измеренные значения. Возможные причины расхождения подробно обсуждаются в работе [6]. Авторы считают, что одной из причин является неучёт энергетической зависимости доминирующего мультиплета E_{0+} в реакции фоторождения заряженных π -мезонов на нуклонах при пороговых энергиях. Вторая причина может состоять в том, что в модели [6] при расчете амплитуды элементарной реакции $\gamma n \rightarrow \pi^- p$ учитывается только вклад s -волны. Но при энергиях примерно на 10 МэВ выше порога и другие волны (p и d) могут давать заметный вклад.

Наша модель основана на использовании диаграммного подхода. Были учтены вклады от диаграмм, изображенных на рисунке 1. Все детали расчетов диаграмм можно найти в работах [4, 8].

При расчёте диаграмм требуется знание дейтронной волновой функции. Она бралась для известного CD-Vonn нуклон-нуклонного потенциала [9]. Во всех диаграммах нужна элементарная амплитуда фоторождения пионов на нуклоне $\gamma N \rightarrow \pi N$. Для описа-

ния этой реакции нами была использована модель MAID07 [10], которая хорошо воспроизводит многочисленные данные как в случае неполяризованных, так и поляризованных частиц. При расчете диаграммы 1(б) требуется знание амплитуды pp -рассеяния. Последняя была получена путем решения интегрального уравнения Липпмана-Швингера для CD-Vonn потенциала. Нами были учтены все парциальные волны с полным моментом $J \leq 4$, а не только s - волна, как это делалось в работе [6].



(а) – плосковолновое импульсное приближение (ПВИП), (б) и (в) – ПВИП с pp - и πN -взаимодействиями в конечном состоянии (ВКС), соответственно. Диаграммы с перестановкой $1 \leftrightarrow 2$ подразумеваются. Символ \times означает, что нуклон-спектатор N_s находится на массовой поверхности

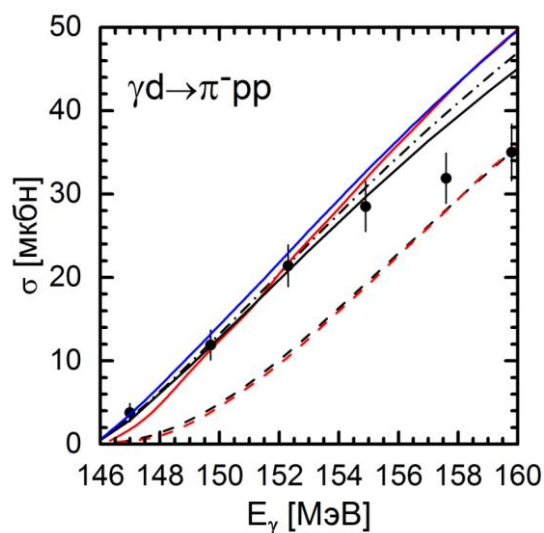
Рисунок 1 – Диаграммное представление амплитуды реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$

Наконец, при расчете диаграммы, изображенной на рисунке 1(в), необходима амплитуда πN -рассеяния. Она была получена решением уравнения Липпмана-Швингера для сепарабельного потенциала, построенного в работе [11]. В амплитуде учитывалось 10 парциальных волн, включая, конечно, и s -волны. Построенная модель хорошо описывает экспериментальные данные, «аккумулярованные» в парциальных анализах, которые можно найти, например, в работе [12].

Таким образом, в отличие от работы [6], в амплитудах NN - и πN -рассеяния нами были учтены все необходимые в данной области энергий парциальные волны, а не только s -волны. Отметим также, что в нашем расчете зависимость этих амплитуд от энергии учитывается автоматически.

Результаты данной работы, их сравнение с предсказаниями других моделей и экспериментальными данными показаны на рисунке 2. Можно видеть идеальное согласие наших расчетов и расчетов работы [6] в ПВИП. Полные расчеты в разных моделях немного различаются, но две экспериментальные точки при 158 и 160 МэВ находятся заметно ниже теоретических предсказаний всех подходов. У нас нет объяснений для указанного расхождения. Решение проблемы требует дополнительного исследования.

Следует отметить, что в работе [5] изучалась реакция $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$ также в пороговой области энергий. Поскольку элементарные амплитуды реакций $\gamma n \rightarrow \pi^- p$ и $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ при таких энергиях очень близки по величине и отличаются только знаком, то можно было бы ожидать, что поведение полных сечений реакций $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$ и $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$ тоже должно быть очень похожим. Однако измеренное в работе [5] поведение полного сечения реакции $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$ не согласуется с показанным на рисунке 2 для канала $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$. Это поведение оказывается аналогичным предсказаниям полных расчетов из рисунка 2.



Штрихованные кривые – ПВИП, штрихпунктирная кривая – ПВИП+pp-ВКС, сплошная кривая – полный расчет [13]. Красные кривые – соответствующие результаты работы [6]. Синяя кривая – полный расчет работы [14]. Экспериментальные данные работы [6]

Рисунок 2 – Полное сечение реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$ в пороговой области энергий

Авторы выражают признательность Е. М. Дарвишу, Е. С. Кокоулиной и М. И. Левчуку за многочисленные полезные обсуждения. Работа частично поддержана грантом БРФФИ Ф18Д-010 «Поиск новых явлений в ядерных взаимодействиях на детекторе VM@N ускорителя «Нуклотрон»».

Список использованных источников

- 1 Laget, J. M. Pion photoproduction on few body systems / J. M. Laget // Phys. Rep. – 1981. – Vol. 69, № 1. – P. 1–84.
- 2 Single and double π^0 photoproduction from the deuteron / B. Krusche [et al.] // Eur. Phys. J. A – 1999. – Vol. 6, iss. 3. – P. 309–324.
- 3 Coherent and incoherent π^0 -photoproduction from the deuteron / U. Siodlaczek [et al.] // Eur. Phys. J. A – 2001. – Vol. 10, № 3. – P. 365–371.
- 4 Incoherent pion photoproduction on the deuteron in the first resonance region / M. I. Levchuk [et al.] // Phys. Rev. C – 2006. – Vol. 74, № 1. – P. 014004(20).
- 5 ${}^2\text{H}(\gamma, \pi^+)nn$ total cross section from threshold to $\Delta E=22$ MeV / E. C. Booth [et al.] // Phys. Rev. C – 1979. – Vol. 20, № 4. – P. 1217–1220.
- 6 Near-threshold π^- photoproduction on the deuteron [Electronic recourse] / B. Strandberg [et al.] // Repository of e-prints arxiv.org. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1812.03023>. – Date of access: 14.11.2019.
- 7 Extracting the photoproduction cross sections off the neutron, via the $\gamma n \rightarrow \pi^- p$ reaction, from deuteron data with final-state interaction effects / V. E. Tarasov [et al.] // Phys. Rev. C – 2011. – Vol. 84, iss. 3. – P. 035203(14).
- 8 Levchuk, M.I. Helicity-dependent reaction $\vec{\gamma} \vec{d} \rightarrow \pi NN$ and its contribution to the Gerasimov-Drell-Hearn sum rule for the deuteron / M. I. Levchuk // Phys. Rev. C – 2010. – Vol. 82, № 4. – P. 044002(13).
- 9 Machleidt, R. High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential / R. Machleidt // Phys. Rev. C – 2001. – Vol. 63, № 2. – P. 024001(32).
- 10 A unitary isobar model for pion photo- and electroproduction on the proton up to 1 GeV / D. Drechsel [et al.] // Nucl. Phys. A – 1999. – Vol. 645, iss. 1. – P. 145–174.

