Проблемы физики, математики и техники, № 3 (16), 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983.23: 517.983.5

ОБРАЩЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE INVERSE OF SOME CLASS OF OPERATORS IN BANACH SPACE AND ITS SEVERAL APPLICATIONS

A.A. Atvinovskii, A.R. Mirotin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предложен метод обращения одного класса операторов в банаховом пространстве. Полученный результат применяется к уравнениям, содержащим замкнутые операторы. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: *функция Маркова, класс Крейна, функциональное исчисление, замкнутый оператор, операторное уравнение.*

The paper deals with the method proposed for the inverse of some class of operators. The result is applied to some equations with closed operators. The examples are considered.

Keywords: *Markov function, Krein class, functional calculus, closed operator, operator equation.*

Введение

В статье рассмотрен класс функций R_b, содержащийся в классе функций Маркова $R[0,b]$, изучавшемся М.Г. Крейном [1], и класс замкнутых плотно определенных операторов в комплексном банаховом пространстве X, спектр которых пересекается с отрезком $[0,b]$ по множеству $\{b\}$. Целью работы являются теоремы, позволяющие разрешать уравнения, содержащие функции класса R_b от этих операторов, с помощью введенного ниже функционального исчисления (Q_b-исчисления), рассмотрены примеры.

1 Вспомогательные сведения

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о функциях классов Неванлинны R и Крейна $R[a,b]$ [1].

Говорят, что функция f принадлежит классу R, если она голоморфна в открытой верхней полуплоскости и отображает её в себя.

Пусть $a<b$. Будем говорить, что функция g относится к классу $R[a,b]$, если она принадлежит R и голоморфна и положительна на $(-\infty,a)$, и голоморфна и отрицательна на $(b,+\infty)$. При этом g можно единственным образом представить в виде

$$g(z)=\int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}, \qquad (1.1)$$

где τ – ограниченная неубывающая функция, отличная от постоянной [1, с. 525–526]. Функции вида (1) называются *функциями Маркова*.

Всюду ниже X – банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, $V_{[a,b]}(X)$ – класс всех замкнутых плотно определенных операторов в пространстве X, спектры которых не пересекаются с отрезком $[a,b]$.

***Определение* 1.1** [2]. *Для функции g класса $R[a,b]$ с интегральным представлением* (1.1) *и оператора $A\in V_{[a,b]}(X)$ положим*

$$g(A)=\int_a^b R(t,A)d\tau(t), \qquad (1.2)$$

где $R(t,A)=(tI-A)^{-1}$ – резольвента оператора A.

Для решения задачи об обратимости оператора $g(A)$ рассмотрим класс функций $Q[a,b]$.

***Определение* 1.2** [3]. *Пусть $a<b$. Положим*

$$Q[a,b]=\{\varphi \mid \varphi=1/g, g\in R[a,b]\}.$$

Известно [2], что функцию $\varphi\in Q[a,b]$ можно единственным образом представить в виде

$$\varphi(z)=\alpha+\beta z-h(z), \qquad (1.3)$$

где $h\in R[a,b]$, интегралы, представляющие $h(a)$ и $h(b)$ по формуле (1.1), где $a=0$, сходятся, а числа α и β удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases}\alpha+\beta a-h(a)\ge 0,\\ \alpha+\beta b-h(b\le)0,\\ \beta<0,\end{cases}$$

причем

$$\beta=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x},\qquad \alpha=\lim_{x\to\infty}(\varphi(x)-\beta x). \qquad (1.4)$$

***Определение* 1.3** [2]. *Для* $\varphi \in Q[a,b]$ *вида* (1.3) *и оператора* $A \in V_{[a,b]}(X)$ *положим*

$$\varphi(A) := \alpha + \beta A - h(A) \qquad (1.5)$$

$\left(D(\varphi(A)) = D(A)\right)$, *где* $h(A)$ *понимается в смысле определения* 1.1. *Данное функциональное исчисление будем называть* $Q[a,b]$*-исчислением.*

Роль $Q[a,b]$-исчисления видна из следующей теоремы.

***Теорема* 1.1** [2]. *Для любой функции* g *из класса* $R[a,b]$ *и оператора* $A \in V_{[a,b]}(X)$ *оператор* $g(A)$ *имеет левый обратный, задаваемый формулой*

$$g(A)^{-1} = \varphi(A), \qquad (1.6)$$

где $\varphi = 1/g$, *и правая часть понимается в смысле* $Q[a,b]$*-исчисления.*

2 Теорема обращения

Главной целью данной работы является распространение теоремы 1.1 на более широкий класс операторов.

