Проблемы физики, математики и техники, № 2 (7), 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АРЕНСА-ЗИНГЕРА

А.Р. Миротин[1], **М.А. Романова**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*Полесский государственный университет, Пинск*

ON SOME CHARACTERIZATION OF ARENS-SINGER GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

A.R. Mirotin[1], **M.A. Romanova**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*Polesskiy State University, Pinsk*

Для случая максимальных полугрупп дана новая характеризация обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера. Показано, что установленный результат может применяться в задачах аппроксимации.

Ключевые слова: *алгебра обобщённых аналитических функций, полугруппа полухарактеров, граница Шилова, аппроксимация.*

A new characterization of generalized analytic functions in sense of Arens-Singer is given in the case of maximal semigroups. It is shown that this result can be applied to approximation problems.

Keywords: *algebra of generalized analytic functions, semigroup of semicharacters, Shilov boundary, approximation.*

Введение

Теория обобщенных аналитических функций на пространствах полухарактеров полугрупп берет свое начало с работы Р. Аренса и И.М. Зингера [1]. В настоящее время она превратилась в довольно развитый раздел функционального анализа, расположенный на стыке теории равномерных алгебр, абстрактного гармонического анализа и теории аналитических функций (см., например, монографии [2], [3], а также обзоры [4], [5] и [6]). Более общее, чем в [1], определение обобщенной аналитической функции было позднее дано в [7]. В заметке даны условия, при которых алгебра обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера совпадает с алгеброй обобщенных аналитических функций в смысле [7], [8]. Тем самым, при этих условиях получена другая, более простая характеризация аналитичности по Аренсу-Зингеру. Показано, что установленный результат может применяться также в задачах аппроксимации.

1 Используемые определения и примеры

Всюду ниже S – записываемая мультипликативно дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e, не являющаяся группой, $G = S^{-1}S$ – (дискретная) группа частных для S (см., например, [9]).

Определение **1.1.** Подполугруппа S группы G называется *максимальной*, если не существует подполугруппы S_1 группы G, отличной от S и G, для которой $S \subset S_1 \subset G$.

Пример **1.1.** Рассмотрим аддитивную группу $G = \boldsymbol{Z}$ целых чисел. Её максимальной подполугруппой является полугруппа $S = \boldsymbol{Z}_+$ неотрицательных целых чисел.

Пример **1.2.** Для аддитивной группы $\boldsymbol{Z}^{l+1}$ максимальной подполугруппой будут, например, полугруппа $S = \boldsymbol{Z}^l \times \boldsymbol{Z}_+$ $(l \in \boldsymbol{N})$.

Пример **1.3.** Пусть $G = \boldsymbol{Z}^2$,

$$S_\alpha = \{(m,n) \in \boldsymbol{Z}^2 \mid n \geq \alpha m\},$$

где α – отрицательное иррациональное число. Максимальность этой подполугруппы следует, например, из того, что отображение $G \to R{:}(m,n) \mapsto n - \alpha m$ является порядковым изоморфизмом групп, отображающим полугруппу S_α на подполугруппу $\{n - \alpha m \mid m,n \in \boldsymbol{Z}\} \cap \boldsymbol{R}_+$ группы $\boldsymbol{R}$, задающую на $\boldsymbol{R}$ архимедов порядок, а такая подполугруппа всегда максимальна (см., например, [3, теорема 8.1.3]).

Для формулировки основного результата нам потребуется определенная подготовка.

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\overline{\boldsymbol{D}} = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| \leq 1\}$, не являющийся тождественным нулем. Характерами называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров далее обозначается $\hat{S}$, а его подмножество, состоящее из неотрицательных полухарактеров, – $\widehat{S}_{+}$. Наделенные топологией поточечной сходимости это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 ($\widehat{S}$ компактно как замкнутое подмножество в $\bar{\boldsymbol{D}}^{S}$). (Компактную) группу характеров полугруппы *S* будем обозначать *X*.

Отметим, что степень ρ^0 по определению есть индикатор носителя полухарактера $\rho \in \widehat{S}_{+}$, и что $\rho^z \in \widehat{S} \setminus \mathrm{X}$ при $\rho \in \widehat{S}_{+}$, $\rho \neq 1$, $z \in \Pi$, где $\Pi := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ (см. [1, § 7]).