11 Nozawa, S. A dynamical model of pion photoproduction on the nucleon / S. Nozawa, B. Blankleider, T. S. H. Lee // Nucl. Phys. A – 1990. – Vol. 513, iss. 3–4. – P. 459–510.

12 Parametrization dependence of T -matrix poles and eigenphases from a fit to πN elastic scattering data / R. L. Workman [et al.] // Phys. Rev. C – 2012. – Vol. 86, iss. 3. – P. 035202(6).

13 Левчук, М. И. О полном сечении реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$ в пороговой области энергий / М. И. Левчук, М. Н. Невмержицкий, Р. Г. Шуляковский // Доклады НАН Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 2. – С. 159–163.

14 Near-threshold incoherent pion photoproduction on the deuteron with final-state interaction effects / E. M. Darwish [et al.] // Annals of Physics – 2019. – Vol. 411. – 167990(26).

А. И. Толкачёв, А. А. Шамына, В. Н. Капшай

г. Гомель, ГТУ имени Ф. Скорины

ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ПОЛЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ОТ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ БОЛЬШОЙ ВЫСОТЫ

Введение. Генерация второй гармоники (ГВГ) от двумерных объектов занимает важное место среди нелинейных оптических явлений. ГВГ может использоваться для экспериментального исследования двумерных объектов, таких как тонкие плёнки, границы раздела, поверхности частиц. Преимущество именно этого явления заключается в том, что благодаря мгновенному отклику можно с минимальной задержкой получать информацию также о динамических свойствах наночастиц.

Данная работа посвящена графическому анализу распределения поля второй гармоники, генерируемого от боковой поверхности диэлектрической цилиндрической частицы большой высоты, при варьировании эллиптичности падающей волны и ее азимута поляризации.

1 Постановка задачи. Пусть цилиндрическая частица радиусом основания a и высотой h ($a \ll h$) покрыта слоем оптически нелинейного вещества толщины d_0 ($d_0 \ll a$). Расположим её так, чтобы ось цилиндра совпадала с осью Oz декартовой и цилиндрической систем координат, а геометрический центр находился в начале координат (рисунок 1, а).

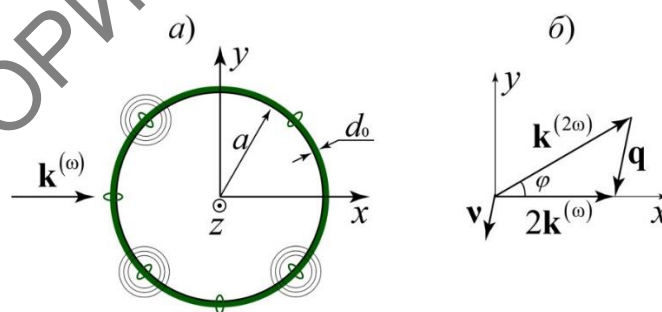


Рисунок 1 – (а) Схема задачи о ГВГ от поверхности цилиндрической частицы большой высоты, (б) схема используемых векторов

Рассмотрим нормальное к оси симметрии падение на боковую поверхность цилиндрической частицы плоской электромагнитной волны, вектор электрической напряженности которой определим следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(\omega)}(\mathbf{x}, t) = E_0 \mathbf{e}^{(\omega)} \exp(i\mathbf{k}^{(\omega)} \mathbf{x} - i\omega t), \quad (1)$$

где E_0 – ее комплексная амплитуда, $\mathbf{e}^{(\omega)}$ – единичный комплексный вектор поляризации, $\mathbf{k}^{(\omega)}$ – волновой вектор (рис. 1, а).

ГВГ обусловлена нелинейным слагаемым вектора поляризации среды:

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} E_j^{(\omega)} E_k^{(\omega)}, \quad (2)$$

где $\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (n_j \delta_{ik} + n_k \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} n_m (n_k \varepsilon_{ijm} + n_j \varepsilon_{ikm})$.

Здесь $\chi_{ijk}^{(2)}$ – тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка, n_i – компоненты вектора нормали \mathbf{n} к поверхности, δ_{ij} – дельта-символ Кронекера, ε_{ijk} – символ Леви-Чивита; $i, j, k = x, y, z$. В дальнейшем под типом анизотропии $\chi_i^{(2)}$ подразумеваются значения независимых компонент тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ $\chi_i^{(2)} = 1, \chi_j^{(2)}|_{j \neq i} = 0$.

При нормальном падении исходной волны излучение генерируется преимущественно в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра [1, с. 728]. Поэтому в данной работе рассматривается генерация в плоскости Oxy .

2 Решение задачи. Проводя рассуждения аналогично работе [1, с. 727], напряженность электрического поля второй гармоники, генерируемого от боковой поверхности цилиндрической частицы, в предельном случае $a=h$ в дальней зоне можно получить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = & 2\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega}\rho)}{c^2} \frac{d_0 a h (1 - \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho)}{\rho} \mathbf{E}_0^2 \times \\ & \times \left(i\chi_1^{(2)} \left\{ -J_3(qa) \mathbf{v} \left(\mathbf{v} \mathbf{e}^{(\omega)} \right)^2 + \frac{1}{4} (J_1(qa) + J_3(qa)) \left[\mathbf{v} \left(\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}^{(\omega)} \right) - \left(\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}_z \right)^2 \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\mathbf{v} \mathbf{e}^{(\omega)} \right) \left(\mathbf{e}^{(\omega)} - \mathbf{e}_z \left(\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}_z \right) \right) \right\} + iJ_1(qa) \left(\chi_2^{(2)} \mathbf{v} \left(\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}^{(\omega)} \right) + 2\chi_3^{(2)} \mathbf{e}^{(\omega)} \left(\mathbf{v} \mathbf{e}^{(\omega)} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \chi_4^{(2)} (J_0(qa) + J_2(qa)) \left[\mathbf{e}^{(\omega)} \times \mathbf{e}_z \right] \left(\mathbf{e}^{(\omega)} \mathbf{e}_z \right) - 2\chi_4^{(2)} J_2(qa) \left[\mathbf{e}^{(\omega)} \times \mathbf{v} \right] \left(\mathbf{v} \mathbf{e}^{(\omega)} \right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}^{(\omega)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}$ – вектор рассеяния (он лежит в плоскости Oxy), $q = |\mathbf{q}|$, \mathbf{v} – единичный вектор вдоль \mathbf{q} , $J_m(qa)$ – цилиндрические функции Бесселя.

В дальней зоне генерируемое излучение имеет вид плоской волны, тогда плотность мощности генерируемого поля можно записать в виде

$$S_\rho^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \frac{c}{8\pi} \frac{n_{2\omega}}{\mu_{2\omega}} \left| \mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) \right|^2. \quad (4)$$

Это выражение позволяет проводить построение диаграмм направленности, характеризующих пространственное распределение плотности мощности излучения второй гармоники (зависимость $S_\rho^{(2\omega)}(\varphi)$ при фиксированном ρ).

