

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И ЗАДАНИЯ

к лабораторным работам по курсу "Методы
вычислений" для студентов-заочников
5 курса специальности "Математика"

Часть 2

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Фраўнцэска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

Гомель 1987

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом
математического факультета Гомельского государственного
университета

Составители: Н.Т. Воинов,
С.И. Голик,
М.И. Ждан,
Л.А. Лурганова

Настоящие методические указания являются второй частью по курсу "Методы вычислений" для студентов заочного факультета специальности "Математика" – 2013. Они призваны облегчить изучение теоретического материала и способствовать эффективному приобретению практических навыков в области вычислительной математики.

В работе рассматриваются вопросы решения линейных и нелинейных алгебраических систем и уравнений, при этом изучаются как прямые, так и итерационные методы их решения. Рассмотрены способы отыскания собственных чисел и соответствующих им собственных векторов. В конце каждого раздела приводятся решения примеров указанными методами и условия задач для самостоятельной работы.

РАЗДЕЛ I. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

К линейным системам алгебраических уравнений приводятся многие задачи численного анализа. Из курса высшей алгебры известно, что существуют различные способы решения линейных систем. Используемые практически методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) подразделяются на две группы: 1) так называемые точные методы и 2) приближенные методы.

Точные методы характеризуются тем, что они позволяют для любых систем найти точные значения неизвестных после конечного числа арифметических операций, каждая из которых выполняется точно. Чаще всего эти методы реализуются в два этапа. На первом этапе преобразуют систему к одному из простейших видов. На втором этапе решают упрощенную систему и получают значения неизвестных.

Итерационные методы характеризуются тем, что точные решения в них получают в результате бесконечного процесса приближений.

В настоящее время точные методы целесообразно применять для решения систем порядка 10^3 , итерационные методы – 10^6 .

§ I. Методы последовательного исключения неизвестных
([2], с. 372-381; [3], с. 91-99; [4], с. 272-287; [5], с. 91)

Рассмотрим задачу решения системы

$$Ax = b,$$

где $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$;

где $A \neq 0$.

Наиболее известным из точных методов решения СЛАУ является метод исключения Гаусса. Этим методом получают систему с треугольной или диагональной матрицей, решение которой не представляет труда.

п.1.1. Рассмотрим схему исключения с ведущим элементом. Полагая, что $a_{11} \neq 0$, первое уравнение исходной системы разделим на коэффициент a_{11} :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{i,m+1} \quad (i=1 \div m) \quad (I.1)$$

в результате чего получим уравнение

$$x_1 + \sum_{j=2}^n a_{ij}^{(1)} x_j = a_{i,m+1}^{(1)}, \text{ где } a_{ij}^{(1)} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}, a_{i,m+1}^{(1)} = \frac{a_{i,m+1}}{a_{11}} \quad (i=1).$$

Затем, из каждого оставшегося уравнения вычитается первое уравнение, умноженное на соответствующий коэффициент. В результате чего, эти уравнения преобразуются к виду

$$\sum_{j=2}^n a_{ij}^{(1)} x_j = a_{i,m+1}^{(1)} \quad (i \geq 2), \text{ где } a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{11} \cdot a_{ij}^{(1)}, a_{i,m+1}^{(1)} = a_{i,m+1} - a_{11} \cdot a_{i,m+1}^{(1)}.$$

Первое неизвестное x_1 оказалось исключенным из всех уравнений, кроме первого. Далее предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Разделим второе уравнение на коэффициент $a_{22}^{(1)}$ и исключим неизвестное x_2 из всех остальных уравнений, и так далее. В результате последовательного исключения неизвестных система уравнений (I.1) преобразуется к треугольному виду

$$x_i + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j = a_{i,m+1}^{(i)}, \quad i=1 \div m \quad (I.2)$$

или в более подробной записи

$$\left. \begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n &= a_{1,m+1}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= a_{2,m+1}^{(2)} \\ \dots &\dots \\ x_{m-1} + a_{m-1,n}^{(m-1)} x_n &= a_{m-1,m+1}^{(m-1)} \\ x_m &= a_{m,m+1}^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (I.2)$$

Приведение системы (I.1) к виду (I.2) называют прямым ходом метода Гаусса, а нахождение $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1$ из системы (I.2) - обратным ходом этого метода:

$$x_m = a_{m,m+1}^{(m)}; \quad x_i = a_{i,m+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \quad (i=m-1, m-2, \dots, 2, 1).$$

Изложенный выше метод Гаусса можно применять в том случае, когда все главные миноры матрицы отличны от нуля.

п.1.2. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Его отличие от описанной в п.1.1 схемы метода Гаусса состоит в следующем. Пусть по ходу исключения неизвестных получена система уравнений:

$$\begin{aligned} x_i + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j &= a_{i,m+1}^{(i)}, \quad i=1, 2, \dots, k, \\ \sum_{j=k+1}^n a_{ij}^{(k)} x_j &= a_{i,m+1}^{(k)}, \quad i=k+1, k+2, \dots, m. \end{aligned}$$

Найдем такое ℓ , что $|a_{k+1,\ell}^{(k)}| = \max_{j \geq k+1} |a_{k+1,j}^{(k)}|$. Элемент с номером ℓ в строке называется главным элементом, то есть максимальным по модулю в строке. Далее, переобозначим $x_{k+1} = x_\ell$ и $x_\ell = x_{k+1}$ и произведем исключение неизвестной x_{k+1} из всех уравнений, начиная с $k+2$ -го. Такое переобозначение приводит к изменению порядка исключения неизвестных и во многих случаях существенно уменьшает чувствительность решения к округлениям при вычислениях.

п.1.3. Применение метода Гаусса для вычисления определителя

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Рассмотрим линейную систему $Ax = 0$. При решении этой системы по методу Гаусса мы заменяли матрицу A треугольной матрицей B (см. формулу (1.2)), в результате получалась эквивалентная система: $Bx = 0$. Элементы матрицы B последовательно получались из элементов матрицы A и дальнейших вспомогательных матриц $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ с помощью следующих элементарных преобразований:

- 1) деления на ведущие элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$, которые предполагались отличными от нуля, и
- 2) вычитания из строк матриц A и A_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) чисел, пропорциональных элементам соответствующих ведущих строк. Поэтому

$$\det B = 1 = \frac{\det A}{a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}}$$

Следовательно, $\det A = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}$.

п.1.4. Применение метода Гаусса для нахождения обратной матрицы

Пусть дана неособенная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Для нахождения ее обратной матрицы $A^{-1} = (x_{ij})$ используем основное соотношение $AA^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Переменная матрицы A и A^{-1} , будем иметь n систем уравнений относительно n^2 неизвестных x_{ij} :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Полученные n систем линейных уравнений для $j = 1, 2, \dots, n$, имеющих одну и ту же матрицу A и различные свободные члены, одновременно решаются методом Гаусса.

§ 2. Методы, основанные на представлении матрицы в виде произведения двух треугольных матриц [2], с.391-394; [3], с.99-103; [4], с.287-294)

Пусть дана система уравнений

$$Ax = \ell, \quad (2.1)$$

где $A = (a_{ij})_{n \times n}$ - квадратная матрица порядка n , и

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец.}$$

6

Известна (см. [4]) следующая

Теорема 2.1. Всякую квадратную матрицу A , имеющую отличные от нуля главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \Delta_n = \det A \neq 0,$$

можно представить в виде произведения двух треугольных матриц различных структур (нижней и верхней), причем это разложение будет единственным, если заранее зафиксировать диагональные элементы одной из треугольных матриц (например, положить их равными 1).

Приведем способ отыскания элементов указанных треугольных матриц. Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы $B = (b_{ij})_{n \times n}$ и верхней треугольной матрицы $C = (c_{ij})_{n \times n}$ с единичной диагональю, то есть

$$A = B \cdot C, \quad (2.2)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда элементы b_{ij} и c_{ij} , учитывая равенство (2.2), определяются по формулам

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1}, & c_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_{ii}} \\ b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}, & c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad (i < j) \end{cases} \quad (2.3)$$

п.2.1. Метод квадратного корня для решения СЛАУ

Пусть матрица A системы (2.1) является эрмитовой, т.е. совпадает со своей комплексно-сопряженной транспонированной матрицей.

Представим матрицу A в виде

$$A = S^* D S, \quad (2.4)$$

где $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$ - верхняя треугольная матрица,

S^* - матрица, сопряженная к S , D - диагональная мат-

7

рица: $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$.

Чтобы получить разложение (2.4), обозначим $S = (s_{ij})$, $D = (d_{ii}, \delta_{ij})$. Таким образом, чтобы найти элементы матриц D и S в (2.4), нужно перемножить матрицы S^* , D и S и приравнять соответствующие элементы матриц A и $S^* D S$.

Имеем $(DS)_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik} s_{kj} = d_{ii} s_{ij}$; $(S^* D S)_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{s}_{ki} d_{kk} s_{kj}$, так как $s_{ij} = (\bar{s}_{ji})_{n \times n}$, где черта означает комплексное сопряжение. В результате получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^n \bar{s}_{ki} d_{kk} s_{kj} = a_{ij} \quad (2.5)$$

Эту систему уравнений можно решать рекуррентно. Так как S — верхняя треугольная матрица, то $s_{ki} = 0$ при $k > i$ и $\bar{s}_{ki} = 0$ при $k < i$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk} = \sum_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk} + \bar{s}_{ii} s_{ij} d_{ii} + \sum_{k=i+1}^n \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk} = \sum_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk} + \bar{s}_{ii} s_{ij} d_{ii} = a_{ij}$$

Так как матрица A эрмитова, то достаточно произвести сравнение элементов, стоящих на главной диагонали и справа от нее.

При $i = j$ имеем

$$|s_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}$$

Выбирая

$$d_{ii} = \text{sign}(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}), \quad (2.6)$$

находим

$$s_{ii} = \sqrt{|a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}|} \quad (2.7)$$

При $i < j$ получаем

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk}}{\bar{s}_{ii} d_{ii}} \quad (2.8)$$

Определитель матрицы A , очевидно, равен

$$\det A = \prod_{i=1}^n d_{ii} s_{ii}^2$$

Если матрица A — вещественная и ее главные миноры положительны, то $D = E$ (единичная матрица) и формулы (2.6), (2.7), (2.8) записываются в виде

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii}}, \quad s_{ij} = \frac{a_{ij}}{s_{ii}} \quad (j=2, \dots, n), \quad s_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{kj}^2};$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj}}{s_{ii}} \quad (i < j).$$

Нужно заметить, что при действительных a_{ij} могут получиться чисто мнимые значения s_{ij} . Но так как вычисления с чисто мнимыми величинами несколько не труднее, чем с действительными, то это не вызовет дополнительных трудностей. Если, кроме того, матрица A положительно определенная, то мнимых величин вообще не будет.

Итак, формулы (2.6), (2.7), (2.8) дают возможность находить элементы матриц S^* , D , S . Теперь решение уравнения (2.1) сводится к последовательному решению двух систем

$$S^* D y = b \quad \text{и} \quad S^* x = y \quad (2.9)$$

Решая их, получаем

$$y_i = \frac{b_i}{s_{ii} d_{ii}}, \quad y_k = \frac{b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{s}_{ki} y_i d_{ii}}{s_{kk} d_{kk}} \quad (k=2, \dots, n) \quad (2.10)$$

и

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \quad x_k = \frac{y_k - \sum_{i=k+1}^n s_{ki} x_i}{s_{kk}} \quad (k=n-1, n-2, \dots, 1) \quad (2.11)$$

п.2.2. Метод Халецкого для решения СЛАУ

Для нахождения решения системы (2.1) будем считать, что матрица A представлена в виде (2.2), причем элементы матриц B и C определяются по формулам (2.3).

Тогда искомым вектор x вычисляется из цепи уравнений

$$B y = b \quad \text{и} \quad C x = y \quad (2.12)$$

Так как матрицы B и C являются треугольными [см. (2.2)], то системы из (2.12) легко решаются. Имеем

$$\begin{cases} y_i = \frac{b_i}{c_{ii}} \\ y_i = \frac{1}{c_{ii}} (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} y_k) \quad (i=1) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k \quad (i < n) \end{cases} \quad (2.13)$$

Из формул (2.13) видно, что числа y_i выгодно вычислять вместе с коэффициентами c_{ij} .