***Определение* 2.1.** *Будем говорить, что замкнутый плотно определенный оператор* A *в пространстве* X *принадлежит классу* $V_b(X)$, *если* $\sigma(A) \cap [0,b] \subseteq \{b\}$ *и для некоторого* $M > 0$ *выполняется неравенство*

$$\|R(t,A)\| \le \frac{M}{b-t}, \quad t \in [0,b).$$

***Пример* 2.1.** Пусть

$$X = L^p(\mathbb{R})(p \in [1,\infty)), \quad b > 0.$$

Рассмотрим оператор $A = \dfrac{d}{dt} + bI$ с областью определения $D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R})$ (пространство Соболева). Известно (см., например, предложение 8.4.1 в [5]), что A замкнут и

$$\sigma(A) = b + i\mathbb{R}, \quad R(t,A)u = r_{t-b} * u,$$

где

$$r_\lambda(s) = -e^{\lambda s}\chi_{(0,\infty)}(s) \text{ при } \mathrm{Re}(\lambda) < 0,$$

$$r_\lambda(s) = e^{\lambda s}\chi_{(-\infty,0)}(s) \text{ при } \mathrm{Re}(\lambda) > 0.$$

Следовательно, при $t \in [0,b)$ имеем в силу неравенства Юнга для свертки

$$\|R(t,A)\| \le \|r_{t-b}\|_{L^1} = \frac{1}{b-t}.$$

Таким образом, $A \in V_b(X)$.

***Определение* 2.2.** *Пусть* $b > 0$. *Будем говорить, что функция* g *принадлежит классу* R_b, *если она принадлежит классу* $R[0,b]$ *и определена и непрерывна в точке* $z = b$.

В силу теоремы Б. Леви непрерывность в точке $z = b$ равносильна тому, что интеграл (1.1), в котором положено $a = 0$, сходится при $z = b$.

***Определение* 2.3.** *Пусть* g *есть функция класса* R_b *с интегральным представлением* (1.1), *где* $a = 0$, $A \in V_b(X)$. *Определим оператор* $g(A)$ *формулой* (1.2), *в которой положено* $a = 0$.

Заметим, что интеграл в (1.2) существует в смысле Бохнера, так как

$$\int_0^b \|R(t,A)\| d\tau(t) \le \int_0^b \frac{M d\tau(t)}{b-t},$$

причем интеграл, стоящий в правой части, сходится в силу определения 2.2. Следовательно, оператор $g(A)$ ограничен.

Возникающее функциональное исчисление будем называть R_b*-исчислением*. Следующий пример показывает, что класс R_b содержит функции, не голоморфные в окрестности точки b, а потому R_b-исчисление не сводится к голоморфному.

***Пример* 2.2.** Из равенства

$$-b + (b-z)\ln\frac{z-b}{z} = \int_0^b \frac{(b-t)dt}{t-z}$$

следует, что функция

$$g(z) = -b + (b-z)\ln((z-b)/z),$$

где $\ln$ обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, принадлежит классу R_b. Легко видеть, что g не голоморфна в окрестности точки b (если бы функция $g(z)$ голоморфно продолжалась в окрестность точки b, то после замены $w = (z-b)/z$ отсюда бы следовала голоморфная продолжимость функции $w\ln w$ в окрестность нуля, что неверно).

Следующая лемма связывает R_b- и $R[0,b]$-исчисления.

***Лемма* 2.1.** *Пусть* $g \in R_b$, $A \in V_b(X)$. *Тогда для любого действительного* $k > 1$ *оператор* $g(kA)$ *определён в смысле* $R[0,b]$*-исчисления, причём*

$$\|g(kA) - g(A)\| \to 0 \ (k \to 1+0).$$

Доказательство. Так как $\sigma(kA) = k\sigma(A)$, то $\sigma(kA) \cap [0,b] = \varnothing$ при $k > 1$, а потому оператор $g(kA)$ определён в смысле $R[0,b]$-исчисления. Далее, для любого $t \in [0,b)$ и любого $k > 1$ справедлива оценка

$$\|R(t,kA)\| = \frac{1}{k}\left\|R\left(\frac{t}{k}, A\right)\right\| \le \frac{1}{k}\frac{M}{b-t/k} \le \frac{2M}{b-t},$$