3 Явный вид векторов. Не нарушая общности, будем считать, что волновой вектор исходной волны направлен вдоль оси Ox (рисунок 1, а). Схема векторов в задаче представлена на рисунке 1, б. Волновые векторы исходной и генерируемой волн, комплексный вектор поляризации исходной волны в декартовой системе координат имеют аналогично [2, с. 732] вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(\omega)} &= k_\omega \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{k}^{(2\omega)} &= 2k_\omega \xi \left(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \right), \\ \mathbf{e}^{(\omega)} &= \frac{\sin \varphi_{in} - i\sigma \cos \varphi_{in}}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \mathbf{e}_y + \frac{\cos \varphi_{in} + i\sigma \sin \varphi_{in}}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где k_ω – волновое число исходной волны, ξ – показатель дисперсии, определяемый соотношением

$$\xi = \frac{k_{2\omega}}{2k_\omega} = \frac{n_{2\omega}}{n_\omega}, \quad (6)$$

φ_{in} – азимут поляризации исходной волны (угол между большой полуосью эллипса поляризации и осью Oz), σ – величина, характеризующая эллиптичность падающей волны.

Вектор рассеяния \mathbf{q} и его модуль q соответственно равны

$$\mathbf{q} = -2k_\omega \left((\xi \cos \varphi - 1) \mathbf{e}_x + \xi \sin \varphi \mathbf{e}_y \right),$$

$$q = 2k_\omega \sqrt{1 - 2\xi \cos \varphi + \xi^2}. \quad (7)$$

Анализируя выражение (3) для вектора электрической напряженности поля второй гармоники с учетом явного вида всех векторов, можно видеть, что для типов анизотропии $\chi_{1,3,4}^{(2)}$ вектор $\mathbf{E}^{(2\omega)} = 0$ (генерация не происходит) в случае падения линейно поляризованной волны с плоскостью поляризации совпадающей с плоскостью Oxz ($\sigma = 0$, $\varphi_{in} = 0, \pi$). Аналогичная закономерность наблюдается при ГВГ от боковой поверхности диэлектрического цилиндра конечной высоты [3, с. 741].

4 Графический анализ. Рассмотрим падение плоско поляризованной волны на высокий цилиндр с радиусом основания a ($k_0 a = 0.1$), покрытый оптически нелинейным веществом, и исследуем влияние азимута поляризации (угла φ_{in}) на форму диаграмм направленности генерируемого излучения. Нормированные графики распределения генерируемого излучения для типов анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$ и различных углов φ_{in} представлены на рисунке 2. На этих изображениях видно, что для типов анизотропии $\chi_{1,2}^{(2)}$ форма диаграммы направленности не изменяется при варьировании азимута поляризации. Для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ наблюдаются четыре симметричных лепестка при $\varphi_{in} = \pi/2$ (плоскость поляризации совпадает с плоскостью Oxy), которые трансформируются в два лепестка при $\varphi_{in} \leq \pi/4$. Для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ при $\varphi_{in} = \pi/2$ наблюдаются два лепестка, локализованных во второй и третьей четвертях декартовой системы координат. Уменьшение угла φ_{in} от $\pi/2$ до $17\pi/36$ приводит к резкому изменению формы диаграммы направленности: уже при $\varphi_{in} \approx 17\pi/36$ распределение генерируемого излучения имеет вид, представленный на рисунке 2, *г* зеленой линией. Дальнейшее уменьшение φ_{in} до нуля не приводит к изменению формы диаграммы направленности. На рисунке 2 также продемонстрировано свойство отсутствия ГВГ для типов анизотропии $\chi_{1,3,4}^{(2)}$ при $\sigma = 0$, $\varphi_{in} = 0$: только на рисунке 2, *б*, соответствующему типу анизотропии $\chi_2^{(2)}$, изображена диаграмма направленности, соответствующая $\varphi_{in} = 0$ (линия черного цвета).

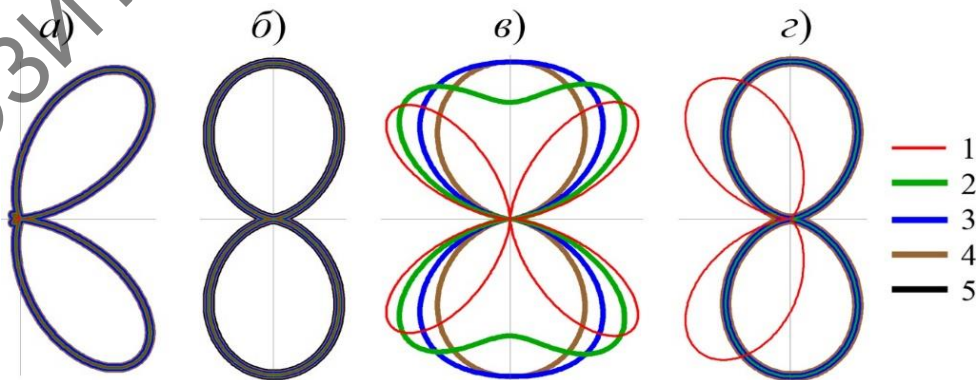


Рисунок 2 – Распределение генерируемого излучения для типов анизотропии:

(а) $\chi_1^{(2)}$, (б) $\chi_2^{(2)}$, (в) $\chi_3^{(2)}$, (г) $\chi_4^{(2)}$. Азимуты поляризации:

(1) $\varphi_{in} = \pi/2$, (2) $\varphi_{in} = \pi/3$, (3) $\varphi_{in} = \pi/4$, (4) $\varphi_{in} = \pi/6$, (5) $\varphi_{in} = 0$

Исследуем влияние эллиптичности падающего излучения на форму распределения излучения второй гармоники при $\varphi_{in} = \pi/2$. На рисунке 3 приведены нормированные диаграммы направленности генерируемого излучения для типов анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$ и различных эллиптичностей σ .

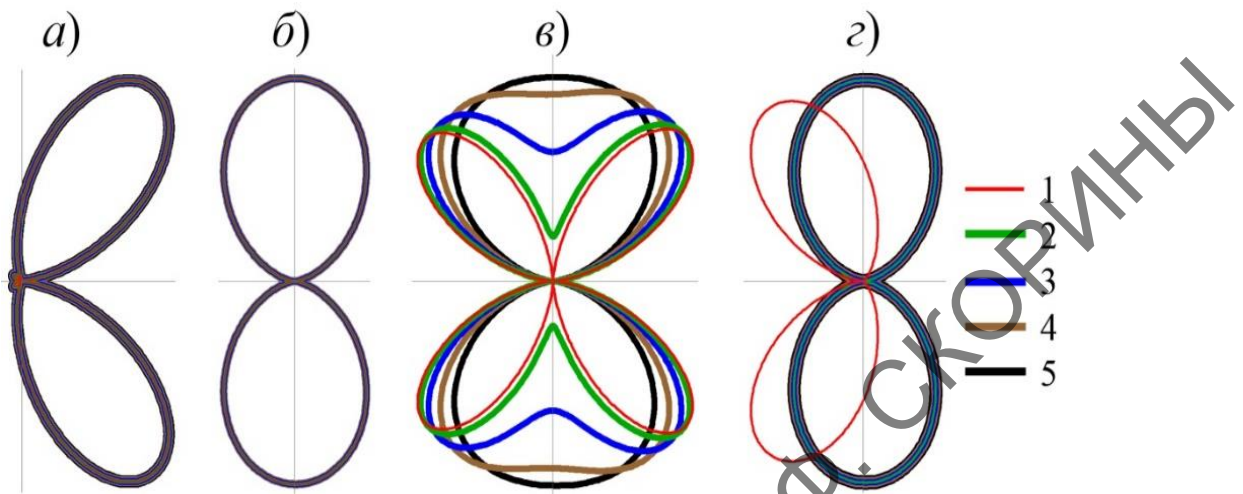


Рисунок 3 – Распределение генерируемого излучения для типов анизотропии:

(а) $\chi_1^{(2)}$, (б) $\chi_2^{(2)}$, (в) $\chi_3^{(2)}$, (з) $\chi_4^{(2)}$. Эллиптичности:
 (1) $\sigma = 0$, (2) $\sigma = 0.25$, (3) $\sigma = 0.5$, (4) $\sigma = 0.75$, (5) $\sigma = 1$

Аналогично предыдущему случаю, для типов анизотропии $\chi_{1,2}^{(2)}$ форма диаграммы направленности остается неизменной. Однако при падении циркулярно поляризованной волны для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ генерация не происходит. Это связано с обращением в ноль слагаемого $(\mathbf{e}^{(o)} \mathbf{e}^{(o)})$. Для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ увеличение эллиптичности от 0 до 1 приводит к постепенному переходу от четырех лепестков к двум. Для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ снова отметим довольно резкое изменение формы диаграммы направленности в области $\sigma \in [0; 0.1]$ от распределения излучения, изображенного красным цветом на рисунке 3, з, до распределения излучения, изображенного зеленым цветом на этом же фрагменте.