Если же матрица A — симметрическая, то $c_{ij} = \frac{b_{ij}}{c_{ii}} \quad (i < j)$. Метод Халецкого удобен для работы на ЭЕМ, т.к. в этом случае операции накопления (2.3) можно производить без записи промежу-

точных результатов.

§ 3. Итерационные методы решения СЛАУ ([2], с. 424-442; [3], с. 106-119; [4], с. 294-306)

Итерационные методы дают возможность найти решение системы как предел бесконечного вычислительного процесса, позволяющего по уже найденным приближениям построить следующие приближения.

Пусть в n -мерном векторном пространстве дана последовательность векторов $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$, $k=1, 2, \dots$. Вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ называют пределом этой последовательности, если существует каждый из n указанных пределов

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Аналогично, если дана последовательность квадратных матриц $A = (a_{ij}^k)_{n \times n}$, $k=1, 2, \dots$, то матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ называется пределом этой последовательности, если существуют n^2 пределов последовательности:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k = a_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, n).$$

Говорят, что последовательность векторов x^k сходится к x по норме, если $\|x^k - x\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Особенностью итерационных процессов является их самоисправляемость и простота реализации их на ЭВМ.

п.3.1. Метод простой итерации решения СЛАУ

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений $Ax = f$ с неособенной матрицей. В методе последовательных приближений (итераций) ее предварительно приводят к виду

$$x = Bx + \ell, \quad (3.1)$$

где $B = -C^{-1}D$, $\ell = C^{-1}f$; $A = C + D$, $\det C \neq 0$ (например, C - диагональная матрица).

Пусть известно некоторое начальное приближение $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ к точному решению $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ системы (3.1). Все последующие приближения определяются по формуле

$$x^{k+1} = Bx^k + \ell \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

Если последовательность приближений x^k сходится к некоторому предельному вектору x^* , то он будет решением системы. Действительно, если в равенстве (3.2) перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$, считая, что $x^k \rightarrow x^*$, то в пределе получим $x^* = Bx^* + \ell$.

10

п.3.2. Условия сходимости метода простой итерации

Для выяснения условий сходимости $x^k \rightarrow x^* (k \rightarrow \infty)$ докажем ряд теорем.

Теорема 3.1. Для того, чтобы последовательность приближений x^k сходилась, достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы:

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.3)$$

Доказательство. Найдем выражение любого приближения x^k через x^0 :

$$\begin{aligned} x^k &= Bx^{k-1} + \ell = B(Bx^{k-2} + \ell) + \ell = B^2x^{k-2} + (E+B)\ell = \dots \\ &= B^kx^0 + (E+B+B^2+\dots+B^{k-1})\ell. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (3.3) и определение, что при $|\lambda_i| < 1$

$$E + B + B^2 + \dots + B^{k-1} = (E - B)^{-1} - B^k,$$

сразу следует, что при $k \rightarrow \infty$ $B^k \rightarrow 0$ и

$$E + B + B^2 + \dots + B^{k-1} \rightarrow E + B + B^2 + \dots = (E - B)^{-1}$$

получим, что $x^k \rightarrow (E - B)^{-1}\ell = x^*$.

Теорема 3.2. Если требовать, чтобы последовательность x^k сходилась к x^* при любом начальном приближении x^0 , то условие (3.3) является и необходимым.

Доказательство. Пусть для всякого начального приближения x^0 будет $x^k \rightarrow x^*$. Имеем $x^k - x^* = (Bx^{k-1} + \ell) - (Bx^{k-2} + \ell) = B(x^{k-1} - x^{k-2}) = \dots = B^k(x^0 - x^*)$. При $k \rightarrow \infty$ разность $x^k - x^* \rightarrow 0$, поэтому последний член в цепи равенств должен стремиться к нулю, каким бы ни был вектор $x^0 - x^*$. Отсюда следует, что $B^k \rightarrow 0$. Последнее будет верно лишь в том случае, когда верно неравенство (3.3).

Применение теорем 3.1 и 3.2 возможно при известных собственных значениях матрицы или по крайней мере их границ. Определение собственных чисел матрицы B часто является непростой задачей и требует большого числа арифметических операций.

Рассмотрим более простые, но достаточные признаки сходимости.

Теорема 3.3. Для того чтобы последовательность приближений x^k в методе простой итерации сходилась, достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы B была меньше единицы.

11

Доказательство. Если $\|B\| < 1$, то согласно лемме о том, что модули собственных значений матрицы не превосходят любой из ее норм, следует, что все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы, и по теореме 3.1 последовательность x^k сходится.

Непосредственным следствием теоремы 3.3 является Теорема 3.4. Последовательность x^k в методе простой итерации сходится, если для матрицы B выполняется одно из неравенств

$$1. \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (i=1+n) \quad 2. \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (j=1+n)$$

п.3.3. Метод Зейделя решения СЛАУ

Рассмотрим сначала случай канонической формы системы для метода итераций

$$x = Bx + \ell \quad (3.4)$$

В методе простой итерации следующее приближение x^{k+1} находится по предыдущему x^k путем подстановки x^k в правую часть всех уравнений системы (3.4), т.е.

$$\left. \begin{aligned} x_1^{k+1} &= b_{11}x_1^k + b_{12}x_2^k + \dots + b_{1n}x_n^k + \ell_1 \\ x_2^{k+1} &= b_{21}x_1^k + b_{22}x_2^k + \dots + b_{2n}x_n^k + \ell_2 \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= b_{n1}x_1^k + b_{n2}x_2^k + \dots + b_{nn}x_n^k + \ell_n \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

В этой операции опускаются две возможности улучшения итераций

- 1) разумный выбор порядка уравнений для подстановки и
- 2) немедленный ввод в вычисления каждого из полученных исправленных значений неизвестных.

Предположим, что для перехода от приближения x^k к следующему x^{k+1} , нами выбран какой-то порядок привнесения уравнений для подстановки. Тогда в методе Зейделя выполняются итерации следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{k+1} &= b_{11}^k x_1^k + b_{12}^k x_2^k + b_{13}^k x_3^k + \dots + \ell_1^k \\ x_2^{k+1} &= b_{21}^k x_1^{k+1} + b_{22}^k x_2^k + b_{23}^k x_3^k + \dots + \ell_2^k \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= b_{n1}^k x_1^{k+1} + b_{n2}^k x_2^{k+1} + \dots + b_{nn}^k x_n^k + \ell_n^k \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

После нахождения вектора x^{k+1} устанавливается порядок подстановки в уравнения значений x^{k+1} ($i=1+n$) и переходят к вычислению вектора x^{k+2} и т.д.

Порядок привнесения уравнений для подстановки x^{k+1} ($i=1+n$) получают исходя из принципа максимума погрешности $\varepsilon^k x^k x^k$.

Рассмотрим более подробно метод Зейделя, когда при итерациях порядок уравнений сохраняется: матрица B будет одинаковой на всех шагах, и составляющие x^k находятся из системы (3.6). Разложим матрицу B на сумму двух матриц H и F , где

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда равенства (3.5) примут вид

$$x^{k+1} = Hx^{k+1} + Fx^k + \ell,$$

откуда следует, что $(E-H)x^{k+1} = Fx^k + \ell$.

а так как

$$\det(E-H) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & -b_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

то матрица $E-H$ имеет обратную. Тогда равенство (3.6) равносильно

$$x^{k+1} = (E-H)^{-1} Fx^k + (E-H)^{-1} \ell. \quad (3.7)$$

Поэтому этот метод Зейделя равносильен методу простой итерации, примененному к системе

$$x = (E-H)^{-1} Fx + (E-H)^{-1} \ell.$$

п.3.4. О сходимости метода Зейделя

Из сказанного в конце п.3.3 следует, что для сходимости стационарного процесса Зейделя (3.5) при любом векторе x^k начального приближения необходимо и достаточно (см. теорему 3.1), чтобы все собственные значения матрицы $(E-H)^{-1}F$ были по модулю меньше единицы. Однако, если учесть, что $|(E-H)^{-1}| = \|E-H\|^{-1} = 1$, то можно записать следующие соотношения:

$$|(E-H)^{-1}F - \lambda E| = |(E-H)^{-1}[F - \lambda(E-H)]| = \\ = |(E-H)^{-1}| \cdot |F + \lambda H - \lambda E| = |F + \lambda H - \lambda E|.$$

Итак, верно

Теорема 3.5. Для того чтобы стационарный метод Зейделя сходиллся при любом начальном векторе приближения x , необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$|F + \lambda H - \lambda E| = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \lambda & \epsilon_{12} & \dots & \epsilon_{1n} \\ \lambda \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \lambda & \dots & \epsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \epsilon_{n1} & \lambda \epsilon_{n2} & \dots & \epsilon_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

были по модулю меньше единицы.

Лемма 3.1. Если в матрице $A = (a_{ij})_{n \times n}$ диагональные элементы a_{ii} ($i = 1, \dots, n$) доминируют по строкам или по столбцам, то есть если

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{или} \quad \sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad (j = 1, \dots, n),$$

то определитель матрицы A отличен от нуля.

Теорема 3.6. Для сходимости стационарного метода Зейделя (3.7) достаточно, чтобы выполнялось какое-либо одно из условий:

$$\|B\| = \max_i \sum_{j=1}^n |\epsilon_{ij}| < 1 \quad \text{или} \quad \|B\| = \max_j \sum_{i=1}^n |\epsilon_{ij}| < 1$$

Доказательство. Без ограничения общности докажем достаточность первого условия. Таким образом, нужно показать, что при выполнении этого условия все корни (3.8) будут по модулю меньше единицы. Будем считать, что $|\lambda| \geq 1$, и рассмотрим сумму модулей недиагональных элементов строки номера i матрицы $F + \lambda(H - E)$:

$$|\lambda| \cdot |\epsilon_{i1}| + \dots + |\lambda| \cdot |\epsilon_{i,i-1}| + |\epsilon_{i,i+1}| + \dots + |\epsilon_{in}| \leq \\ \leq |\lambda| (|\epsilon_{i1}| + \dots + |\epsilon_{i,i-1}| + |\epsilon_{i,i+1}| + \dots + |\epsilon_{in}|) = |\lambda| \left(\sum_{j \neq i} |\epsilon_{ij}| \right) < \\ < |\lambda| (1 - |\epsilon_{ii}|) = |\lambda| - |\lambda| \cdot |\epsilon_{ii}| \leq |\lambda| - |\epsilon_{ii}| \leq |\lambda - \epsilon_{ii}|.$$

Таким образом, диагональные элементы матрицы $F + \lambda(H - E)$ доминируют по строкам, и согласно лемме 3.1 определитель этой матрицы отличен от нуля, а значение λ , для

14

которого $|\lambda| \geq 1$, не может быть корнем уравнения $Ax = 0$. Корни этого уравнения по модулю меньше единицы, и по теореме 3.5 стационарный метод Зейделя сходится.

п.3.5. Другая форма метода Зейделя

Эта форма требует предварительное преобразование системы $Ax = \ell$ к виду, в котором все диагональные коэффициенты отличны от нуля. Такое преобразование стремится выполнить, если оно возможно так, чтобы диагональные коэффициенты были наибольшими или даже доминирующими в соответствующих уравнениях.