а потому

$$\left\|R\left(t,kA\right) - R(t,A)\right\| \le \frac{3M}{b-t},$$

причем $3M/(b-t) \in L^1(\tau)$. Кроме того, для любого $t \in [0,b)$ имеем с учетом непрерывности резольвенты на $[0,b)$

$$\left\|R\left(t,kA\right)-R(t,A)\right\|=\left\|\frac{1}{k}R\left(\frac{t}{k},A\right)-R(t,A)\right\|\to 0$$

при $k\to 1+0$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\|g(kA)-g(A)\|\le$$
$$\le\int_0^b\|R(t,kA)-R(t,A)\|d\tau(t)\to 0\ \ (k\to 1+0),$$

что и требовалось доказать.

***Определение* 1.4.** *Пусть* $b>0$. *Положим*

$$Q_b=\{\varphi\,|\,\varphi=1/g, g\in R_b\}.$$

Заметим, что $Q[0,b]\supset Q_b$.

Приведем лемму, которая даёт интегральное представление функций класса Q_b.

Лемма 2.2. *Для того чтобы функция* φ *принадлежала классу* Q_b, *необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде* (1.3) *с* $a=0$, *где* $h\in R_b$. *В частности,* Q_b *есть конус.*

Доказательство. Если функция φ принадлежит Q_b, то она имеет вид (1.3) с $a=0$, причем функция h в этом представлении принадлежит R_b, так как она непрерывна в точке $z=b$ вслед за φ.

Обратно, если функция φ имеет вид (1.3) с $a=0$, причем $h\in R_b$, то, в силу теоремы об интегральном представлении функций класса $Q[a,b]$ из [3], она принадлежит $Q[0,b]$ и потому имеет вид $1/g$, где $g\in R[0,b]$. А так как φ непрерывна в точке b, то $g\in R_b$, что и требовалось доказать.

***Определение* 2.5.** *Пусть* $A\in V_b(X)$, $\varphi\in Q_b$. *Определим оператор* $\varphi(A)$ *с областью определения* $D(A)$ *формулой* (1.5), *в которой* $h(A)$ *понимается в смысле определения* 2.3. *Возникающее функциональное исчисление будем называть* Q_b*-исчислением.*

Основным результатом данной работы является

***Теорема* 2.1.** *Для любой функции* $g\in R_b$ *и любого оператора* $A\in V_b(X)$ *оператор* $g(A)$ *имеет левый обратный, задаваемый формулой*

$$g(A)^{-1}=\varphi(A), \qquad (2.1)$$

где $\varphi=1/g$ *и правая часть понимается в смысле* Q_b*-исчисления.*

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

***Лемма* 2.3.** *Для любых* $g,h\in R_b$ *и любого* $A\in V_b(X)$ *операторы* $g(A)$ *и* $h(A)$ *коммутируют.*

Доказательство. В силу свойств голоморфного функционального исчисления

$$g(kA)h(kA)=h(kA)g(kA)\quad (k>1),$$

осталось положить здесь $k\to 1+0$ и воспользоваться леммой 2.1.

***Лемма* 2.4.** *Для* $g\in R_b$, $\varphi\in Q_b$ *и любого* $A\in V_b(X)$ *операторы* $g(A)$ *и* $\varphi(A)$ *коммутируют в том смысле, что* $g(A)\varphi(A)\subset\varphi(A)g(A)$. *Кроме того,* $\operatorname{Im}g(A)\subset D(A)$ *и оператор* $\varphi(A)g(A)$ *ограничен.*

Доказательство. Покажем сначала, что при всех $x\in X$ справедливо включение

$$g(A)x\in D(A)(=D(\varphi(A))).$$

В самом деле, если τ – представляющая мера для g, то функция $t\mapsto AR(t,A)$ принадлежит $L^1(\tau)$, поскольку при $t\in[0,b)$

$$\|AR(t,A)\|=\|-I+tR(t,A)\|\le 1+\frac{bM}{b-t}.$$

Так как функция $t\mapsto R(t,A)$ также принадлежит $L^1(\tau)$, а оператор A замкнут, то при всех $x\in X$ имеем

$$A\int_0^1 R(t,A)x d\tau(t)=\int_0^1 AR(t,A)x d\tau(t),$$

причем левая часть существует, т. е. $g(A)x\in D(A)$. Более того, так как операторы A и $R(t,A)$ коммутируют, то из доказанного равенства следует, что операторы A и $g(A)$ тоже коммутируют. С учетом предыдущей леммы получаем теперь, что при $x\in D(A)$

$$\varphi(A)g(A)x=$$
$$=\alpha g(A)x+\beta Ag(A)x-h(A)g(A)x=$$
$$=g(A)\varphi(A)x.$$

Осталось заметить, что $\varphi(A)g(A)$ – замкнутый оператор, определенный на всем X, и применить теорему о замкнутом графике.