Общей закономерностью для всех диаграмм направленности является симметричность распределения генерируемого излучения относительно оси Ox для всех типов анизотропии, что обусловлено симметрией схемы поставленной задачи.

Заключение. Графический анализ пространственного распределения плотности мощности поля второй гармоники, генерируемого от диэлектрической цилиндрической частицы большой высоты, показал, что для типов анизотропии $\chi_{1,2}^{(2)}$ варьирование эллиптичности падающей волны и ее азимута поляризации не приводит к изменению формы диаграммы направленности. Наоборот, для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ изменение данных параметров приводит к плавному изменению формы распределения генерируемого излучения. Для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ обнаружены области параметров φ_{in} и σ , при которых происходит резкая трансформация диаграммы направленности. Анализ явного вида векторов в задаче привел к обнаружению свойства, заключающегося в отсутствии генерации для типов анизотропии $\chi_{1,3,4}^{(2)}$ в случае падения линейно поляризованной волны с плоскостью поляризации, совпадающей с плоскостью Oxz .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ (проект Ф20М–011).

Список использованных источников

1 Шамына, А. А. Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. I. Аналитическое решение / А. А. Шамына, В. Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 126, № 6. – С. 724–731.

2 Капшай, В. Н. Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. II. Анализ решения / В. Н. Капшай, А. А. Шамына // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 126, № 6. – С. 732–739.

3 Шамына, А. А. Генерация второй гармоники от тонкого цилиндрического слоя. III. Условия отсутствия генерации / А. А. Шамына, В. Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 126, № 6. – С. 740–747.

Е. С. Тимошин, С. И. Тимошин

г. Гомель, ГГТУ имени П.О. Сухого

КВАРКОВЫЕ ВКЛАДЫ В СПИН НУКЛОНА ИЗ НЕЙТРИННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МИШЕНЯХ

Введение. Для решения проблемы спина нуклона важное значение имеет ароматовое разделение вкладов кварков и антикварков [1].

В настоящее время отдельно Δq и $\Delta \bar{q}$ получают из полуинклюзивного IN -ГНР [2]. Однако здесь данные существенно зависят от функций фрагментации [1, 3], что вносит в них дополнительные неопределенности. Разделение Δq и $\Delta \bar{q}$ возможно в процессах ГНР нейтрино и антинейтрино на поляризованных мишенях с заряженным током [4, 5].

Нейтринные процессы имеют ряд преимуществ: естественная поляризация нейтрино, число поляризационных СФ больше, чем для ГНР заряженных лептонов на нуклонах с электромагнитным током из-за несохранения четности в слабых взаимодействиях [4–6]. Поэтому нейтрино является удобным инструментом для изучения спиновой структуры нуклона.

Однако проведение нейтринных экспериментов с поляризованными мишенями связано с техническими трудностями, главная из которых – огромная масса мишени, необходимая для сбора нужной статистики. Светимость существующих нейтринных пучков требует мишеней размером несколько метров, которые не могут быть поляризованы.

В то же время имеется перспектива [5, 7] получать высокофокусированные нейтринные пучки от распадов мюонов [8, 9] (нейтринные фабрики), для которых уже можно создать поляризованные мишени. В таком случае проведение нейтринных экспериментов с поляризованными мишенями представляется возможным в будущем. Это даст возможность получать новые данные по спиновой структуре нуклона, которые необходимы для проведения КХД-анализа всей совокупности поляризационных данных по аналогии с неполяризованными ГНР.

В связи с этим является актуальным изучение спиновой структуры нуклона в ГНР (анти)нейтрино на поляризованных мишенях (протонах, нейтронах, дейтронах).

В настоящей работе рассматриваются возможности получения вкладов кварков и антикварков в нуклонный спин на основе измеряемых величин (поляризационных асимметрий, первых моментов поляризационных СФ) ГНР нейтрино и антинейтрино на поляризованных протонах, нейтронах, дейтронах с заряженным и нейтральным токами.

1. Кварковые вклады в спин нуклона из асимметрий нейтринных экспериментов на поляризованных мишенях. Дифференциальные сечения ГНР (анти)нейтрино на поляризованных дейтронах

$$\nu(\bar{\nu}) + d \rightarrow l^-(l^+) + X \quad (1)$$

представим в виде

$$\sigma_{\nu(\bar{\nu})d} = \sigma_{\nu(\bar{\nu})d}^a + P_N \sigma_{\nu(\bar{\nu})d}^{Pol} \quad (2)$$

где $\sigma_{\nu(\bar{\nu})d}^a, Pol$ – неполяризованная и поляризованная части сечений соответственно; $\sigma = \frac{d^2\sigma}{dx dy}$; x, y – скейлинговые переменные; P_N – степень поляризации дейтрона.

В ведущем порядке КХД (улучшенная кварк-партоновая модель) сечения, входящие в (2) получены в следующем виде для нейтрино:

$$\sigma_{\nu d}^a = \frac{\sigma_{\nu p}^a + \sigma_{\nu n}^a}{2} = \sigma_0 x \left[u(x, Q^2) + d(x, Q^2) + 2s(x, Q^2) + y_1^2 (\bar{u}(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2)) \right], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu d}^{Pol} &= \frac{\sigma_{\nu p}^{Pol} + \sigma_{\nu n}^{Pol}}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \omega \right) = \\ &= \sigma_0 x \left[\Delta u(x, Q^2) + \Delta d(x, Q^2) + 2\Delta s(x, Q^2) - y_1^2 (\Delta \bar{u}(x, Q^2) + \Delta \bar{d}(x, Q^2)) \right] \left(1 - \frac{3}{2} \omega \right) \end{aligned} \quad (3)$$

и антинейтрино:

$$\sigma_{\bar{\nu} d}^a = \sigma_0 x \left[y_1^2 (u(x, Q^2) + d(x, Q^2)) + \bar{u}(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2) + 2\bar{s}(x, Q^2) \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\nu} d}^{Pol} &= \sigma_0 x \left[y_1^2 (\Delta u(x, Q^2) + \Delta d(x, Q^2)) - \Delta \bar{u}(x, Q^2) - \right. \\ &\quad \left. - \Delta \bar{d}(x, Q^2) - 2\Delta \bar{s}(x, Q^2) \right] \left(1 - \frac{3}{2} \omega \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $q(\bar{q})(x, Q^2)$, $\Delta q(\Delta \bar{q})(x, Q^2)$ ($q = u, d, s$) – функции распределения неполяризованных и поляризованных кварков (антикварков); $y_1 = 1 - y$, Q^2 – квадрат переданного импульса от нейтрино (антинейтрино) к лептону (антилептону), $\omega \approx 0,05$ – вероятность D-состояния в волновой функции дейтрона; $\sigma_0 = \frac{G}{\pi} ME$, G – константа Ферми, E – энергия нейтрино (антинейтрино), M – масса дейтрона, “p” и “n” обозначают протон и нейтрон соответственно.