Пусть взято какое-либо исходное приближение $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ к решению системы. Приближение x^{k+1} находят по приближению x^k с помощью соотношений

$$\begin{cases} a_{11} x_1^{k+1} + a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k + \dots + a_{1n} x_n^k = \ell_1, \\ a_{21} x_1^{k+1} + a_{22} x_2^{k+1} + a_{23} x_3^k + \dots + a_{2n} x_n^k = \ell_2, \\ \dots \\ a_{n1} x_1^{k+1} + a_{n2} x_2^{k+1} + a_{n3} x_3^{k+1} + \dots + a_{nn} x_n^{k+1} = \ell_n. \end{cases} \quad (3.9)$$

Если разложить матрицу A на сумму двух матриц B и C

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то равенства (3.9) можно записать в матричном виде

$$Bx^{k+1} + Cx^k = \ell,$$

или

$$x^{k+1} = -B^{-1}C x^k + B^{-1}\ell.$$

Откуда видно, что метод Зейделя в форме (3.9) равносложен методу простых итераций, примененному к системе в каноническом виде

$$x = -B^{-1}C x + B^{-1}\ell.$$

Для сходимости метода при любом векторе ℓ необходимо и достаточно, как следует из теорем 3.5 и 3.6, чтобы все собственные значения матрицы $-B^{-1}C$, то есть все корни уравнения $|-B^{-1}C - \lambda E| = 0$, были по модулю меньше единицы. Это условие иногда удобно записывать в виде

$$| -B^{-1}C - \lambda E | = | (-B^{-1})(C + \lambda B) | = | -B^{-1} | \cdot | C + \lambda B |.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3.7. Для того чтобы процесс Зейделя, определяемый равенствами (3.9), сходиллся при любых свободных членах b_i ($i=1:n$), необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

все были меньше единицы по модулю.

§ 4. Примеры

1. Решить СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Решение системы методом Гаусса приведем в матричной форме. Запишем расширенную матрицу системы. Рассмотрим сначала прямой ход метода Гаусса. Дадим первую строку матрицы системы на 2. Полученную строку умножаем на -3 и складываем со второй. Аналогично, умножаем первую строку на -1 и складываем ее с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1.5 \\ 0 & -1 & 0.5 & -1.5 \end{array} \right)$$

Продолжая аналогичную процедуру со второй и третьей строками, приходим к треугольной матрице:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Продолжаем преобразования обратного хода метода Гаусса. Умножим третью строку на 1,5 и сложим ее со второй, а затем умножим третью строку на -0,5 и результат сложим с первой строкой, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Отсюда следует, что решение исходной системы будет $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$.

2. Вычислить определитель матрицы системы (4.1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для вычисления определителя матрицы A нужно выполнить только прямой ход метода Гаусса для решения системы уравнений $Ax = 0$. Такие преобразования были проделаны в примере 1. Имеем

$$a_{11}^{(0)} = 2, \quad a_{22}^{(0)} = 1, \quad a_{33}^{(0)} = -1$$

(эти элементы в примере 1 взяты в квадратик). Таким образом,

$$\det A = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} a_{33}^{(0)} = -2.$$

3. Найти матрицу, обратную к матрице A , примера 2.

Матричная запись системы из п.1.3 с учетом вида матрицы A будет

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

На месте единичной матрицы после прямого и обратного хода метода Гаусса получится обратная матрица к матрице A . Продолжая указанные в примере 1 операции, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & -1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & -0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 & -1.5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить СЛАУ методом квадратного корня ([3], с.31).

Для определенности рассмотрим систему ($n=3$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Все вычисления удобно располагать в следующей таблице:

Установка значений
"Томский государственный университет"
им. Ф. М. Скурякина
Ф. И. О. Т. А.

I	A			E	
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	e_1	R_1
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	e_2	R_2
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	e_3	R_3
	S_{11}	S_{12}	S_{13}	y_1	z_1
	S_{21}	S_{22}	S_{23}	y_2	z_2
	S_{31}	S_{32}	S_{33}	y_3	z_3
	x_1	x_2	x_3		

где R_i — сумма элементов каждой строки; элементы z_i ($i=1,2,3$) находятся по формулам:

$$z_i = \frac{R_i}{S_{ii} d_{ii}}, \quad y_k = \frac{R_k - \sum_{i=1}^{k-1} S_{ki} z_i d_{ii}}{S_{kk} d_{kk}}$$

Затем вычисляются y_i и осуществляется контроль: сумма элементов по строкам второго раздела должна равняться соответствующему элементу последнего столбца. После этого находится решение x_i исходной системы. Для контроля вычисляют числа $\tilde{x}_i$, заменив в формулах y_i на z_i . Если все вычисления проведены верно, то должно быть $\tilde{x}_i = x_i + 1$.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} 4,25 x_1 - 1,48 x_2 + 0,73 x_3 = 1,44 \\ -1,48 x_1 + 1,73 x_2 - 0,85 x_3 = 2,73 \\ 0,73 x_1 + 1,85 x_2 + 1,23 x_3 = -0,64 \end{cases}$$

Проведя соответствующие вычисления, будем иметь

4,25	-1,48	0,73	1,44	4,94
-1,48	1,73	-0,85	2,73	1,13
0,73	1,85	1,23	-0,64	0,17
2,0616	-0,7179	0,8541	0,6085	2,3962
	1,1021	-1,4420	2,9323	2,5862
		0,5905	-6,2116	-5,6811
-2,0200	-12,4446	-11,9860		
-1,0199	-11,4436	-10,1064		

Ответ: $x_1 \approx -2,020$; $x_2 \approx -12,445$; $x_3 \approx -11,444$.

4. Решить систему методом простой итерации ([7], с.82).

$$\begin{cases} 1,02 x_1 - 0,05 x_2 - 0,10 x_3 = 0,795 \\ -0,11 x_1 + 1,03 x_2 - 0,05 x_3 = 0,849 \\ -0,11 x_1 - 0,12 x_2 + 1,01 x_3 = 1,398 \end{cases}$$

Так как диагональные элементы матрицы близки к единице, а все остальные — значительно меньше единицы, то для применения метода итераций систему представим в виде

$$\begin{cases} x_1 = 0,795 - 0,02 x_2 + 0,05 x_3 + 0,10 x_1 \\ x_2 = 0,849 + 0,11 x_1 - 0,03 x_3 + 0,05 x_2 \\ x_3 = 1,398 + 0,11 x_1 + 0,12 x_2 - 0,04 x_3 \end{cases}$$

Условия сходимости для полученной системы выполнены, так как

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |C_{1j}| &= 0,02 + 0,05 + 0,10 = 0,17 < 1 \\ \sum_{j=1}^3 |C_{2j}| &= 0,11 + 0,03 + 0,05 = 0,19 < 1 \\ \sum_{j=1}^3 |C_{3j}| &= 0,11 + 0,12 + 0,04 = 0,27 < 1 \end{aligned}$$

В качестве начального вектора $x^{(0)}$ берем столбец свободных членов:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,80 \\ 0,85 \\ 1,40 \end{pmatrix}$$

Далее последовательно находим

$$\begin{aligned} \text{при } k=1: \\ x_1^{(1)} &= 0,795 - 0,016 + 0,0425 + 0,140 = 0,9615 \approx 0,962 \\ x_2^{(1)} &= 0,849 + 0,0821 - 0,0255 + 0,076 = 0,9815 \approx 0,982 \\ x_3^{(1)} &= 1,398 + 0,088 + 0,1020 - 0,056 = 1,532 \end{aligned}$$

Аналогично при $k=2$:

$$x_1^{(2)} \approx 0,978; \quad x_2^{(2)} \approx 1,002; \quad x_3^{(2)} \approx 1,540$$

и при $k=3$:

$$x_1^{(3)} \approx 0,980; \quad x_2^{(3)} \approx 1,004; \quad x_3^{(3)} \approx 1,543$$

Так как значения неизвестных в последних двух итерациях отличаются только в третьем знаке, то естественно в качестве приближенных значений неизвестных взять

$$x_1 \approx 0,980; \quad x_2 \approx 1,004; \quad x_3 \approx 1,543$$

5. Решить СЛАУ методом Зейделя ([6], с.40).

$$\begin{cases} 4,51x_1 - 1,8x_2 + 3,8x_3 = -1,7 & (1) \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6 & (2) \\ 4,8x_1 + 2,5x_2 + 4,6x_3 = 2,2 & (3) \end{cases}$$

$E = 10^{-4}$

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходят бы остальные элементы строк:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 & ((1)+(2)) \\ 2,2x_1 + 5,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 & (2)-(1) \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,7 & ((3)-(2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 3,4x_2 - 0,5x_3 - 2,4x_3 + 1,9 \\ 10x_2 = -2,2x_1 + 4,4x_3 + 9,7 \\ 10x_3 = 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3 - 1,7 \end{cases}$$

Таким образом,
$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_2 + 0,05x_3 - 0,24x_3 + 0,19 \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,09x_3 - 0,44x_3 + 0,97 \\ x_3 = 0,13x_1 - 0,02x_2 - 0,42x_3 - 0,17 \end{cases}$$

Норма матрицы $\|B\|$, состоящей из коэффициентов при неизвестных в правых частях уравнений, равна $\max\{0,53; 0,77; 0,57\} = 0,77 < 1$. Значит, процесс Зейделя сходится. Результаты вычислений записываем в таблице:

k	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	-0,17
1	0,2297	0,105	-0,1915
2	0,2354	0,088	-0,1718
3	0,2424	0,1082	-0,2196
4	0,2454	0,1124	-0,2226

§ 5. Задания к лабораторным работам по главе I.

I. Решить СЛАУ методом Гаусса, вычислить определитель и найти обратную матрицу.

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Ex_4 = F \\ -Ex_1 + Cx_2 - Bx_3 + Ax_4 = 0 \\ Cx_1 + Ex_2 - Ax_3 + Bx_4 = 0 \\ Bx_1 - Ax_2 - Ex_3 - Cx_4 = H \end{cases}$$

где коэффициенты определяются из таблиц:

N	A	B	C	E
1	0,6	0,3	1	1,5
2	-1	0,5	-2	2,5
3	0,4	0,9	1	1,4
4	0,8	-0,5	2	-2,3
5	0,5	-0,1	-1	-1,6

$$F = (-1)^{-1} \cdot 0,1; H = (-1)^{-1} \cdot 0,5$$

2. Методом Гаусса с выбором главного элемента найти решение следующих систем: $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 4,21 & 22,42 & 1 & 3,65 \\ 2,31 & 31,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 26,72 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 30,24 \\ 40,95 \\ 42,81 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0,25 \cdot \kappa, \kappa = 0,1, 2, 3, 4; \beta = 0,35 \cdot \kappa, \kappa = 0,1, 2, 3, 4, 5$$

3. Методом квадратных корней найти решение следующих систем:

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = K \\ Bx_1 + Dx_2 + Fx_3 = L \\ Cx_1 + Fx_2 + Ex_3 = M \end{cases}, E = 10^{-4}$$

где коэффициенты определяются из таблиц:

N	A	B	C	D	F	E	K	L	M
1	1,65	-1,76	0,77	0,04	-2,61	-1,18	2,15	0,82	-0,73
2	0,53	-0,75	1,32	0,68	-1,75	2,15	0,07	0,05	1,23
3	2,52	0,07	-0,78	-2,67	1,35	-0,55	1,14	0,66	1,72
4	7,25	-1,78	0,73	1,33	-1,85	1,33	1,44	2,73	-0,04
5	1,54	-0,75	1,35	0,87	-0,70	0,64	2,15	0,04	0,87
6	1,72	-2,15	1,07	0,76	-2,15	1,13	2,15	1,15	0,88

4. Методом итераций найти решение следующих систем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3, \quad \varepsilon = 10^{-3} \end{cases}$$

где коэффициенты определяются из таблиц;

N	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃	a ₂₄	a ₃₁	a ₃₂	a ₃₃	a ₃₄
1	4	6.24	-0.08	0.03	3	-0.15	0.04	-0.08	4	8	6	20
2	2	-1	1	3	5	-2	1	-4	10	-3	1	0
3	10	1	1	2	10	1	2	2	10	12	13	14
4	2	-1	0	-1	2	-1	0	-1	2	0.333	1	-0.333
5	1	-0.3	-0.3	-0.4	1.1	-0.2	-0.3	0.1	1.2	0.5	1.6	2.8
6	5.3	2.2	5.7	-1.7	10.3	5.2	2.5	-0.5	6.8	15.9	50.2	32.7

с) $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 24.21 + \alpha & 1.42 & 3.85 \\ 2.31 & 34.49 & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.74 + \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30.24 \\ 40.95 + \beta \\ 42.81 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0.2 \cdot \kappa$, $\kappa = 0.1, 2, 3, 4$; $\beta = 0.2 \cdot \kappa$, $\kappa = 0.1, 2, 3, 4, 5$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

5. Методом Зейделя решить СЛАУ, приведя их к виду, удобному для итераций, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