Далее через ∂_A обозначается граница Шилова равномерной алгебры A (см., например, [2]), сужение функции f на подмножество M ее области определения обозначается $f \mid M$. Пространство $\ell_1(S)$ определяется как множество всех таких комплекснозначных функций *f* на S с не более чем счетным носителем, для которых

$$\|f\| = \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty.$$

Определение **1.2** [1]. Комплекснозначная функция F на $\widehat{S} \setminus X$ называется обобщенной аналитической в смысле Аренса-Зингера, если *F* может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\widehat{S} \setminus X$ функциями вида

$$\widehat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s),$$

где $f \in \ell_1(S)$, $\psi \in \widehat{S}$.

Другими словами, *F* может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\widehat{S} \setminus X$ *аналитическими полиномами*, т. е. полиномами вида

$$p = \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{s}_k,$$

где $c_k \in \boldsymbol{C}, s_k \in S$, а функция $\hat{s}$ на $\widehat{S}$ определяется для $s \in S$ равенством $\hat{s}\ (\psi) = \psi(s)$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\widehat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле Аренса-Зингера, обозначим $A_0(\widehat{S})$ (фактически она зависит от S, а не только от $\widehat{S}$).

Определение **1.3** [7]. Комплекснозначную функцию F на $\widehat{S} \setminus \mathrm{X}$ будем называть обобщенной аналитической, если для любых полухарактеров ρ, ψ из $\widehat{S} \setminus \mathrm{X}$, $\rho \geq 0$ отображение $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитично в открытой правой полуплоскости Π и непрерывно в +0.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\widehat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле определения 1.3, обозначим $A(\widehat{S})$.

Известно [8], что $A_0(\widehat{S}) \subset A(\widehat{S})$, причём строгое включение возможно. Основной целью данной заметки является доказательство следующей теоремы.

2 Характеризация обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера для случая максимальных полугрупп

Теорема **2.1.** *Пусть полугруппа S максимальна в группе G. Тогда алгебра $A(\widehat{S})$ совпадает с $A_0(\widehat{S})$, если и только если $\partial_{A(\hat{S})} = X$.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что $\partial_{A_0(\hat{S})} = X$ [1, теорема 4.6].

Достаточность. Пусть $\partial_{A(\hat{S})} = X$. Тогда отображение сужения $F \mapsto F\,|X$ есть изометрический изоморфизм алгебры $A(\widehat{S})$ и некоторой равномерной алгебры $A(X)$ на группе *X*. Так как $A(\widehat{S})$ инвариантна относительно действия группы *X* (т. е. вместе с функцией *F* содержит и все функции $F_\chi : \psi \mapsto F(\chi\psi)$, $\chi \in X$), то этим же свойством обладает и $A(X)$. Обозначим через S_1 подполугруппу группы *G*, порожденную носителями преобразований Фурье функций из $A(X)$. В силу [10, предложение 4.1.8] алгебра $A(X)$ равна алгебре A_{S_1}, состоящей из всех непрерывных на *X* функций, преобразование Фурье которых сосредоточено на полугруппе S_1.

Пусть $a \in S$. Свойство ортогональности характеров компактной группы влечет, что носителем преобразования Фурье сужения $\hat{a}\ |X$ служит множество $\{a\}$. Поэтому $S \subseteq S_1$.

Предположим, что $S_1 = G$. Тогда алгебра $A_{S_1} = A(X)$ совпадает с алгеброй $C(X)$ всех непрерывных функций на *X* (т. е. множество *X* является интерполяционным для алгебры $A(\widehat{S})$ в смысле [8]). Покажем, что это невозможно. Для этого установим сначала, что существует строго положительный полухарактер $\rho_0 \in \widehat{S}_{+}$, отличный от 1. Пусть $G(S) = S^{-1} \cap S$ – максимальная подгруппа полугруппы *S*, $H = G / G(S)$ – фактор-группа, и $\pi\colon G \to H$ – канонический гомоморфизм. Тогда множество $T := \pi(S)$, как легко проверить, есть максимальная подполугруппа группы *H*, порождающая *H* и такая, что группа $G(T)$ тривиальна. При этих условиях полугруппа *T* задает на группе *H* архимедов порядок по следующему правилу: $x \leq y$, если и только если $x^{-1}y \in T$ (см. [3, теорема 8.1.3] или [11]). В соответствии с известной теоремой Гёльдера полугруппа *T* порядково изоморфна подполугруппе аддитивной полугруппы $\boldsymbol{R}_{+}$ (см., например, [11, глава XI, теорема 2]). Значит, на ней существует строго положительный полухарактер $r \neq 1$ (например, $r(s)=e^{-s}$, если считать, что $T \subset \boldsymbol{R}_+$), и осталось положить $\rho_0 = r \circ \pi$.