Доказательство теоремы 2.1. По теореме 1.1 оператор $g(kA)$ имеет левый обратный $\varphi(kA)$. Следовательно, при $x\in D(A)$ с учетом лемм о коммутировании имеем

$$x-\varphi(A)g(A)x=g(kA)\varphi(kA)x-g(A)\varphi(A)x.$$

Пусть $y_k:=\varphi(kA)x$, $y:=\varphi(A)x$ $\big(x\in D(A)\big)$. Тогда $y_k=\alpha x+\beta kAx-h(kA)x\to y(k\to 1+0)$ (лемма 2.1) и, в частности, направленность y_k ограничена: $\|y_k\|\le C$.

Поэтому

$$\|x-\varphi(A)g(A)x\|=\|g(kA)y_k-g(A)y\|\le$$
$$\le\|g(kA)y_k-g(A)y_k\|+\|g(A)y_k-g(A)y\|\le$$
$$\le\|g(kA)-g(A)\|C+\|g(A)y_k-g(A)y\|\to 0$$

при $k\to 1+0$. Таким образом, $\varphi(A)g(A)x=x$ при $x\in D(A)$. Так как в левой части последнего равенства стоит ограниченный оператор, то по непрерывности оно справедливо при всех $x \in X$, что и требовалось доказать.

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $\varphi \in Q_b$, $g = 1/\varphi$ *и* $A \in V_b(X)$. *Тогда оператор* $\varphi(A)$ *ограниченно обратим и обратный к нему оператор можно вычислить по формуле*

$$\varphi(A)^{-1} = g(A),$$

где правая часть понимается в смысле R_b*-исчисления.*

3 Некоторые приложения

Теорема 2.1 означает, что уравнение

$$g(A)x = y$$

с оператором $A \in V_b(X)$ имеет для любого $y \in D(A)$ единственное решение $x = \varphi(A)y$, где $\varphi = 1/g \in Q_b$, и правая часть понимается в смысле Q_b-исчисления. При этом важно отметить, что, как и в работе [4], оператор $\varphi(A)$ можно вычислить с помощью формул обращения интегрального преобразования Стилтьеса. Аналогичное замечание можно сделать и по поводу следствия 1. Приведем две теоремы, служащие иллюстрацией этого тезиса. В первой из них рассматривается уравнение

$$-bx + (bI - A)\ln(A - bI)A^{-1}x = y (y \in D(A)).$$

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $b > 0$, $A \in V_b(X)$. *Уравнение*

$$\int_0^b (b-t)R(t,A)xdt = y$$

для любого $y \in D(A)$ *имеет единственное решение*

$$x = \frac{2}{3b}y - \frac{2}{b^2}Ay - \\ -\int_0^b \frac{(b-t)R(t,A)ydt}{\left(-b+(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2 + (\pi(b-t))^2}.$$

Доказательство. Как показано в примере 2.2, функция $g(z) = -b + (b-z)\ln((z-b)/z)$, где $\ln$ обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, принадлежит классу R_b и имеет представляющую меру, сосредоточенную на полуинтервале $[0,b)$ и равную на нём $(b-t)dt$. Стало быть, функция

$$\varphi(z) = 1/(-b + (b-z)\ln((z-b)/z))$$

принадлежит Q_b, а исходное уравнение имеет вид $g(A)x = y$. Имея целью применить для его решения теорему 2.1, получим для φ представление (1.3). Найдём α и β из формул (1.4):

$$\beta = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(-b+(b-x)\ln\frac{x-b}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{-\frac{b}{t}\left(-b+\left(b+\frac{b}{t}\right)\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\right)} = -\frac{2}{b^2},$$

$$\alpha = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{-b+(b-x)\ln\frac{x-b}{x}} + \frac{2x}{b^2}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{b}{3}t^2 + o(t^2)}{\frac{b^2}{2}t^2 + o(t^2)} = \frac{2}{3b}$$