где коэффициенты системы определяются из таблиц:

N	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃	a ₂₄	a ₃₁	a ₃₂	a ₃₃	a ₃₄
1	2.7	3.3	1.5	3.5	-1.7	2.8	4.1	5.8	-1.7	2.1	1.7	0.8
2	3.1	2.8	1.9	1.9	3.1	2.1	7.5	3.8	4.8	0.2	2.1	5.0
3	3.6	1.8	-0.7	2.7	-1.6	1.9	6.5	4.5	3.3	1.8	0.4	-1.6
4	2.7	1.0	-1.5	4.5	-2.3	6.7	5.1	3.7	-1.4	3.5	2.6	-0.4
5	3.8	6.7	-1.2	6.4	1.3	-2.7	2.4	-0.5	2.5	0.2	1.3	-4.6
6	6.1	2.2	1.2	2.2	5.5	-1.5	1.2	-6.5	2.2	16.35	10.55	16.80
7	10	2	0	1	10	9	1	-7	-10	2.8	7	-12

РАЗДЕЛ П. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении уравнений вида

$$f(x) = 0 \quad (П.1)$$

где f - известная функция действительного или комплексного аргумента, требуется знать область существования корней и метод их нахождения. Большинство методов отыскания корней уравнения (П.1) предполагает, что заранее известны достаточно малые окрестности, в каждой из которых имеется только один корень уравнения. Принимая за начальное приближение корня одну из точек этой окрестности можно с помощью приближенных методов вычислить искомый корень с заданной точностью. Следовательно, задача приближенного вычисления корней уравнения (П.1) состоит из двух задач: 1) задачи отделения корней, т.е. отыскания достаточно малых областей, в каждой из которых заключен только один корень уравнения (П.1); 2) вычисления корня с заданной точностью, если известно некоторое начальное его приближение в области, не содержащей других корней.

§ 1. Отделение корней

([2], с.452-459; [4], с.112-119)

п.1.1. Графический способ отделения корней.

Графический способ обычно используется для отделения действительных корней уравнения (П.1). Чтобы найти грубое значение корней, графически можно воспользоваться двумя способами:

1) Строит график функции $y = f(x)$. Абсциссы точек пересечения графика с осью Ox будут грубыми значениями корней уравнения. Окрестность корней может быть принята за область, внутри которой существует единственный корень.

2) Сначала уравнение (П.1) приводят к виду $f(x) = g(x)$, где f и g - достаточно простые функции для построения графика. Затем строят графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут приближенными значениями корней.

Для отыскания корней комплексных уравнений вида

$$f(z) = 0 \quad (П.2)$$

можно, положив $z = x + iy$, представить уравнение (1.2) в виде

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = 0,$$

где φ и ψ — действительные функции действительных переменных x и y . Тогда это уравнение равносильно решению системы двух уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Построив кривые $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, получим действительные и мнимые части корней уравнения (1.2) как соответственно абсциссы и ординаты их точек пересечения.

п.1.2. Аналитический способ отделения корней

Для выделения интервалов, в которых находятся действительные корни уравнения (П.1), если f — непрерывная функция, следует воспользоваться следующими известными фактами:

1. Если на концах некоторого отрезка непрерывная функция принимает значения разных знаков, то на этом отрезке уравнение (П.1) имеет хотя бы один корень.
2. Если при этом f имеет первую производную, не меняющую знака, то корень единственный.
3. Пусть f — аналитическая функция переменного x на отрезке $[a, b]$; если на концах отрезка $[a, b]$ она принимает значения разных знаков, то между a и b имеется нечетное число корней уравнения (П.1); если же на концах отрезка $[a, b]$ она принимает значения одинаковых знаков, то между a и b или нет корней этого уравнения, или их имеется четное число (учитывая и кратность корней).

Для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f можно рекомендовать следующий порядок для отделения корней аналитическим методом:

1. Найти $f'(x)$ и определить критические точки.
2. Составить таблицу знаков функции f , полагая x равным:
 - а) критическим значениям производных или ближайшим к ним;
 - б) граничным значениям области допустимых значений неизвестных.
3. Определить интервалы, на концах которых функция принимает значения разных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному корню.

24

п.1.3. Определение числа действительных корней алгебраических уравнений и определение области их существования

Пусть дано алгебраическое уравнение n степени:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1.3)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — действительные коэффициенты.

Спроектировать приближенно число действительных корней уравнения (1.3) можно с помощью правила Декарта: Число положительных корней уравнения (1.3) с учетом их кратностей равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ (причем равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число. Для определения числа отрицательных корней достаточно применить правило Декарта к многочлену $f(-x)$.

Более точно число корней уравнения (1.3) можно определить, используя теорему Штурма: Пусть уравнение (1.3) не имеет кратных корней на некотором отрезке $[a, b]$. Обозначим через $f_1(x)$ производную $f'(x)$; через $f_2(x)$ остаток от деления $f(x)$ на $f_1(x)$, взятый с обратным знаком; через $f_3(x)$ обозначим остаток от деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$, взятый с обратным знаком и т.д. до тех пор, пока не получим $f_n(x) = \text{const}$. Получился так называемый ряд Штурма:

$$f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x). \quad (1.4)$$

Число действительных корней уравнения $f(x) = 0$, расположенных на отрезке $[a, b]$, равно разности между числом перемен знаков в последовательности (1.4) при $x = a$ и числом перемен знаков в последовательности (1.4) при $x = b$.

Теорема Штурма полностью решает вопрос о числе действительных корней уравнения (1.3) на отрезке $[a, b]$, если оно не имеет кратных корней, но требует большого числа вычислений для построения ряда Штурма. Заметим, что правило Декарта свободно от этого недостатка, но оно приближенное.

Практическое применение теоремы Штурма сводится к следующему: Определяются границы отрезка, на котором расположены действительные корни уравнения (1.3) и их число. Полученный отрезок $[a, b]$ (a и b могут быть и бесконечностями) делится на некоторое число частей точками α_i : $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b$. Рассматривая отрезок $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ по теореме Штурма, определяется число корней на этом отрезке. Если окажется, что их больше одного, то этот отрезок делится пополам и теорема Штурма применяется к каждому полученному отрезку. Процесс продолжается

до тех пор, пока на каждой части отрезка $[a, b]$ уравнение (1.3) будет иметь не больше одного действительного корня.

Пример. Отделить корни уравнения $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0$.

Составляем таблицу:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f_1(x) = 3x^2 - x - 1$	$\text{sign } f_1(x)$	-	-	+	+
$f_2(x) = 2x^2 + 2x$	$\text{sign } f_2(x)$	+	+	+	+
$f_3(x) = -1$	$\text{sign } f_3(x)$	-	+	+	+
$\text{sign } f_3(x)$		-	-	-	-
Число перемен знаков	2	2	2	1	4

Из таблицы видно, что действительный корень один и находится в интервале $(1; 2)$.

Приведем некоторые правила, которые позволяют указать границы области расположения корней уравнения (1.3).

1. Правило кольца. Если $a = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$, $b = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, 1\}$, то все корни уравнения (1.3) расположены в кольце: $\frac{1}{b+a} \leq x \leq 1 + \frac{a}{|a_1|}$.

Пример. Пусть $5x^3 - 20x^2 + 32x - 1 = 0$, тогда $|a_1| = 5$, $a_n = 0$, $a = 20$, $b = 20 \Rightarrow \frac{1}{20+5} \leq x \leq 1 + \frac{20}{5}$. Таким образом, $0 \leq x \leq 5$.

2. Метод Ньютона. Если $a_0 > 0$ и при $x > 0$ имеет место неравенства $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, ..., $f^{(n)}(x) > 0$,

то число C служит верхней границей положительных корней уравнения (1.3).

Пример. Рассмотрим уравнение $8x^3 - 8x^2 - 32x + 1 = 0$. Найдем производные $f(x) = 8x^3 - 8x^2 - 32x + 1$, $f'(x) = 24x^2 - 16x - 32$, $f''(x) = 48x - 16$, $f'''(x) = 48$.

Пусть $x = C = 1 > 0$, тогда $f(1) < 0$, значит, $C = 1$ не может быть верхней границей. Пусть теперь $x = C = 2$, тогда $f(2) > 0$, $f'(2) > 0$, $f''(2) > 0$, $f'''(2) > 0$.

значит, $C = 2$ — есть верхняя граница положительных корней данного уравнения, а нижняя граница — $\frac{1}{2} = 0.5$.

§ 2. Метод итерации

([3], с.172-190, [4], с.136-148)

Суть метода итераций заключается в следующем. Пусть дано уравнение $f(x) = 0$.

26

где f — непрерывная функция. Чтобы найти его действительные корни, заменим уравнение (2.1) равносильным уравнением $x = \varphi(x)$.

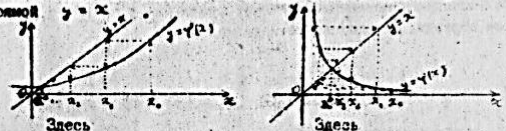
(2.2)

Допустим, нами каким-либо способом указано начальное приближение x_0 . В простейшем методе итераций все дальнейшие приближения строятся по формуле

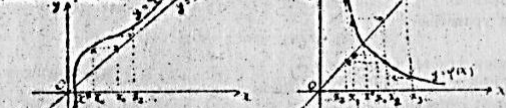
$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

Если последовательность (2.3) является сходящейся, т.е. существует предел $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то, переходя к пределу в равенстве (2.3) и предполагая функцию φ непрерывной, найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ или $x^* = \varphi(x^*)$. Таким образом, x^* является корнем уравнения (2.2) и может быть вычислен по формуле (2.3) с любой степенью точности.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень x^* уравнения (2.2) является абсциссой точки пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$.



На следующих двух рисунках приведены иллюстрации расходящегося процесса итераций.



Поэтому для практического применения метода итерации нужно выписать достаточные условия сходимости итерационного процесса.

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия:

1. Функция φ определена на отрезке $|x - x^*| \leq \delta$ (2.4) непрерывна там и удовлетворяет условию Липшица с постоянным коэффициентом, меньшим единицы:

$$|\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leq q \cdot |x - x^*| \quad (0 \leq q < 1)$$

2. Для исходного приближения x_0 верно неравенство:

27

3. Числа δ, q, m удовлетворяют условию $\frac{m}{1-q} = \delta$. Тогда
1. Уравнение (2.1) в области (2.4) имеет решение.
 2. Последовательность приближений x_n , построенная по правилу (2.3), принадлежит отрезку (2.4), является сходящейся ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$), и предел последовательности x^* удовлетворяет уравнению (2.1).
 3. Скорость сходимости x_n к x^* оценивается неравенством

$$|x^* - x_n| \leq \frac{m}{1-q} \cdot q^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 2.2. На всяком множестве точек, где для функции φ выполняется условие

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|, \quad x \neq y,$$

уравнение $x = \varphi(x)$ может иметь не более одного решения. Доказательство. Предположим противное. Пусть на указанном множестве существуют два различных решения x и y ($x \neq y$). Оценим разность $|x - y| = |\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$. Из последнего неравенства видно, что $|x - y| < |x - y|$. Таким образом, предположение неверно.

§ 3. Метод секущих (хорд)

([2], с. 464-470; [3], с. 180-184; [4], с. 119-123)

Способ построения метода секущих основан на следующей идее. Если уравнение $f(x) = 0$ имеет корень $x = \alpha$, а функция φ непрерывна в окрестности точки $x = \alpha$, то уравнение

$$x = \varphi(x) \equiv x - \varphi(x) f(x) \quad (3.1)$$

имеет тот же корень $x = \alpha$. Функцию φ можно подобрать таким образом, чтобы итерационный процесс для последнего уравнения сходиллся.

Пусть f — действительная функция от действительного переменного x , а $x = \xi$ действительный корень уравнения $f(x) = 0$. Предположим, что в некоторой окрестности точки ξ функции f, f' и f'' — непрерывны, а f' и f'' в этой окрестности не меняют знака. Это значит, что при переходе через точку $x = \xi$ функция f меняет знак и имеет точку $x = \xi$ простым корнем. Пусть x_0 — точка рассматриваемой окрестности, в которой $f(x_0) f'(\alpha) > 0$.