Воспользуемся гармонической мерой μ_{ρ_0} на X, построенной в [1]. Интеграл по мере μ_{ρ_0} определяется для любой ограниченной борелевской функции g на X формулой

$$\int_X g d\mu_{\rho_0} = \frac{1}{\pi}\int_{\boldsymbol{R}} g(\rho_0^{iv})\frac{dv}{1+v^2}.$$

Известно [1, теорема 5.7], что некоторая замкнутая подгруппа $X^{\rho_0} \subset X$ является носителем гармонической меры μ_{ρ_0}. Выберем компакт $K \subset X^{\rho_0}$, $K \neq X^{\rho_0}$ с непустой внутренностью (относительно X^{ρ_0}). Тогда $\mu_{\rho_0}(K)>0$. Пусть ненулевая функция $g \in C(X)$ обращается в нуль на K (лемма Урысона), и пусть функция F из $A(\widehat{S})$ такова, что ее сужение $F|X$ есть g. В частности, $F|K$=0. Для комплексного $z=iy$, $y \in \boldsymbol{R}$ положим $f(z) := g(\rho_0^z)$. По условию теоремы $f(iy)=0$, если $y \in B := \{y \in \boldsymbol{R} \mid \rho_0^{iy} \in K\}$. Но равенство

$$\mu_{\rho_0}(K) = \int_X 1_K d\mu_{\rho_0} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\boldsymbol{R}} 1_K(\rho_0^{iv})\frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\pi}\int_B \frac{dv}{1+v^2}$$

показывает, что множество B имеет положительную меру Лебега, а потому $f=0$ по граничной теореме единственности Лузина-Привалова. Таким образом, $g(\rho_0^z)=0$ при всех $z=iy$, $y \in \boldsymbol{R}$. Поскольку множество $\{\rho_0^{iy} \mid y \in \boldsymbol{R}\}$ плотно в X^{ρ_0} [1, теорема 7.2], получаем по непрерывности, что $g \mid X^{\rho_0}=0$. Таким образом, $F| X^{\rho_0}$ =$g| X^{\rho_0}$ =0, – противоречие.

Теперь из максимальности полугруппы S следует, что $S_1 = S$. А так как в силу [1, теоремы 2.6 и 4.6] алгебра A_S изометрически изоморфна $A_0(\widehat{S})$, то теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Пусть полугруппа S задает на группе G архимедов порядок. Тогда алгебра $A(\widehat{S})$ совпадает с $A_0(\widehat{S})$.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, если полугруппа S задает на группе G архимедов порядок, то она максимальна. Кроме того, такая полугруппа порядково изоморфна подполугруппе группы $\boldsymbol{R}$ вида $H \cap \boldsymbol{R}_+$ для некоторой подгруппы H группы $\boldsymbol{R}$ [11]. Поэтому она совпадает со своей слабой оболочкой, является конусом и не содержит нетривиальных простых идеалов (определения этих понятий см. в [12]). Теперь из основной теоремы в [12] следует, что в случае архимедова порядка $\partial_{A(\hat{S})} = X$, и осталось воспользоваться предыдущей теоремой.

Покажем, как основной результат данной работы может применяться в задачах аппроксимации (ниже $\boldsymbol{T}$ – одномерный тор, т. е. группа вращений окружности).

***Следствие* 2.2.** *Обозначим через $A(\boldsymbol{T}^l \times \overline{\boldsymbol{D}})$ алгебру функций, непрерывных на $\boldsymbol{T}^l \times \overline{\boldsymbol{D}}$ и аналитических в $\boldsymbol{D}$ по второму аргументу (l – натуральное число). Пусть $F \in A(\boldsymbol{T}^l \times \overline{\boldsymbol{D}})$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $K \subset \boldsymbol{T}^l \times \boldsymbol{D}$ найдётся такой полином p от переменных $t_1,\ldots,t_l$ и z, что*

$$|F(t,z)-p(t,z)|<\varepsilon$$

для всех $(t,z) \in K$.