Рассмотрим поляризационные асимметрии процессов (1) следующего вида:

$$A_{\pm d} = \frac{(\sigma_{\nu d}^{\downarrow\downarrow} + \sigma_{\bar{\nu} d}^{\uparrow\uparrow}) - (\sigma_{\nu d}^{\uparrow\downarrow} + \sigma_{\bar{\nu} d}^{\downarrow\uparrow})}{(\sigma_{\nu d}^{\downarrow\downarrow} + \sigma_{\bar{\nu} d}^{\uparrow\uparrow}) + (\sigma_{\nu d}^{\uparrow\downarrow} + \sigma_{\bar{\nu} d}^{\downarrow\uparrow})}, \quad (7)$$

где первая стрелка соответствует спиральности нейтрино (\downarrow) или антинейтрино (\uparrow), вторая – направлению спина дейтрона \uparrow ($P_N = 1$) и \downarrow ($P_N = -1$).

С учетом (2) асимметрии $A_{\pm d}$ принимают вид

$$A_{\pm d} = \frac{\sigma_{\nu d}^{Pol} \pm \sigma_{\bar{\nu} d}^{Pol}}{\sigma_{\nu d}^a \pm \sigma_{\bar{\nu} d}^a}. \quad (8)$$

Подставляя в (8) сечения (2–6), получаем асимметрии в терминах партонных распределений

$$A_{+d} = \frac{(1+y_1^2)[\Delta u_V(x, Q^2) + \Delta d_V(x, Q^2)]}{(1+y_1^2)[u(x, Q^2) + \bar{u}(x, Q^2) + d(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2)] + 2(s(x, Q^2) + \bar{s}(x, Q^2))} \left(1 - \frac{3}{2} \omega \right), \quad (9)$$

$$A_{-d} = \frac{(1-y_1^2)[\Delta u(x, Q^2) + \Delta d(x, Q^2) + \Delta \bar{u}(x, Q^2) + \Delta \bar{d}(x, Q^2)] + 2(\Delta s(x, Q^2) + \Delta \bar{s}(x, Q^2))}{(1-y_1^2)[u_V(x, Q^2) + d_V(x, Q^2)]} \left(1 - \frac{3}{2} \omega \right), \quad (10)$$

где $\Delta q_V(q_V) = \Delta q(q) - \Delta \bar{q}(\bar{q})$ – функции распределения (не)поляризованных валентных кварков.

Рассмотрим полуинклюзивное $\nu(\bar{\nu})d$ - ГНР

$$\nu(\bar{\nu}) + d \rightarrow l^-(l^+) + \pi^\pm + X. \quad (11)$$

Дифференциальные сечения этих процессов имеют структуру, аналогичную (2), (3), (4), и для них получены следующие выражения в случае рассеяния нейтрино:

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu d}^{a\pi} &= \sigma_0 x \left[d(x, Q^2) D_u^\pi(z) + y_1^2 \bar{u}(x, Q^2) D_d^\pi(z) + u(x, Q^2) D_u^\pi(z) + y_1^2 \bar{d}(x, Q^2) D_d^\pi(z) \right], \\ \sigma_{\nu d}^{Pol\pi} &= \sigma_0 x \left[\Delta d(x, Q^2) D_u^\pi(z) - y_1^2 \Delta \bar{u}(x, Q^2) D_d^\pi(z) + \Delta u(x, Q^2) D_u^\pi(z) - y_1^2 \Delta \bar{d}(x, Q^2) D_d^\pi(z) \right] \left(1 - \frac{3}{2} \omega \right), \end{aligned} \quad (12)$$

и антинейтрино

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\nu}_d}^{\pi^+} &= \sigma_0 x [y_1^2 u(x, Q^2) D_d^{\pi^+}(z) + \bar{d}(x, Q^2) D_u^{\pi^+}(z) + y_1^2 d(x, Q^2) D_d^{\pi^+}(z) + \bar{u}(x, Q^2) D_u^{\pi^+}(z)], \\ \sigma_{\bar{\nu}_d}^{\pi^0} &= \sigma_0 x [y_1^2 \Delta u(x, Q^2) D_d^{\pi^0}(z) - \Delta \bar{d}(x, Q^2) D_u^{\pi^0}(z) + y_1^2 \Delta d(x, Q^2) D_d^{\pi^0}(z) - \Delta \bar{u}(x, Q^2) D_u^{\pi^0}(z)] \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right). \end{aligned} \quad (13)$$

В формулах (12), (13) $D_{q(\bar{q})}^{\pi}(z)$ – функция фрагментации кварка q (антикварка \bar{q}) в π -мезон.

Полуинклюзивные асимметрии $A_{\pm d}^{\pi^+ - \pi^-}$ имеют структуру, аналогичную (7), (8), с заменой $\sigma \rightarrow \sigma^{\pi^+ - \pi^-} = \sigma^{\pi^+} - \sigma^{\pi^-}$.

С учетом (12), (13) для них получены следующие выражения:

$$A_{+d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\Delta u(x, Q^2) + \Delta d(x, Q^2) + \Delta \bar{u}(x, Q^2) + \Delta \bar{d}(x, Q^2)}{u_V(x, Q^2) + d_V(x, Q^2)} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right), \quad (14)$$

$$A_{-d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\Delta u_V(x, Q^2) + \Delta d_V(x, Q^2)}{u(x, Q^2) + \bar{u}(x, Q^2) + d(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2)} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right). \quad (15)$$

В формулах (14), (15) функции фрагментации сокращаются в числителе и знаменателе в силу соотношений:

$$D_d^{\pi^+ - \pi^-} = D_u^{\pi^+ - \pi^-}, \quad D_d^{\pi^+ - \pi^-} = -D_u^{\pi^+ - \pi^-}, \quad D_{\bar{u}}^{\pi^+ - \pi^-} = -D_{\bar{d}}^{\pi^+ - \pi^-}.$$

Совместное применение инклюзивных и полуинклюзивных асимметрий позволяет определить вклад странных кварков и антикварков в нуклонный спин. Так из асимметрий A_{-d} (1.10) и $A_{+d}^{\pi^+ - \pi^-}$ (14) получаем распределение странного моря $(\Delta s(x) + \Delta \bar{s}(x))$, а его первый момент есть

$$\Delta s + \Delta \bar{s} = \int_0^1 [\Delta s(x) + \Delta \bar{s}(x)] dx = \frac{1 - y_1^2}{2 - 3\omega} \int_0^1 [u_V(x) + d_V(x)] (A_{-d} - A_{+d}^{\pi^+ - \pi^-}) dx. \quad (16)$$

Из асимметрии $A_{-d}^{\pi^+ - \pi^-}$ (A_{+d}) можно получить суммарный вклад валентных кварков

$$\Delta u_V + \Delta d_V = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \omega} \int_0^1 A_{-d}^{\pi^+ - \pi^-} [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x)] dx.$$

В то же время совместное применение этих асимметрий, т. е. (9) и (15), дает возможность доступа к распределению неполяризованных кварков и антикварков

$$s(x) + \bar{s}(x) = \frac{1}{2} (1 + y_1^2) [u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] \left(\frac{A_{-d}^{\pi^+ - \pi^-}}{A_{+d}} - 1 \right).$$

Таким образом, получены выражения для вкладов в спин нуклона странных кварков и антикварков $(\Delta s + \Delta \bar{s})$, суммарного вклада валентных кварков, не содержащие функций фрагментации, с помощью поляризационных инклюзивных и полуинклюзивных асимметрий ГНР нейтрино и антинейтрино на поляризованных дейтронах с заряженным током. Из этих асимметрий также можно получить информацию о распределении неполяризованного странного моря $[s(x) + \bar{s}(x)]$.