В равенстве (3.1) в качестве функции φ возьмем функцию

$$\varphi(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Тогда уравнение

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x) = \frac{x f(x) - x_0 f(x)}{f(x) - f(x_0)} \quad (3.2)$$

также имеет корнем $x = \xi$. За начальное приближение примем любую, достаточно близкую к ξ точку x_0 рассматриваемой окрестности, в которой $f(x_0)$ имеет знак, противоположный знаку $f(x_1)$, последующие приближения будем строить обычным способом:

$$x_n = \frac{x_0 f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_0)}{f(x_{n-1}) - f(x_0)}, \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (3.3)$$

Для определения условий сходимости метода хорд возьмем производную от функции φ при $x = \xi$:

$$\varphi'(\xi) = \frac{(x_0 f'(\xi) - f(x_0)) (f(\xi) - f(x_0)) - (x_0 f(\xi) - x_0 f(x_0)) \cdot f'(\xi)}{(f(\xi) - f(x_0))^2} =$$

$$= \frac{f(x_0) + f'(\xi) (x_0 - \xi) f'(\xi)}{f(x_0)}$$

С другой стороны, по формуле Тейлора

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi) f'(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2!} f''(\xi) \quad (\xi \leq x \leq x_0)$$

то, полагая $x = x_0$, получим

$$f(x_0) + (x_0 - \xi) f'(\xi) = \frac{(x_0 - \xi)^2}{2!} f''(\xi) \Rightarrow \varphi'(\xi) = \frac{(x_0 - \xi)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f(x_0)}$$

При x_0 , достаточно близком к точке ξ , величина $\varphi'(\xi)$ будет достаточно малой, и поэтому существует такая окрестность точки ξ , в которой будет иметь место неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq k < 1$$

и если x_0 взято из этой окрестности, то последовательность (3.3) будет сходиться к $x = \xi$.

Так как $f(x_n) = f(x_0) - f'(\xi) (x_n - \xi)$, то, полагив $n = \min_{2 \leq n \leq m} |f'(x_n)|$, будем иметь

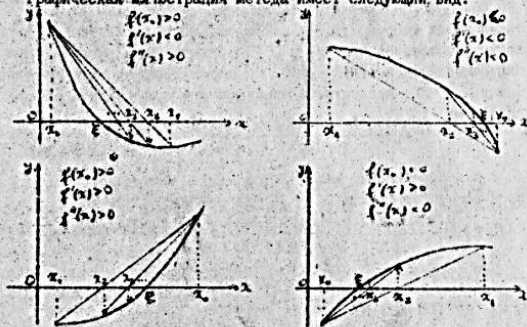
$$|x_n - \xi| \leq \frac{m}{|f'(x_n)|}$$

что позволит на каждом шаге по значениям $f(x_n)$ следить за достигнутой точностью.

Геометрически этот метод состоит в том, что значение x_{n+1} есть абсцисса точки пересечения прямой, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_n, f(x_n))$, с осью Ox . Поэтому этот ме-

тогда называют методом секущих или методом линейной интерполяции, так как на каждом шаге за приближенное значение корня x_{n+1} принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, построенного по значениям $f(x)$ в точках x_n и x_{n-1} . Метод секущих является итерационным методом первого порядка.

Графическая иллюстрация метода имеет следующий вид:



Останемся теперь на правиле выбора неподвижной точки x_0 . Пусть для определенности $f'(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз, и следовательно, расположена ниже своей хорды. Представим формулу (3.3) в виде

$$x_n = x_{n-1} + \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \quad (n=2, 3, \dots)$$

Возможны два случая: 1) $f(x_0) > 0$ и 2) $f(x_0) < 0$.

В первом случае конец x_0 неподвижен, и последовательные приближения находятся по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1} - x_0) f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_0)} \quad (n=2, 3, \dots) \quad (3.4)$$

и образуют монотонно убывающую последовательность (см. первый рисунок), причем $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1$.

Второй случай получается из первого (см. третий рисунок), поменяв между собой концы отрезка x_0 и x_1 , получив отрезок $[x_1, x_0]$. Последовательные приближения находят опять по формуле (3.4) и образуют уже монотонно возрастающую последовательность:

$$x_2 > x_3 > \dots > x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1$$

Обобщая эти результаты, заключаем: 1) неподвижен тот конец отрезка, для которого знак функции f совпадает со знаком ее второй производной f'' ; 2) последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ , где функция f имеет знак, противоположный знаку ее второй производной f'' . В обоих случаях каждое следующее приближение x_{n+1} ближе к корню ξ , чем предыдущее x_n .

§ 4. Метод Ньютона (касательных)

([2], с. 465-470; [3], с. 193-207; [4], с. 123-132)

Метод Ньютона позволяет привести решение нелинейных уравнений к решению последовательности линейных задач. Достигается это при помощи выделения из нелинейного уравнения его линейной части.

Пусть корень ξ уравнения

$$f(x) = 0 \quad (4.1)$$

отделен на отрезке $[a, b]$, причем f' и f'' непрерывны и сохраняют определенные знаки при $a \leq x \leq b$. Имея n -е приближение корня $x_n = \xi$ ($x_n \in [a, b]$), уточним его по методу Ньютона следующим образом. Положим

$$\xi = x_n + h_n, \quad (4.2)$$

где h_n считаем малой величиной. Теперь, применяя формулу Тейлора, получим

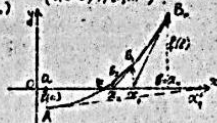
$$f(\xi) = 0 = f(x_n + h_n) = f(x_n) + h_n f'(x_n) \Rightarrow h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Внося эту поправку в формулу (4.2), найдем следующее приближение корня

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой.

Замечание 4.1. Если положить (см. рисунок) $x_0 = a$ и, следовательно, $f(x_0) f'(x_0) < 0$ то, проведя касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$, мы получим бы



точку x_1 , лежащую вне отрезка $[a, b]$, и можем не прийти к корню $x = \xi$ уравнения (4.1). Таким образом, в данном случае "хорошим" начальным приближением x_1 является то, для которого выполняется неравенство

$$f(x_1) f'(x_1) > 0.$$

Как известно, что это правило является общим. Имеет место Теорема 4.1. Если $f(a) f(b) < 0$, причем f' и f'' отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при $x \in [a, b]$ то, исходя из начального приближения $x_1 \in [a, b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_1) f'(x_1) > 0$, можно вычислить методом Ньютона по формуле (4.3) единственный корень ξ уравнения (4.1) с любой степенью точности.

Замечание 4.2. Если: 1) функция f определена и непрерывна при $x \in [a, b]$; 2) $f(a) f(b) < 0$; 3) $f'(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$; 4) $f''(x)$ существует всюду и сохраняет постоянный знак, то при применении метода Ньютона для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, лежащего в интервале (a, b) за начальное приближение x_1 , можно принять любое значение $x_1 \in [a, b]$.

Замечание 4.3. Из формулы 4.3 видно, что чем больше численное значение производной f' в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую нужно прибавить к n -му приближению, чтобы получить $(n+1)$ -ое приближение. Поэтому метод Ньютона особенно удобно применять тогда, когда в окрестности данного корня график функции имеет большую крутизну. Но, если численное значение производной f' близ корня мало, то поправки будут велики, и вычисления корня по этому методу может оказаться очень долгим, а иногда и вовсе не возможным. Следовательно, если кривая $y = f(x)$ вблизи точки пересечения с осью Ox почти горизонтальна, то применять метод Ньютона для решения уравнения $f(x) = 0$ не рекомендуется.

Для оценки погрешности n -го приближения x_n можно воспользоваться формулой

$$| \xi - x_n | \leq \frac{| f(x_n) |}{m_n}$$

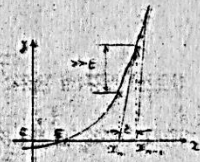
или формулой

$$| \xi - x_n | \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2,$$

где $m_1 = \min_{x \in [a, b]} | f'(x) |$; $M_2 = \max_{x \in [a, b]} | f''(x) |$.

Замечание 4.4. В общем случае совпадение с точностью до

двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n вовсе не гарантирует, что с той же точностью совпадает значение x_{n+1} и точный корень ξ (см. рисунок).



§ 5. Комбинированный метод ([4], с. 132-135)

Комбинируя метод секущих и метод Ньютона, получается стационарный метод отыскания действительных корней уравнения $f(x) = 0$. Преимущество предлагаемого метода заключается в том, что при прежних предположениях относительно f' и f'' последовательные приближения x_n и x_{n+1} лежат по разные стороны от корня, и поэтому можно следить в процессе вычислений за достигнутой точностью. В то же время он сходится значительно быстрее метода секущих.

Пусть на отрезке $[a, b]$ содержится единственный корень уравнения $f(x) = 0$, а f' и f'' на этом отрезке не меняют знаков.

Если $f(a) f'(a) > 0$, то находим x_1 и x_2 по формулам:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad x_2 = \frac{a f'(b) - b f'(a)}{f'(b) - f'(a)} \quad (5.1)$$

а следующие приближения находим по формулам:

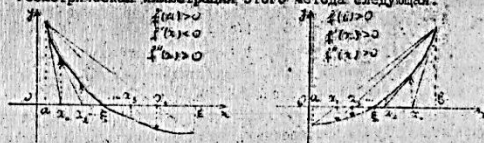
$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, \quad x_{2n+1} = \frac{x_{2n-1} f'(x_{2n-2}) - x_{2n-2} f'(x_{2n-1})}{f'(x_{2n-1}) - f'(x_{2n-2})} \quad (5.2)$$

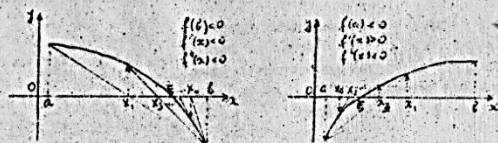
Если $f(b) f'(b) > 0$, то x_1 и x_2 находим по формулам:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad x_2 = \frac{a f'(b) - b f'(a)}{f'(b) - f'(a)} \quad (5.3)$$

а следующие приближения - по формулам (5.2).

Геометрическая иллюстрация этого метода следующая:





Как видно из рисунков, а также следует из §3 и §4, последовательные приближения x_{2n} и x_{2n+1} всегда расположены по разные стороны от $x = \xi$ и первые совпадающие знаки x_{2n} и x_{2n+1} и будут верными знаками для $x = \xi$. По окончании процесса за значение корня ξ лучше всего взять среднее арифметическое средних значений:

$$\xi = \frac{x_{2n} + x_{2n+1}}{2}$$

§ 6. Пример

Методами хорд и Ньютона решить уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Определим по правилу Декарта число положительных и отрицательных действительных корней.

Пусть $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$. Таким образом, имеем два положительных коэффициента и один отрицательный коэффициент. Но тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере один положительный корень, т.е. имеется только одна перемена знака. Теперь, заменяя x на $-x$, получим, что в коэффициентах уравнения $f(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ имеется две перемены знака, а это означает, что уравнение имеет два отрицательных действительных корня.

Отделение корней проводим аналитически. Функция f определена для любых x . Найдем производные, а затем критические точки: $f'(x) = 3x^2 + 6x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow$

$$x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ или } x = -2$$

Составим таблицу знака функции $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Имеется три перемены знака, следовательно действительные корни лежат в интервалах: $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(0, 1)$.

Теперь перейдем непосредственно к вычислению корней. При вычислениях будем использовать видоизмененный метод Ньютона с

постоянным значением производной:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Для окончания счета по методу хорд или методу Ньютона воспользуемся зависимостью

$$|x - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad (6.1)$$

Но для этого сначала надо проверить, что для выбранного интервала выполняется условие $M < 2m$, где

$$M = \max_{[a, b]} |f'(x)|, \quad m = \min_{[a, b]} |f'(x)|$$

Возьмем сначала интервал $[-3, -2]$. Имеем

$$|f'(x)| = |3x^2 + 6x| \Rightarrow |f'(x)| = 3|x^2 + 2x|;$$

$$M = \max_{[-3, -2]} |f'(x)| = 3 \max_{[-3, -2]} |x^2 + 2x| = 9; \quad m = \min_{[-3, -2]} |f'(x)| = 3 \min_{[-3, -2]} |x^2 + 2x| = 0$$

Значит, $M < 2m$.