(мы воспользовались заменой $t = -1 + (x-b)/x$). Для получения интегрального представления функции $h \in R_b$ из (3) воспользуемся комплексной формулой обращения преобразования Стилтьеса (см., например, [6, с. 70, формула 264], или [7, с. 340, теорема 7b]). В нашем случае функция $h(z) = \alpha + \beta z - \varphi(z)$ принадлежит R_b. Будем искать ее интегральное представление в виде

$$h(z) = \int_0^b \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Тогда функция

$$F(\zeta) := h(-\zeta) = \int_0^b \frac{f(t)dt}{t+\zeta}$$

может рассматриваться как преобразование Стилтьеса функции f, сосредоточенной на полуинтервале $[0,b)$. Поэтому в соответствии с упомянутой формулой обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}(F(-x-i0) - F(-x+i0)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(h(x+i0) - h(x-i0)) = \qquad (3.1)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\varphi(x-i0) - \varphi(x+i0)).$$

Заметим, что при $\mathrm{Re}(z) \in (0,b)$ для главного значения логарифма справедливо равенство $\ln((z-b)/z) = \ln(z-b) - \ln z$. Следовательно,

$$\varphi(x \pm i0) =$$

$$= \frac{1}{-b + (b - x \mp i0)(\ln((x-b) \pm i0) - \ln(x \pm i0))}.$$

Воспользовавшись для вычисления правой части формулой $\ln(x \pm i0) = \ln|x| \pm i\pi\theta(-x)$, где θ – функция Хевисайда, имеем

$$\varphi(x \pm i0) =$$

$$= \frac{1}{-b + (b - x \mp i0)\left(\ln\frac{|x-b|}{|x|} \pm i\pi\theta(-x+b) \mp i\pi\theta(-x)\right)},$$

что после преобразований приобретает вид

$$\varphi(x \pm i0) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{-b+(b-x)\ln\frac{x-d}{x}}, \text{ если } x \in (-\infty,0) \cup [b,\infty); \\ \dfrac{1}{-b+(b-x)\left(\ln\frac{b-x}{x} \pm i\pi\right)}, \text{ если } x \in [0,b). \end{cases}$$

Подставляя это в (3.1), заключаем, что искомая функция f сосредоточена на полуинтервале $[0,b)$ и имеет на нем вид

$$f(x)=\frac{b-x}{\left(-b+(b-x)\ln\frac{b-x}{x}\right)^2+(\pi(b-x))^2},$$

а потому

$$\varphi(z)=\frac{2}{3b}-\frac{2}{b^2}z-$$
$$-\int_0^b\frac{(b-t)dt}{\left(\left(-b+(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2+(\pi(b-t))^2\right)(t-z)}$$

(после замены $x=\ln\frac{b-t}{t}$ эта формула может быть проверена также с помощью вычетов, см. [8, с. 230, формула (3.10)]). Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 2.1 и определением 2.5.

Проиллюстрируем предыдущую теорему следующим примером.

***Пример* 3.1.** Пусть $A=\frac{d}{dt}+bI$ – оператор из примера 2.1.

Имеем при $x\in L^p(\mathbb{R})$

$$\int_0^b(b-t)R(t,A)x(u)dt=\int_0^b(b-t)r_{t-b}*x(u)dt=$$
$$=\int_0^b(b-t)\left(-\int_0^\infty e^{(t-b)s}x(u-s)ds\right)dt=$$
$$=\int_0^\infty x(u-s)\left(\int_0^b(t-b)e^{(t-b)s}dt\right)ds=$$
$$=\int_0^\infty x(u-s)\frac{(bs+1)e^{-bs}-1}{s^2}ds$$

(теорема Фубини применима, так как функция

$$\frac{(bs+1)e^{-bs}-1}{s^2}$$

принадлежит классу $L^q(\mathbb{R}_+)$).