Список использованных источников

- 1 The Electron-Ion Collider: Assessing the Energy Dependence of Key Measurements / E. C. Aschenauer [et al.]. – ArXiv: 1708.01527 [nucl-ex].
- 2 Ball, R. D. The Proton Spin, Semi-inclusive processes, and a future Electron-Ion Collider / R. D. Ball, A. Deshpande. – ArXiv: 1801.04842 [hep-ph].
- 3 Leader, E. New analysis concerning the strong quark polarization puzzle / E. Leader, A. V. Sidorov, D. B. Stamenov // Phys. Rev. – 2015. – Vol. D91. – P.054017.
- 4 Forte, S. Polarized parton distribution from charged – current deep-inelastic scattering and future neutrino factories / S. Forte, M. L. Mangano, G. Ridolfi // Nucl. Phys. – 2001. – Vol. B602. – P. 585–621.
- 5 King, B. J. High rate neutrino detectors for neutrino factories / B. J. King // Nucl. Instrum. Meth. – 2000. – Vol. A451. – P. 198–206.

6 Kaur, J. Spin distribution in the quark-parton model / J. Kaur // Nucl. Phys. – 1977. – Vol. B128. – P. 219–251.

7 Schwienhorst, R. Colliding neutrino beams / R. Schwienhorst // Mod. Phys. Lett. – 2008. – Vol. A23. – P. 2751–2761.

8 Kaplan, D. M. Muon collider / neutrino factory: status and prospects / D. M. Kaplan // Nucl. Instrum. Meth. – 2000. – Vol. A453. – P. 37–48.

9 Mezzetto, M. Beta beams / M. Mezzetto // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 2005. – Vol. 143. – P. 309–316.

Г. Ю. Тюменков

г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

О МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ИСИКАВЫ-ЧАНГА-ЛУ ВИДА $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$

Термодинамические свойства неидеальных газов получают на основе изучения полуэмпирических уравнений состояния, которые, как правило, являются двухпараметрическими. Классическим уравнением такого рода является уравнение Ван-дер-Ваальса [1, 2]. Наиболее же успешным вариантом уравнения состояния неидеального газа вплоть до настоящего времени остается уравнение Редлиха-Квонга [3], которое получило достаточно качественное обобщение в виде уравнения Т. Исикавы, У. К. Чанга и Б. Лу [4, 5], в котором была предложена новой форма «отталкивательного» слагаемого и двумя температурно-зависимыми параметрами. Молярная форма этого уравнения представляется в виде

$$P = \frac{RT(2V + b(T))}{V(2V - b(T))} - \frac{a(T)}{\sqrt{TV}(V + b(T))} \quad (1)$$

с параметрами, имеющими структуру

$$a(T) = \Omega_a \alpha(\tilde{T}) \frac{R^2 T_k^{5/2}}{P_k}, \quad b(T) = \Omega_b \beta(\tilde{T}) \frac{RT_k}{P_k}, \quad \alpha(1) = \beta(1) = 1, \quad (2)$$

где T_k, P_k – температура и давление критического состояния, $\tilde{T} = T/T_k$ – безразмерная приведенная температура.

Важнейшим элементом сопоставления всевозможных следствий, вытекающих из уравнений состояния, с экспериментальными данными является рассмотрение критического состояния вещества. При достижении данного состояния исчезают различия в физических свойствах жидкости и пара. На кривой изотермы при критической температуре этому состоянию соответствует единственная точка, являющаяся одновременно точкой перегиба и точкой схождения экстремумов изотермы. Математически это означает, что

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T_{cp}} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T_{cp}} = 0. \quad (3)$$

Условия (3) образуют систему уравнений, решение которой с использованием уравнения (1) позволяет выразить характеристики критического состояния газа через параметры a, b уравнения состояния

$$V_{cp} = \chi b, \quad T_{cp} = \sigma^2 \left(\frac{a}{bR}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad P_{cp} = \varphi \left(\frac{a^2 R}{b^5}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4)$$

где введены обозначения для численных коэффициентов

$$\chi = 2,89812008, \quad \sigma = \frac{2\chi - 1}{2\chi + 2} = 0,61519913, \quad \varphi = \frac{3}{(\chi + 1)^2(2\chi - 1)} = 0,04116327.$$

В формулах (4) имеется параметр $\chi = V_{кр}/b$. В случае уравнения (1) численное значение этого параметра – это корень кубического уравнения

$$8\chi^3 - 12\chi^2 - 30\chi - 7 = 0$$

вида

$$\chi = \sqrt{6} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right) + \frac{1}{2} = 2,89812008.$$

На практике χ используется для получения численных значений параметров уравнения состояния по экспериментальным значениям критических температур и давлений газов

$$\Omega_a = \frac{8(\chi + 1)^3}{3(6\chi + 1)^2} = 0,46712311, \quad \Omega_b = \frac{2}{6\chi + 1} = 0,10876233.$$

Критические параметры во многих случаях удобно использовать в качестве единиц измерения термодинамических величин. Это означает переход в различных соотношениях к приведенным, или относительным безразмерным переменным

$$\tilde{P} = \frac{P}{P_{кр}}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_{кр}}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_{кр}}.$$

В приведенных переменных уравнение Исакавы-Чанга-Лу (1) принимает вид

$$\tilde{P} = \frac{\tilde{T}(2\chi\tilde{V} + \beta(\tilde{T}))}{\Omega_b\chi\tilde{V}(2\chi\tilde{V} - \beta(\tilde{T}))} - \frac{\Omega_a\alpha(\tilde{T})}{\Omega_b\sqrt{\tilde{T}}\chi\tilde{V}(\chi\tilde{V} + \beta(\tilde{T}))}. \quad (5)$$

Стандартное представление уравнения состояния не содержит энтропию и записывается в виде $P = P(T, V)$. Математическая простота такого рода уравнений, однако, содержит определенную сложность, заключающуюся в их преобразовании к виду $V = V(T, P)$. Это связано с характером их математической зависимости от объема макросистемы. Ряд уравнений состояния, например, первое уравнение Дитеричи, вообще неразрешимы относительно объема. Но значительная их часть имеют кубические зависимости от V . В их числе и уравнение Исакавы-Чанга-Лу. Преобразуем его приведенную форму к виду $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$, используя встроены функции, рассчитанные в работе [6]:

$$\alpha(\tilde{T}) = 0,94162 + 0,48023\tilde{T} - \frac{0,42185}{\tilde{T}},$$

$$\beta(\tilde{T}) = 0,83056 + 0,21595\tilde{T} - 0,04651\tilde{T}^2.$$

Для того чтобы выделить искомую зависимость, сначала запишем уравнение (5) в виде кубического уравнения

$$\begin{aligned} & -2\tilde{P}\sqrt{\tilde{T}}\chi^3\Omega_b^2\tilde{V}^3 + \sqrt{\tilde{T}}\chi^2\Omega_b(2\tilde{T} - \tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b)\tilde{V}^2 + \\ & + \chi \left(-2\alpha(\tilde{T})\Omega_a + \sqrt{\tilde{T}}\beta(\tilde{T})\Omega_b(3\tilde{T} + \tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b) \right) \tilde{V} + \\ & + \beta(\tilde{T})(\alpha(\tilde{T})\Omega_a + \tilde{T}^{3/2}\beta(\tilde{T})\Omega_b) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