Разделим данный интервал на две части и рассмотрим отрезки $[-3, -2.5]$ и $[-2.5, -2]$. На первом интервале функция меняет знак (значит, здесь лежит корень), а на втором нет. Для первого интервала $M = 9$, $m = 2.75$ и $M < 2m$. Снова разбиваем интервал на две части и после проверки знаков функции, остается $[-2.75, -2.5]$, на котором $M = 8.1875$ и $m = 3.75$, но тогда $M < 2m$.

Уточнение корня, лежащего на отрезке $[-2.75, -2.5]$,

проведем по методу а) хорд

$$x_{n+1} = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}; \quad a = -2.75; f(a) = -1.111$$

Продолжая вычисления, получим, что $x_n = -2.532$.

б) касательных, используем формулу (6.1):

$$f(-2.75) \cdot f'(-2.75) > 0 \Rightarrow x_n = -2.75$$

Результаты вычислений приведены в таблицах:

n	x_n	$-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$	n	x_n	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-2.5	-0.035	0	-2.75	
1	-2.525	-0.006	1	-2.571	0.179
2	-2.531	-0.0009	2	-2.545	0.026
3	-2.5313	-0.0008	3	-2.537	0.008
			4	-2.537	0.003
			5	-2.533	0.001

$$\varepsilon = x_5 = -2.532$$

$$\text{Так как } |x_5 - x_4| = 0.001, \text{ то } \varepsilon = -2.533$$

§ 7. Задания к лабораторным работам по главе II

1. Отделить действительные корни и вычислить их, используя метод простой итерации для следующих уравнений: $\varepsilon = 10^{-4}$.

1. $x^4 + 2.5x^3 - 4.5x^2 - 49x - 20 = 0$
2. $x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0$
3. $x^4 + 10x^3 - 4 = 0$
4. $x^4 - 4x^3 - 40x^2 + 56x - 20 = 0$
5. $x^3 - x - 1 = 0$
6. $x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$
7. $x^3 - x - 0.2 = 0$
8. $x^3 + 2x - 1 = 0$, $\alpha = 1(4)5$
9. $x^3 + 54x - 72\alpha + 1 = 0$

2. Отделить корни уравнений и вычислить их по методу Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. В примерах все корни действительные.

1. $x^3 - 2.9x^2 + 0.9x + 5.8x - 4.2 = 0$
2. $x^3 - 4x^2 + 5.98x^2 - 3.86x + 4.51 = 0$
3. $x^3 - 4.3x^2 + 6.63x^2 - 4.36x + 4.33 = 0$
4. $x^3 - 2.3x^2 + 2.33x^2 + 2.30x - 4.33 = 0$
5. $3x - \cos x - 1 = 0$
6. $x^2 - \cos^2 x = 0$
7. $x^2 + \sqrt{2}x = 0$
8. $x^2 - 1 + 0.8x^2 = 0$, $\beta = 1 + 0.25\pi$, $\pi = 0.72314$

3. Отделить корни уравнений графически и найти их по методу секущих с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

1. $x^3 - 4x^2 + 10x - 40 = 0$
2. $\sqrt{x+1} - 1/x = 0$
3. $x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$
4. $x^3 - x^2 + 45x - 2 = 0$
5. $x^3 - 4x^2 + 2x - 2 = 0$
6. $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
7. $5x - e^x = 0$
8. $3x - e^{4x} = 0$

РАЗДЕЛ III. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (Ш.1)$$

где f_i ($i=1, \dots, n$) — непрерывно дифференцируемые функции.

Решение такой системы представляет значительные трудности, чем решение одного уравнения. Однако и здесь можно применять известные подходы: метод простой итерации, метод Зейделя, метод Ньютона и другие.

§ 1. Метод простой итерации решения СНАУ

([2], с. 483-488; [3], с. 190-192; [4], с. 474-477)

Пусть дана система вида (Ш.1). Для нахождения $x_1, \dots, x_n$ приведем эту систему к каноническому виду

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (I.2)$$

и пусть в некоторой окрестности пространства $x_1, \dots, x_n$ эта система имеет единственное решение $x_i = \xi_i$ ($i=1, \dots, n$), а $x_i^{(k)}$ — числа, соответственно близкие к ξ_i . При некоторых ограничениях на функции φ_i исходя из этих приближенных значений, можно найти приближенные значения ξ_i с наперед заданной точностью. Это уточнение может быть выполнено с помощью метода итераций, заключающегося в следующем: Если найдено K -е приближение $x_1^{(K)}, \dots, x_n^{(K)}$, то $(K+1)$ -е приближение находится по формулам:

$$x_i^{(K+1)} = \varphi_i(x_1^{(K)}, \dots, x_n^{(K)}) \quad (i=1, \dots, n, K=0, 1, \dots) \quad (I.3)$$

Если при $K \rightarrow \infty$ $x_i^{(K)} \rightarrow \xi_i$ ($i=1, \dots, n$), то говорят, что метод итераций сходится к искомому решению.

Вводя в рассмотрение векторы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ систему (I.2), запишем кратко в виде

$$x = \varphi(x) \quad (I.2)$$

Предположим теперь, что в некоторой выпуклой области G пространства $x_1, \dots, x_n$ функции φ_i имеют непрерывные первые производные $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}$, $M_{ij} = \max_G \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|$ и в области G система (I.2) имеет единственное решение

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Приведем следующие достаточные признаки сходимости метода итераций.

Теорема 1.1. Для сходимости метода итераций решения системы (1.2) достаточно выполнения одного из следующих условий:

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} < 1 \quad (i=1, n) \quad (1.4) \quad \sum_{j=1}^n M_{ij} < 1 \quad (i=1, n) \quad (1.5) \quad \sum_{j=1}^n M_{ij} < 1 \quad (1.6)$$

причем в этих случаях за $x^{(k)}$ можно принимать любой вектор $x^{(0)}$ из окрестности $f(x, y) = \|x - \xi\|_2 = 2$ ($\ell=1, 2, 3$) в зависимости от того, рассматриваем ли условия (1.4), (1.5) или (1.6), а норма определяется так:

$$\|x - \xi\|_1 = \max_i |x_i - \xi_i|; \|x - \xi\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}; \|x - \xi\|_3 = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}.$$

если только эта окрестность целиком принадлежит области G .

Заметим, что неравенства (1.4), (1.5), (1.6) соответственно означают, что первая, вторая или третья нормы матрицы M меньше единицы.

Остановимся на построении итерирующих функций для системы (Ш.1). Для преобразования системы уравнений (Ш.1) к виду (1.2) с соблюдением условий (1.4) - (1.6) теоремы 1.1 применим следующий прием (пусть $n=2$). Положим,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) \quad (\alpha \neq \beta) \\ \varphi_2(x, y) &= y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) \end{aligned}$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ находятся как приближенные решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 + \alpha \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ \alpha \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \\ \gamma \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ 1 + \gamma \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \delta \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

При таком выборе параметров условия теоремы 1.1 будут выполнены, если только частные производные функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ изменяются на очень быстро в окрестности точки (x_0, y_0) .

§ 2. Метод Зейделя решения СИУ ([3], с.192-193)

Пусть СИУ приведена к каноническому виду

$$x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

Предположим, что вычисления доведены до приближения номера k : $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. В методе Зейделя для нахождения следующего приближения $x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ должен быть прежде всего установлен порядок вычисления его компонентов $x_i^{(k+1)}$ ($i=1, n$). Такой порядок может быть своим для каждой системы и для каждого шага. Так как всякий порядок расположения $x_i^{(k+1)}$ может быть приведен путем изменения нумерации к натуральному порядку $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$, то правило Зейделя достаточно записать для этого последнего порядка:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases} \quad (2.2)$$

После вычисления $x^{(k+1)}$ ($i=1, 2, n$) переходят к нахождению следующего приближения $x^{(k+2)}$: выбирают последовательность вычисления его компонентов $x_i^{(k+2)}$ и выполняют счет при помощи равенств, аналогичных (2.2) и т.д.

Для доказательства сходимости метода Зейделя достаточно показать, что любая из норм матрицы M

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где } M_{ij} = \max_{\alpha} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right|,$$

по модулю меньше единицы или показать, что все собственные значения матрицы M по модулю меньше единицы.

§ 3. Метод Ньютона решения СИУ ([2], с.488-501; [3], с.207-210; [4], с.450-471)

Рассмотрим систему n уравнений о n неизвестными

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1, n) \quad (3.1)$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$. Тогда система (3.1) запишется в виде векторного уравнения

$$f(x) = 0$$

Предположим, что в некоторой выпуклой области G , содержа-

ная решение $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ системы (3.1), функции f_i непрерывны, имеют непрерывные частные производные первого порядка, и в точке $\alpha = \xi$ матрица Якоби

$$f'_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

не вырождена. Тогда в некоторой окрестности точки $\alpha = \xi$ она будет иметь обратную матрицу, которую обозначим через $f'_x(\alpha)^{-1}$. Очевидно, что решение ξ системы (3.1) будет и решением векторного уравнения

$$\alpha - \varphi(\alpha) = \alpha - f'_x(\alpha)^{-1} f(\alpha) = 0.$$

Если $\alpha^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)})$ — некоторое начальное приближение к решению ξ , то для отыскания ξ с нужной точностью можно построить итерационный процесс

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - f'_x(\alpha^{(k)})^{-1} f(\alpha^{(k)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

Векторное равенство (3.3) можно переписать в виде

$$f'_x(\alpha^{(k)}) (\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}) = -f(\alpha^{(k)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) в координатной записи имеет вид

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\alpha^{(k)})}{\partial x_j} (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) = -f_i(\alpha^{(k)}) \quad (i=1, 2, \dots, n; k=0, 1, 2, \dots).$$

Итерационные равенства (3.3) или (3.4) представляют собой метод Ньютона для решения СНАУ.

Если для вычисления последовательных приближений используется соотношение (3.3), то на каждом шаге необходимо вычислять обратную матрицу к матрице $f'_x(\alpha)$, в которой вместо α берется предыдущее приближение.

Если же при вычислении последовательных приближений используется равенство (3.4), то на каждом шаге для отыскания поправок $\Delta \alpha^{(k)} = \alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}$ к найденному приближению $\alpha^{(k)}$ приходится решать систему линейных алгебраических уравнений с матрицей $f'_x(\alpha^{(k)})$ в вектор правых частей $-f(\alpha^{(k)})$.

О сходимости метода говорит следующая

Теорема 3.1. Если функции $f_i(x_1, x_2)$ ($i=1, \dots, n$) непрерывны вместе с первыми производными в выпуклой области G , содержащей решение ξ системы (3.1), при $\alpha = \xi$ матрица (3.2) не вырождена, то существует такая окрестность

$R\{\alpha - \xi\} \leq \delta$, что при любом $\alpha^{(0)} \in R$ последовательность $\{\alpha^{(k)}\}$ в методе Ньютона сходится к решению ξ системы (3.1).

Заметим, что метод Ньютона (3.3) имеет следующие недостатки:

1. Для применения метода начальное приближение к искомому решению должно быть хорошим. Если оно задано грубо, то метод может разойтись или привести к другому решению.
2. На каждом шаге приходится вычислять элементы матрицы $f'_x(\alpha)$ и находить ей обратную, а это требует большого объема вычислительной работы.

Если матрица $f'_x(\alpha)$ непрерывна в окрестности искомого решения ξ и начальное приближение $\alpha^{(0)}$ достаточно близко к ξ , то приближенно можно положить:

$$f'_x(\alpha^{(k)}) \approx f'_x(\alpha^{(0)})$$

В результате чего получается модифицированный метод Ньютона:

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - f'_x(\alpha^{(0)})^{-1} f(\alpha^{(k)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

Заметим, что в формулах (3.3) и (3.5) первые приближения совпадают.

§ 4. Примеры

([4], с. 453; [7], с. 94)

1. Для применения метода простых итераций выбрать подходящие итерирующие функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ для системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$$

при $x_0 = 0.8$, $y_0 = 0.55$.