Доказательство. Пусть $G=\boldsymbol{Z}^{l+1}$, $S=\boldsymbol{Z}^l \times \boldsymbol{Z}_+$ $(l \in \boldsymbol{N})$ как в примере 1.2. Так как любую точку полугруппы S можно представить в виде

$$(m,n)=(m_1,\ldots,m_l,n)=\sum_{j=1}^{l} m_j e_j + n e_{l+1},$$

где $(e_j)_{j=1}^{l+1}$ – стандартный базис в $\boldsymbol{R}^{l+1}$, то полухарактеры этой полугруппы имеют вид

$$\psi(m,n)=t^m z^n (m \in \boldsymbol{Z}^l, n \in \boldsymbol{Z}_+),$$

где $t_j=\psi(e_j) \in \boldsymbol{T}$, $t=(t_j)_{j=1}^l \in \boldsymbol{T}^l$, $z=\psi(e_{j+1}) \in \overline{\boldsymbol{D}}$. Следовательно, полугруппу $\widehat{S}$ в этом примере можно отождествить с $\boldsymbol{T}^l \times \overline{\boldsymbol{D}}$, а группу X – с $\boldsymbol{T}^{l+1}$. При этом алгебра $A(\widehat{S})$ отождествляется с алгеброй $A(\boldsymbol{T}^l \times \overline{\boldsymbol{D}})$. Поскольку полугруппа S удовлетворяет условиям основной теоремы из [12], то $\partial_{A(\hat{S})}=X$. Таким образом, имеем $A(\widehat{S})=A_0(\widehat{S})$ в силу теоремы, доказанной выше. Пусть $F \in A(\boldsymbol{T}^l \times \overline{\boldsymbol{D}})$. Так как аналитические полиномы в нашем случае имеют вид

$$p(t,z)=\sum_{m,n} c_{mn} t^m z^n,$$

то из определения аналитичности по Аренсу-Зингеру вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $K \subset (\boldsymbol{T}^l \times \overline{\boldsymbol{D}}) \backslash \boldsymbol{T}^{l+1}$ найдётся такой аналитический полином $p(t,z)$, что $|F(t,z)-p(t,z)|<\varepsilon$ для всех $(t,z) \in K$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arens, R.* Generalized analytic functions / R. Arens, I.M. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81, № 2. – P. 379–393.

2. *Гамелин, Т.* Равномерные алгебры / Т. Гамелин. – М. : Мир, 1973. – 336 с.

3. *Rudin, W.* Fourier analysis on groups / W. Rudin. – N.Y. : Interscience Publishers, 1962. – 285 p.

4. *Helson, H.* Analyticity on compact abelian groups / H. Helson // Algebras in analysis: proceedings of instructional conference and NATO Advanced Study Institute, Birmingem, 1973 / Kluwer; H. Helson, ed. – London, 1975. – P. 1–62.

5. *Tonev, T.* Analytic functions on compact groups and their applications to almost periodic functions / T. Tonev, S.A. Grigoryan // Contemporary Math. – 2003. – Vol. 328, № 2. – P. 299–322.

6. *Grigoryan, S.A.* Shift-invariant algebras on groups / S.A. Grigoryan, T. Tonev // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 363, № 1. – P. 111–127.

7. *Миротин, А.Р.* Теорема Пэли-Винера для конусов в локально компактных абелевых группах / А.Р. Миротин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 35–44.

8. *Миротин, А.Р.* Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций / А.Р. Миротин, М.А. Романова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – № 3. – С. 51–59.

9. *Клиффорд, А.* Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 285 с.

10. *Grigoryan, S.A.* Shift-invariant uniform algebras on groups / S.A. Grigoryan, T.V. Tonev. – N. Y. – Basel : Birkhauser, 2006. – 292 p.

11. *Фукс, Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1965. – 342 с.

12. *Романова, М.А.* Вычисление пространства максимальных идеалов и границы Шилова некоторых алгебр обобщенных аналитических функций / М.А. Романова // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. – 2006. – № 2 (15). – С. 16–22.

Поступила в редакцию 14.02.11.