И решим его методом Кардано [7], сравнивая с кубическим уравнением общего вида

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (7)$$

Для уравнения (6) коэффициенты уравнения (7) равны:

$$\begin{aligned}
 a &= -2\tilde{P}\sqrt{\tilde{T}}\chi^3\Omega_b^2, \\
 b &= \sqrt{\tilde{T}}\chi^2\Omega_b(2\tilde{T} - \tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b), \\
 c &= \chi\left(-2\alpha(\tilde{T})\Omega_a + \sqrt{\tilde{T}}\beta(\tilde{T})\Omega_b(3\tilde{T} + \tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b)\right), \\
 d &= \beta(\tilde{T})(\alpha(\tilde{T})\Omega_a + \tilde{T}^{3/2}\beta(\tilde{T})\Omega_b).
 \end{aligned}$$

Согласно методу Кардано, с данными коэффициентами уравнение (6) имеет один вещественный и два сопряжённых комплексных корня. Но так как речь идёт об объеме макросистемы, то физическим является лишь вещественное решение:

$$\tilde{V} = y_1 = (X_1 - X_2)^{1/3} + (X_1 + X_2)^{1/3}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{2 \times 10^{-4}U_1U_2}{\tilde{P}\tilde{T}^{3/2}} + \frac{1,9 \times 10^{-8}(395,37\tilde{T} + \tilde{P}U_1)^3}{\tilde{P}^3} + \\
 &+ \frac{1,33U_3}{\tilde{P}^2\sqrt{\tilde{T}}}\left(-0,88 + \frac{0,39}{\tilde{T}} - 0,45\tilde{T} + 2,6 \times 10^{-5}\sqrt{\tilde{T}}U_1(-593,06\tilde{T} + \tilde{P}U_1)\right), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \left(\frac{1}{\tilde{P}^6\tilde{T}^3}\left(-\frac{1}{\tilde{T}^{3/2}}1,3 \times 10^{-13}U_4 + \right. \right. \\
 &+ 0,01\left(0,002\tilde{P}^2U_1U_2 + 1,97 \times 10^{-7}\tilde{T}^{3/2}(395,37\tilde{T} + \tilde{P}U_1)^3 + \right. \\
 &\left. \left. + 1,49\tilde{P}U_3(3,62 - 8,09\tilde{T} - 4,13\tilde{T}^2 + 0,0002\tilde{T}^{3/2}U_1(-593,06\tilde{T} + \tilde{P}U_1))\right)\right)^{1/2}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Функции U_1, U_2, U_3 и U_4 в свою очередь имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= -17,86 - 4,64\tilde{T} + \tilde{T}^2, \\
 U_2 &= (38,96 - 86,95\tilde{T} - 44,35\tilde{T}^2 - 17,86\tilde{T}^{5/2} - 4,64\tilde{T}^{7/2} + \tilde{T}^{9/2}), \\
 U_3 &= 2\tilde{T} + \tilde{P}(-0,09 - 0,02\tilde{T} + 0,01\tilde{T}^2), \\
 U_4 &= (22331,21\tilde{T}^{7/2} + \tilde{P}^2\tilde{T}^{3/2}(318,90 + 165,83\tilde{T} - 14,16\tilde{T}^2 - \\
 &- 9,29\tilde{T}^3 + \tilde{T}^4) + \tilde{P}(13201,49 - 29467,31\tilde{T} - 15028,45\tilde{T}^2 + \\
 &+ 7060,41\tilde{T}^{5/2} + 1835,74\tilde{T}^{7/2} - 395,37\tilde{T}^{9/2}))^3.
 \end{aligned}$$

Таким образом, представление приведенного уравнения Исикавы-Чанга-Лу в форме $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ имеет вид (8)-(10). Несмотря на сложность и громоздкость, эта форма уравнения допускает применение численного и аналитического анализа. Более детально использование метода Кардано применительно к кубическим по объему уравнениям состояния показано в работе [8].

Список использованных источников

- 1 Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 2000. – 608 с.
- 2 Уэйлес, С. Фазовые равновесия в химической технологии / С. Уэйлес. – Москва : Мир, 1989. – 304 с.
- 3 Redlich, J. N. On the thermodynamics of solutions: V. an equation of state: fugacity of gaseous solutions / J. N. Redlich, S. Kwong // Chemical Reviews. – 1949. – V. 44. – P. 233–244.
- 4 Ishikawa, T. A Cubic Perturbed, Hard Sphere Equation of State for Thermodynamic Properties and Vapor-Liquid Equilibrium Calculations / T. Ishikawa, W. K. Chung, B. C. Y. Lu // AIChE Journal. – 1980. – V. 26. – P. 372–378.

5 Ishikawa, T. Simple and generalized Equation of State for Vapor-Liquid Equilibrium Calculations / T. Ishikawa, W. K. Chung, B. C. Y. Lu // *Advances in Cryogenic Engineering*. – 1980. – V. 25. – P. 671–681.

6 Дей, Е. А. Свойства неидеального газа в модели Исикавы-Чанга-Лу / Е. А. Дей, Г. Ю. Тюменков // *Проблемы физики математики и техники*. – 2017. – № 4(33). – С. 11–16.

7 Гусак, А. А. Справочник по высшей математике в двух томах / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричилова. – Минск : Тетрасистемс, 1999. – 640 с.

8 Невмержицкая, А. С. О приведенных полуэмпирических уравнениях состояния вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ / А. С. Невмержицкая, Г. Ю. Тюменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2019. – № 4(41). – С. 28–30.

В. Г. Шолох, В. В. Свиридова, Н. А. Алешкевич

г. Гомель, ГТУ имени Ф.Скорины

РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ В КОНТЕКСТЕ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

При управлении качеством образовательной деятельности предполагается непрерывный мониторинг её результатов, регулярные измерения и анализ показателей качества образовательного процесса. Для этого необходимо разработать соответствующие критерии оценки и осуществлять непрерывный мониторинг учебных достижений обучающихся. В условиях инновационной деятельности педагогический мониторинг может стать механизмом, способствующим стимулированию, активизации и интеллектуальному развитию студентов и обеспечивающим им большую самостоятельность и ответственность [1].

Именно в этих целях в рамках СМК нашего университета при непосредственном участии авторов была разработана и введена в действие с декабря 2019 года новая документированная процедура ДП-2.412 «Мониторинг образовательной деятельности и оценка удовлетворенности потребителей». Процедура устанавливает порядок проведения мониторинга образовательного процесса в целях получения объективной и достоверной информации о качестве образовательной деятельности для определения и внесения необходимых корректирующих действий. Внедрение данной процедуры направлено на повышение качества работы профессорско-преподавательского состава и сотрудников университета посредством получения объективных, достоверных данных о текущем состоянии и результативности процессов. Одним из важных инструментов повышения качества образовательного процесса является оценка обучающимися качества преподавания отдельных дисциплин. Мониторинговое исследование по оценке качества преподавания дисциплин, которое проводится в форме анкетирования, ориентировано на выявление проблем в организации образовательного процесса по каждой учебной дисциплине. Такие исследования позволяют выявить слабые стороны в преподавательской деятельности педагога и стимулируют его к повышению качества преподавания дисциплины и более широкому использованию современных методов и средств обучения.