Решение. Будем искать функции φ_1 и φ_2 в виде

$$\varphi_1(x, y) = x + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(x^2 - y),$$

$$\varphi_2(x, y) = y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(x^2 - y).$$

При определении параметров λ , μ , δ , ϵ составим систему (1.7). Имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + 2\mu x = 2x(1 + \lambda + \mu), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 2y(1 + \lambda),$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + 2\mu x = 2x(1 + \lambda + \mu), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 1 + 2\lambda y + 2\mu y = 1 + 2y(\lambda + \mu).$$

После этого система записывается

$$\begin{cases} 1 + 1,6\alpha + 1,92\beta = 0, \\ 1,1\alpha - \beta = 0, \\ 1,6\beta + 1,92\delta = 0, \\ 1 + 1,1\beta - \delta = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\alpha = -0,3; \beta = -0,3; \gamma = -0,5; \delta = 0,4.$$

Таким образом, искомые функции имеют вид

$$\varphi_1(x, y) = x - 0,3(x^2 + y^2 - 1) - 0,3(x^2 - y),$$

$$\varphi_2(x, y) = y - 0,5(x^2 + y^2 - 1) + 0,4(x^2 - y).$$

2. Методом Ньютона приближенно найти положительное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0, \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0. \end{cases}$$

За начальное приближение берется точка $(x_0, y_0, z_0) = (0,5; 0,5; 0,5)$.

Решение. Вычисляем

$$f(x_0) = \begin{pmatrix} 0,25 + 0,25 + 0,25 - 1 \\ 2 \cdot 0,25 + 0,25 - 4 \cdot 0,5 \\ 3 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,5 + 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,0 \end{pmatrix}$$

Составляем матрицу Якоби (3,2):

$$f'_x(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}$$

Тогда $\det f'_x(x^{(0)}) = -40$.

Находим первое приближение

$$x^{(1)}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1,5 & -2,5 & -1,0 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - f'_x(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,175 \\ 0 \\ 0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,675 \\ 0,5 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

Следующие приближения вычисляются аналогично.

За решение системы, после проведенных вычислений, можно принять: $x = 0,7352$, $y = 0,4461$, $z = 0,3104$.

§ 5. Задания к лабораторным работам по разделу III

1. Найти решение следующих систем уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Начальное приближение определить графически.

$$1. \begin{cases} \alpha x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 - y - 3 = 0 \end{cases} \quad (\alpha = 1(45)3)$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^3 - (6 + \alpha)x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - (6 + \alpha)y + 2 = 0 \end{cases} \quad \alpha = 0,5(45)5$$

$$3. \begin{cases} e^{xy} = x^2 - y + \alpha \\ (0,5 + x)^2 + y^2 = K \end{cases} \quad x > 0, y > 0; \quad \alpha = 1 + 0,1m, \\ K = 0,6 + 0,1m, \\ m = 0,1, 2, 3, 4.$$

2. Найти решение следующих систем уравнений методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Начальное приближение найти графически.

$$1. \begin{cases} 3x^2y - y^2 - 1 = 0 \\ x^3 + xy^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \alpha x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \alpha = 1(45)3,5$$

3. Пример 1.3.

РАЗДЕЛ IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ

Пусть дана квадратная неособенная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ и неизвестные λ . Тогда можно построить следующую матрицу:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

(E - единичная матрица размера $n \times n$).

Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называют характеристическим (вектом)

уравнением матрицы A . Вековой определитель $|A - \lambda E|$ есть алгебраический многочлен степени n относительно λ со старшим коэффициентом $(-1)^n$:

$$|\lambda - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n) = (-1)^n P_n(\lambda).$$

Многочлен $P_n(\lambda)$ называют собственным многочленом матрицы A . Корни его называют собственными значениями (характеристическими числами) матрицы и обозначают их $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Они характеризуются тем, что однородная система

$$Ax = \lambda x \quad (я)$$

имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда λ есть собственное значение матрицы A . Отвечающие ему ненулевые решения системы называют собственными векторами матрицы, соответствующими значению λ .

Таким образом, задача отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы сводится к отысканию коэффициентов характеристического уравнения, отделения его корней, а затем к отысканию нетривиальных решений системы (я), в которой вместо λ подставлено одно из найденных собственных значений. Если для данного собственного значения система (я) имеет несколько линейно независимых решений, то этому собственному значению соответствует несколько собственных векторов.

Все численные методы отыскания собственных значений и собственных векторов можно разделить на две группы. К первой группе относятся так называемые прямые методы, в которых сначала находится характеристическое уравнение (т.е. его коэффициенты), решая которое находят собственные значения матрицы, а потом, соответствующие им, собственные вектора. Ко второй группе относятся итерационные методы, в которых собственные значения находятся как пределы некоторых числовых последовательностей без предварительного определения коэффициентов характеристического уравнения. При этом, как правило, одновременно вычисляются и собственные вектора. Итерационные методы чаще всего приспособлены к решению частичной проблемы собственных значений, т.е. к отысканию одного или нескольких собственных значений и отвечающих им собственных векторов. Прямые методы позволяют решать полную проблему собственных значений, т.е. отыскание всех собственных значений и всех соответствующих им собственных векторов.

п.1.1. Вычисление собственных значений

Пусть $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n)$ (I.1)

характеристический полином матрицы A . Согласно теореме Гамильтона-Кели о том, что всякая квадратная матрица является корнем своего характеристического полинома, матрица A обращает в нуль свой характеристический полином (I.1), поэтому

$$A^n + p_1 A^{n-1} + \dots + p_n E = 0 \quad (I.2)$$

Возьмем произвольный ненулевой вектор $y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$

и умножим на него обе части равенства (I.2). Получим

$$A^n y^{(0)} + p_1 A^{n-1} y^{(0)} + \dots + p_n y^{(0)} = 0 \quad (I.3)$$

Положим $A^k y^{(0)} = y^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). (I.4)

Тогда равенство (I.3) запишется в следующем виде:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y^{(0)} = 0 \quad (I.5)$$

$$\text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1^{(0)} & p_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2^{(0)} & p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n^{(0)} & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(n-1)} \\ y_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \vdots \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, векторное равенство (I.5) эквивалентно системе уравнений

$$p_1 y_i^{(n-1)} + p_2 y_i^{(n-2)} + \dots + p_n y_i^{(0)} = -y_i^{(n-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (I.6)$$

из которой, вообще говоря, можно определить неизвестные коэффициенты $p_1, p_2, \dots, p_n$. Так как из формулы (I.4) следует, что

$$y^{(k)} = A y^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то координаты $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}$ вектора $y^{(k)}$ последовательно вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(k-1)} \\ y_i^{(0)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(n-1)} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (I.7)$$

Тогда по методу Крылова коэффициенты $P_i (i=1, n)$ определяются как решение системы (I.6) при известных коэффициентах (I.7), причем координаты начального вектора

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

произвольны.

Если система (I.6) имеет единственное решение, то ее корни $P_1, P_2, \dots, P_n$ являются коэффициентами характеристического полинома (I.1). Это решение может быть найдено, например, методом Гаусса. Если же система (I.6) не имеет единственного решения, то в этом случае рекомендуется изменить начальный вектор.

п. I.2. Вычисление собственных векторов

Для простоты ограничимся случаем, когда характеристический полином

$$D(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n \quad (I.8)$$

имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Предположим, что коэффициенты $P_1, P_2, \dots, P_n$ полинома (I.8) и его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ определены. Требуется найти собственные векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, отвечающие соответственно собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Пусть $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}, A^{n-1} y^{(n)}$ — векторы, используемые в методе Крылова для нахождения коэффициентов $P_i (i=1, n)$.

Разложим вектор $y^{(i)}$ по собственным векторам $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$

$$y^{(i)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)} \quad (I.9)$$

где $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ — некоторые числовые коэффициенты.

Далее, учитывая, что

$$\begin{aligned} Ax^{(1)} &= \lambda_1 x^{(1)} \\ Ax^{(i)} &= \lambda_i x^{(i)} \quad (i=2, \dots, n) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{cases} y^{(1)} = c_1 \lambda_1 x^{(1)} + c_2 \lambda_2 x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n x^{(n)} \\ y^{(i-1)} = c_1 \lambda_1^{i-1} x^{(1)} + c_2 \lambda_2^{i-1} x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^{i-1} x^{(n)} \end{cases} \quad (I.10)$$

Пусть $\varphi_i(\lambda) = \lambda^{n-1} + q_{i-1} \lambda^{n-2} + \dots + q_{i-1} \lambda + q_i$ ($i=1, n$)

— произвольная система полиномов. Составим линейную комбинацию векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ с коэффициентами $1, q_1, \dots, q_{n-1}$. Тогда в силу соотношений (I.9) и (I.10) находим:

$$y^{(n-1)} + q_{n-1} y^{(n-2)} + \dots + q_1 y^{(1)} = c_1 \varphi_1(\lambda_1) x^{(1)} + c_2 \varphi_2(\lambda_2) x^{(2)} + \dots + c_n \varphi_n(\lambda_n) x^{(n)} \quad (I.11)$$

$$\text{Положим } \varphi_i(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} \quad (i=1, n)$$

Тогда, очевидно, $\varphi_i(\lambda_i) = 0$ при $i \neq j$ и $\varphi_i(\lambda_i) = D'(\lambda_i) \neq 0$.

Теперь формула (I.11) принимает вид

$$c_i \varphi_i(\lambda_i) x^{(i)} = y^{(n-1)} + q_{n-1} y^{(n-2)} + \dots + q_1 y^{(1)} \quad (i=1, n) \quad (I.12)$$

Таким образом, если $c_i \neq 0$, то полученная линейная комбинация векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ дает собственный вектор $x^{(i)}$ с точностью до числового множителя. Коэффициенты $q_{j,i}$ ($j=1, n-1$) находятся по схеме Горнера:

$$\begin{cases} q_{0,i} = 1 \\ q_{j,i} = \lambda_i q_{j-1,i} + p_j \end{cases} \quad (I.13)$$

Пример. Методом Крылова развернуть характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Выбираем произвольный ненулевой вектор $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пользуясь формулами

$$y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(n-1)}, \dots, y_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(0)} \quad (i=1, n),$$

определим координаты векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}$ ($k=1, 2, 3, 4$).

$$y^{(0)} = Ay^{(n)} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^{(2)} = A \cdot y^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$y^{(3)} = A y^{(2)} = \begin{pmatrix} -33 \\ 26 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad y^{(4)} = A y^{(3)} = \begin{pmatrix} 120 \\ -47 \\ -23 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Составим следующую систему

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & y_1^{(3)} & y_1^{(4)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & y_2^{(3)} & y_2^{(4)} \\ y_3^{(1)} & y_3^{(2)} & y_3^{(3)} & y_3^{(4)} \\ y_4^{(1)} & y_4^{(2)} & y_4^{(3)} & y_4^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{pmatrix},$$

которая после подстановки числовых значений запишется:

$$\begin{pmatrix} -13 & 12 & -4 & 1 \\ 20 & -5 & 2 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ 13 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ -47 \\ -23 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Решая эту систему методом Гаусса, получим:

$$p_1 = 3, \quad p_2 = -7, \quad p_3 = -24, \quad p_4 = -15$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4 =$$

$$= \lambda^4 + 3\lambda^3 - 7\lambda^2 - 24\lambda - 15$$

Приравняв нулю и решая полученное уравнение известными методами, находят собственные значения λ_i ($i=1, 2, 3, 4$), и по формулам (I.12) и (I.13) могут быть записаны собственные векторы соответствующие собственным значениям λ_i .

§ 2. Метод Данилевского

([2], с.1559-567; [4], с.402-412)

п. 2.1. Нахождение собственных значений

Идея метода состоит в том, что исходная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ для которой находится характеристический многочлен, с помощью подобных преобразований преобразуется к матрице

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_n \end{pmatrix},$$

имеющей нормальную форму Фробениуса. Так как подобные матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен, а

$$|P - \lambda I| = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{i=1}^n p_i \lambda^{i-1} \right),$$

то и $|A - \lambda I| = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{i=1}^n p_i \lambda^{i-1} \right)$

Подобные преобразования матрицы A к матрице P проводятся последовательно. На первом шаге матрица A преобразуется в подобную ей матрицу $A^{(1)}$, в которой предпоследний столбец имеет нужный вид. На втором шаге матрица $A^{(1)}$ преобразуется в подобную ей матрицу $A^{(2)}$, в которой уже два предпоследних столбца имеют нужный вид, и т.д.