Следовательно, уравнение

$$\int_0^b(b-t)R(t,A)x(u)dt=y(u)$$

имеет вид

$$\int_0^\infty x(u-s)\frac{(bs+1)e^{-bs}-1}{s^2}ds=y(u)$$

и может рассматриваться как уравнение Винера-Хопфа первого рода. В силу теоремы 3.1 для любого $y\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ последнее уравнение имеет единственное решение в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ $(1\le p<\infty)$, задаваемое равенством

$$x(u)=-\frac{4}{3b}y(u)-\frac{2}{b^2}y'(u)+$$
$$+\int_0^b\frac{(b-t)\int_0^\infty e^{(t-b)s}y(u-s)ds}{\left(-b+(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2+(\pi(b-t))^2}dt.$$

***Теорема* 3.2.** *Пусть $b>0$ и числа α и β удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{cases}\alpha-\dfrac{b^2}{2}\ge 0,\\[2mm] \alpha+\beta b+\dfrac{b^2}{2}\le 0,\\[2mm] \beta<0.\end{cases}$$

Если $A\in V_b(X)$, то уравнение

$$\alpha x+\beta Ax-\int_0^b t(b-t)R(t,A)xdt=y$$

для любого $y\in X$ имеет единственное решение

$$x=\int_0^b\frac{R(t,A)dt}{\left(\alpha-\frac{b^2}{2}+(\beta+b)t-t(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2+\pi^2}.$$

Доказательство. Из легко проверяемого равенства

$$\alpha-\frac{b^2}{2}+(\beta+b)z-z(b-z)\ln\frac{z-b}{z}=$$
$$=\alpha+\beta z-\int_0^b\frac{t(b-t)dt}{t-z}$$

следует, что функция

$$\varphi(z)=\alpha-\frac{b^2}{2}+(\beta+b)z-z(b-z)\ln\frac{z-b}{z},$$

где $\ln$ обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, а α и β удовлетворяют условиям теоремы, принадлежит классу Q_b и в качестве представляющей имеет меру, сосредоточенную на полуинтервале $[0,b)$ и равную на нём $t(b-t)dt$. Следовательно, функция $g=1/\varphi$ принадлежит R_b. Исходное уравнение имеет вид $\varphi(A)x=y$. С целью применить следствие теоремы 2.1 установим для функции g представление (1.1), где положено $a=0$ и $d\tau(t)=f(t)dt$. Как и в доказательстве теоремы 3.1, воспользовавшись комплексной формулой обращения преобразования Стилтьеса, получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}(g(x+i0)-g(x-i0)).$$

При этом

$$g(x\pm i0)=$$
$$=\frac{1}{\alpha-\frac{b^2}{2}+(\beta+b)x-x(b-x)(\ln((x-b)\pm i0)-\ln(x\pm i0))}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получаем после выкладок, аналогичных выкладкам, использовавшимся в доказательстве теоремы 3.1, что искомая функция f сосредоточена на полуинтервале $[0,b)$ и имеет на нем вид

$$f(t)=\frac{1}{\left(\alpha-\frac{b^2}{2}+(\beta+b)t-t(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2+\pi^2},$$

а потому

$$g(z)=$$

$$=\int_0^b\frac{dt}{\left(\left(\alpha-\frac{b^2}{2}+(\beta+b)t-t(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2+\pi^2\right)(t-z)}$$

(как и в доказательстве теоремы 3.1, эта формула может быть проверена с помощью вычетов, см. [8, с. 230, формула (3.10)]). Для завершения доказательства осталось воспользоваться следствием 2.1 и определением 2.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн*, *М.Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука, 1973. – 552 с.

2. *Атвиновский*, *А.А.* Об однозначной разрешимости одного класса операторных уравнений / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» : в двух томах. Т. 1. Математический анализ. – Минск : Ин-т матем. НАН Беларуси, 2012. – С. 28–32.

3. *Атвиновский*, *А.А.* Об интегральном представлении одного класса аналитических функций / А.А. Атвиновский // Изв. Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 3–7.

4. *Миротин*, *А.Р.* Обращение операторно-монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин // Труды института математики. – Минск. – 2004. – Т. 12, № 1. – С. 104–108.

5. *Haase*, *M.* The functional calculus for sectorial operators / M. Haase. – Basel : Birkhauser Verlag, 2006. – 392 p.

6. *Брычков*, *Ю.А.* Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М., 1977. – 286 с.

7. *Widder*, *D.V.* The Laplace transform / D.V. Widder. – Princeton, 1946. – 406 p.

8. *Евграфов*, *М.А.* Аналитические функции / М.А. Евграфов. – М. : Наука, 1991. – 447 с.

Поступила в редакцию 23.04.13.