Совершенствование технологии образовательной деятельности педагогов неразрывно связано с разработкой и использованием эффективных инструментов педагогического мониторинга как системы сбора, обработки, хранения и распространения информации об образовательной системе или отдельных ее компонентах [2]. Используемое в системе мониторинга качества образования и оценки знаний педагогическое тестирование, характеризующееся такими достоинствами как объективность и оперативность, ориентировано в основном на итоговый контроль знаний в период экзаменационной сессии и не позволяет оценить достижения каждого студента в течение семестра, уровень активности и самостоятельности его образовательной деятельности. Наиболее методически оправданным диагностическим инструментарием мониторинга достижений студента по конкретной учебной дисциплине является балльно-рейтинговая система (БРС), достоинства которой отмечены в ряде работ (например, [3]).

Основываясь на личном опыте использования БРС можно говорить о том, что при её внедрении меняется методика преподавания учебной дисциплины, увеличивается количество заданий, выполняемых каждым студентом индивидуально. Преподаватели, использующие БРС, отмечают возрастание объективности оценивания уровня освоения дисциплины, снижение нагрузки на студентов и преподавателей во время сессии, организацию регулярной обратной связи, что позволяет своевременно определять проблемы обучающихся и корректировать их деятельность в течение семестра.

Для реализации БРС по учебным дисциплинам, закреплённым за авторами данной работы, в соответствии с методическими рекомендациями, изложенными в работе [4], на основе унифицированного плана БРС, представленного нами в работе [5], составлены:

- планы балльно-рейтинговой системы;
- логические схемы учебного процесса, на основе которых разработаны технологические карты дисциплин;
- журналы результатов диагностики текущей успеваемости каждого студента;
- таблицы соответствия рейтинговых оценок и отметок в десятибалльной шкале.

В качестве примера в таблице 1 приведён план БРС по дисциплине «Программирование» для студентов группы ФЭ-11 (доцент Свиридова В. В.). В ходе апробации рейтинговой системы в группе студентов специальности «Физическая электроника» в течение трёх лет установлено, что наиболее оптимальное значение коэффициента, устанавливающего долевой вклад оценки текущей успеваемости α составляет примерно 0,50 (пояснения относительно используемых коэффициентов представлены в работе [5]). При этом мы руководствовались следующими соображениями:

- формализованный подход к оценке результативности обучения должен быть ориентирован на студента со средней успеваемостью;
- необходимость учитывать уровень мотивированности и организованности студентов группы данной специальности;
- возможность индивидуальных творческих заданий для успешных студентов с целью оценки их активной учебной работы в семестре дополнительными баллами;
- планирование коррекционных мероприятий для студентов, своевременно не выполнивших задания.

Таблица 1 – План балльно-рейтинговой системы по дисциплине «Программирование» для студентов группы ФЭ-11

Форма контроля	Количество мероприятий	Количество баллов по одному мероприятию	Макс. колич. баллов	Миним. колич. баллов
Лекции	29	1,0	29,0	10,0
Лабораторные занятия	22	1,0	22,0	22,0
Результативность работы в семестре			51,0	32,0
Экзамен	1	49,0	49,0	20,0
Примечания: 1 При начислении баллов за лекционное занятие: 0,1 – посещение; 0,2 – конспект лекций; 0,7 (0,5 – повторно) – сдача теории по теме лекции; (Форма контроля – диктант, устный опрос); минус 0,1 – нарушение дисциплины во время занятий. 2 При начислении баллов за лабораторное занятие: 0,2 – выполнение лабораторной работы; 0,3 – отчет по лабораторной работе; 0,5 – сдача теории по теме лабораторной работы; минус 0,1 – нарушение дисциплины во время занятий.				

В журнале диагностики академической группы фиксируются рейтинговые оценки, соответствующие учебным достижениям каждого студента по всем видам занятий в течение всего семестра и отражается процесс накопления им рейтинговых баллов. Фрагмент журнала диагностики учебных достижений студентов группы ФЭ-11 на лабораторных занятиях по рассматриваемой дисциплине показан в таблице 2.

Таблица 2 – Иллюстрация мониторинга учебных достижений студентов по лабораторным занятиям

Лабораторные работы	АПС и ПО ПК	MS DOS	FAR	Понятие алгоритма	Базовые Pascal	Линейный алгоритм	Разветвлённый алгоритм	Циклический алгоритм	Одномерные массивы	Многомерные массивы	Сортировка массивов	ИТОГОВАЯ	ВОЗМОЖНАЯ
Бардашев Андрей	1,0	1,0	1,0	1,0	0,2	0,2						4,4	6,0
Бескровный Евгений	1,0	1,0	1,0	1,0	0,2	0,2						4,4	6,0
Василенко Даниил	1,0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2						2,0	6,0
Винокуров Данила	1,0	1,0	1,0	1,0	0,2	0,2						4,4	6,0

Исчерпывающая информация о балльно-рейтинговой системе предоставляется студентам на вводном занятии по учебной дисциплине. План рейтинговой системы, логическая схема учебной дисциплины и журнал диагностики доступны студентам на протяжении всего семестра, что соответствует принципам прозрачности и доступности.

Регулярные мониторинговые исследования и измерения в рамках образовательного процесса, их прозрачность и открытость, доступность результатов и их всесторонний анализ способствуют значительному повышению уровня оказываемых образовательных услуг. Основными позитивными результатами использования балльно-рейтинговой системы является повышение посещаемости занятий, мотивации, учебной активности и успеваемости студентов, а также формирование у них навыков систематической самостоятельной учебной деятельности.

Список использованных источников

1 Чучалин, А. И. Менеджмент качества в вузе / А. И. Чучалин [и др.]; под ред. Ю. П. Похолкова, А. И. Чучалина. – Томск : Изд. ТПУ, 2004. – 251 с.

2 Железнова, Л. Б. Управление качеством дополнительного образования [Электронный ресурс]. – 2002. – Режим доступа : http://bank.ooipkro.ru/Text/t43_11.htm. – Дата доступа : 03.09.2020.

3 Сидакова, Н. В. Балльно-рейтинговая система контроля и оценки знаний – динамический фактор информационной открытости и стимуляции учебной деятельности / Н. В. Сидакова // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2018. – Т. 7, № 2(23). – С. 261–264.

4 Стратегически важные направления исследований авторской научной школы члена-корреспондента РАО В. М. Монахова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.instrao.ru/images/1Treshka/Nauchnye_shkoli/Monahov/. – Дата доступа : 11.09.2020.

5 Шолох, В. Г. Балльно-рейтинговая система как компонент педагогической технологии / В. Г. Шолох, В. В. Свиридова / Проблемы и перспективы развития современной науки в странах Европы и Азии: материалы XXV Международной научно-практической интернет-конференции: сб. научн. тр. – Переяслав, 2020. – С. 93–96.

Научное издание

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ЮБИЛЕЙНАЯ
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,**

**посвященная 90-летию
Гомельского государственного университета
имени Франциска Скорины**

(Гомель, 19–20 ноября 2020 года)

Материалы

В трех частях

Часть 3

Подписано в печать 22.12.2020. Формат 60x84 1/8.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 30,23.
Уч.-изд. л. 26,33. Тираж 8 экз. Заказ 604.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.