На первом шаге матрица A умножается на матрицу

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ I_{n-1} & \tau \end{pmatrix}$$

и слева на матрицу, ей обратную, т.е. на матрицу

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} -a_{2n}/a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{3n}/a_{1n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{nn}/a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1/a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tau}{t} & I_{n-1} \\ \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что

$$C_1^{-1} A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1,n-1} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{n-1,1} & a'_{n-1,2} & \dots & a'_{n-1,n-1} & 0 \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

где $a'_{ik} = a_{ik} - a_{1k} \frac{a_{in}}{a_{1n}}$; $a'_{nn} = \frac{a_{nn}}{a_{1n}}$
($i=1, 2, \dots, n-1$; $k=1, 2, \dots, n$).

$$A^{(k)} \cdot C_1^{-1} A C_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1,n-2}^{(k)} & 0 & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2,n-2}^{(k)} & 0 & a_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1}^{(k)} & a_{n-2,2}^{(k)} & \dots & a_{n-2,n-2}^{(k)} & 0 & a_{n-2,n}^{(k)} \\ a_{n-1,1}^{(k)} & a_{n-1,2}^{(k)} & \dots & a_{n-1,n-2}^{(k)} & 1 & a_{n-1,n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\text{где } a_{i,k}^{(k)} = a_{i,k}^{(k-1)}; \quad a_{i,n}^{(k)} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(k-1)} a_{kn} \quad (i=1,2,\dots,n-1)$$

Таким образом, элементы матрицы $A^{(k)}$ могут быть получены из элементов матрицы A по формулам:

$$a_{i,k}^{(k)} = a_{i,k}^{(k-1)} - a_{i,n-1}^{(k-1)} \frac{a_{n-1,k}}{a_{n-1,n-1}}; \quad a_{i,n}^{(k)} = \frac{a_{i,n-1}^{(k-1)} a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \quad (i,k=1,2,\dots,n-1)$$

$$a_{i,n}^{(k)} = \sum_{k=1}^n (a_{i,n-1}^{(k-1)} - a_{i,n}^{(k-1)} \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}) a_{kn} \quad (i=1,2,\dots,n-1); \quad a_{n,n}^{(k)} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \sum_{k=1}^n a_{i,n-1}^{(k-1)} a_{kn}$$

На втором шаге матрица $A^{(1)}$ умножается справа на матрицу

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}^{(1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^{(1)} \\ I_{n-1} & \tau^{(1)} \end{pmatrix}$$

и слева на обратную к ней матрицу

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} -a_{1n}^{(1)}/a_{nn}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ -a_{2n}^{(1)}/a_{nn}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{nn}^{(1)}/a_{nn}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau^{(1)}/t^{(1)} & I_{n-1} \\ 1/t^{(1)} & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, элементы матрицы

$$A^{(2)} = C_2^{-1} A^{(1)} C_2 = (a_{ik}^{(2)})_{n \times n}$$

вычисляются по формулам

$$a_{i,n}^{(2)} = a_{i,n}^{(1)} - a_{i,n-1}^{(1)} \frac{a_{n-1,n}^{(1)}}{a_{n-1,n-1}^{(1)}}; \quad a_{i,n-1}^{(2)} = \frac{a_{i,n-1}^{(1)} a_{n-1,n}^{(1)}}{a_{n-1,n-1}^{(1)}} \quad (i,k=1,2,\dots,n-1)$$

$$a_{i,n}^{(2)} = \sum_{k=1}^n (a_{i,n-1}^{(1)} - a_{i,n}^{(1)} \frac{a_{n-1,n}^{(1)}}{a_{n-1,n-1}^{(1)}}) a_{kn}^{(1)}; \quad a_{n,n}^{(2)} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(1)}} \sum_{k=1}^n a_{i,n-1}^{(1)} a_{kn}^{(1)}$$

Учитывая, что $a_{i,n-1}^{(k)} = 0$ при $i \neq n$ и $a_{n,n-1}^{(k)} = 1$ из последних формул получаем:

$$a_{i,n-1}^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \neq n-1 \\ 1, & i = n-1 \end{cases}; \quad a_{n,n-1}^{(k)} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n \end{cases}$$

Это означает, что два предпоследних столбца матрицы $A^{(2)}$ имеют нужный нам вид.

Продолжая этот процесс после $i-1$ шагов, приходим к матрице

$$A^{(i-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}^{(i-1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}^{(i-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{nn}^{(i-1)} \end{pmatrix}$$

подобной матрице A и имеющей нормальную форму Фробениуса. При этом конечно предполагается, что $a_{nn}^{(i-1)} \neq 0$. Если же на j -м шаге окажется, что $a_{nn}^{(j)} = 0$, то продолжать процесс в описанном выше виде нельзя. При этом могут встретиться следующие два исключительных случая.

а) Среди элементов $a_{1n}^{(j)}, a_{2n}^{(j)}, \dots, a_{n-1,n}^{(j)}$ имеется хотя бы один элемент, отличный от нуля, например, $a_{kn}^{(j)}$. Тогда для продолжения процесса меняем в $A^{(j)}$ местами первую и i_0 -ю строки и одновременно первый и i_0 -й столбцы. Такое преобразование матрицы будет подобным. Получив матрицу $\tilde{A}^{(j)}$, можем продолжать процесс, так как столбцы матрицы $A^{(j)}$ при таком преобразовании не будут испорчены.

б) Все элементы $a_{1n}^{(j)}, a_{2n}^{(j)}, \dots, a_{n-1,n}^{(j)}$ равны нулю. Тогда матрица $A^{(j)}$ имеет вид

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ \beta & F \end{pmatrix}$$

где F - квадратная матрица порядка $j+1$, имеющая нормальную форму Фробениуса; B - квадратная матрица порядка $n-j-1$. Но

$$|A^{(j)} - \lambda I| = |B - \lambda I_{n-j-1}| \cdot |F - \lambda I_{j+1}|$$

Из последнего равенства видно, что для отыскания характеристического многочлена матрицы A нужно еще найти характеристический многочлен матрицы B , что можно сделать тем же методом, т.е. методом, приведенным выше.

Заметим, что в качестве C_1 можно взять произвольную матрицу $\begin{pmatrix} 0 & t \\ I_{n-1} & \tau \end{pmatrix}$

с $t \neq 0$. Это вызвало бы добавление только одного шага. В то же

время удачным выбором последнего столбца $\begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}$ можно уменьшить вычислительную погрешность.

Заметим, что выгодно брать в качестве последнего столбца компоненты вектора, близкого к собственному вектору A , соответствующему наименьшему по модулю собственному значению. Описанный выше процесс соответствует выбору этого столбца в виде $(1, 0, \dots, 0)$.

п.2.2. Отыскание собственных векторов

Пусть уже найдены все собственные значения λ_i матрицы A . Если матрица имеет нормальную форму Фробениуса, то ее собственные вектора находятся просто. В самом деле, пусть $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — собственный вектор матрицы P , соответствующий собственному значению λ . Тогда система

$$P\bar{y} = \lambda\bar{y}$$

может быть расписана следующим образом:

$$p_1 y_n = \lambda y_1$$

$$-y_1 + p_2 y_n = \lambda y_2$$

$$y_2 + p_3 y_n = \lambda y_3$$

$$y_{n-2} + p_{n-1} y_n = \lambda y_{n-1}$$

$$y_{n-1} + p_n y_n = \lambda y_n$$

Компонента $y_n \neq 0$, так как в противном случае, все $y_i = 0$ и $\bar{y} = 0$, что невозможно (собственный вектор — не нулевой вектор). Положив $y_n = 1$, получим

$$y_{n-1} = 1; y_{n-2} = \lambda - p_n; y_{n-3} = \lambda^2 - p_n \lambda - p_{n-1}; \dots$$

$$y_1 = \lambda^{n-1} - p_n \lambda^{n-2} - \dots - p_2 \lambda - p_1$$

Таким образом, найдены все компоненты вектора $\bar{y}$, если матрица имеет нормальную форму Фробениуса.

Если матрица A общего вида, то поступаем так. Обозначим через S матрицу

$$S = e_1 e_2 \dots e_n$$

Тогда, если $\bar{y}$ — собственный вектор матрицы P , соответствующий собственному значению λ , то из равенства

$$S^{-1}AS = P = A^{(n-1)}$$

следует, что $S^{-1}ASy = Py = \lambda y$

откуда получаем: $ASy = \lambda Sy$

Последнее означает, что вектор $x = Sy$ является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению λ .

Заметим, что собственные векторы матрицы A можно найти и так, как описано в методе Крылова.

§ 3. Задания к лабораторным работам по разделу IV

1. Методом Крылова развернуть характеристический многочлен следующих матриц:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 & 3.5 \\ 1.5 & 1 & 2 & 1.6 \\ 2.5 & 2 & 1 & 1.7 \\ 3.5 & 1.6 & 1.7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 2 & 0.5 \\ 1.2 & 1 & 0.4 & 1.2 \\ 0 & 0.4 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1.2 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1.6 & 1.6 & 1.7 & 1.7 \\ 1.6 & 2.6 & 1.3 & 1.3 \\ 1.7 & 1.3 & 3.6 & 1.7 \\ 1.7 & 1.3 & 1.7 & 1.6 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 1.7 & 1.6 & 5.5 \\ 1.7 & 1 & 2 & 1.5 \\ 1.6 & 2 & 3 & 1.5 \\ 5.5 & 1.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.2 & -1 \\ 0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\ 1.2 & -0.5 & -1 & 1.7 \\ -1 & 0 & 1.7 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Методом Крылова и Дамлевского найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц: ($\varepsilon = 10^{-3}$)

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1983. - 632с.
2. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, т. I, 1956. - 632с.
3. Крылов В.И., Есбков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. - М.: Наука, т. I, 1976. - 304с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1970. - 664 с.
5. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1972. - 271с.
6. Сборник задач по методам вычислений (под ред. Монастырного П.И.). - Минск.: БГУ, 1981. - 287.
7. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1972. - 367с.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. Решение систем линейных алгебраических уравнений	3
§ 1. Методы последовательного исключения неизвестных	4
1.1. Схема исключения с ведущим элементом	4
1.2. Метод Гаусса с выбором главного элемента	5
1.3. Применение метода Гаусса для вычисления определителя	16
1.4. Применение метода Гаусса для нахождения обратной матрицы	6
§ 2. Методы, основанные на представлении матрицы в виде произведения двух треугольных матриц	6
2.1. Метод квадратного корня для решения СЛАУ	7
2.2. Метод Халдейского для решения СЛАУ	9
§ 3. Итерационные методы решения СЛАУ	10
3.1. Метод простой итерации решения СЛАУ	10
3.2. Условия сходимости метода простой итерации	11
3.3. Метод Зейделя решения СЛАУ	12
3.4. О сходимости метода Зейделя	13
3.5. Другая форма метода Зейделя	15
§ 4. Примеры	16
§ 5. Задания к лабораторным работам по разделу I	20
Раздел II. Численные методы решения нелинейных уравнений	23
§ 1. Отделение корней	23
1.1. Графический способ отделения корней	23
1.2. Аналитический способ отделения корней	24
1.3. Определение числа действительных корней алгебраических уравнений и определение области их существования	25
§ 2. Метод итерации	26
§ 3. Метод секущих (хорд)	28
§ 4. Метод Ньютона (касательных)	31
§ 5. Комбинированный метод	33
§ 6. Пример	34
§ 7. Задания к лабораторным работам по разделу II	36
Раздел III. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений	37
§ 1. Метод простой итерации решения СНАУ	37
§ 2. Метод Зейделя решения СНАУ	39
§ 3. Метод Ньютона решения СНАУ	39
§ 4. Примеры	41

§ 5. Задания к лабораторным работам по разделу III	43
Раздел IV. Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы	43
§ 1. Метод Крылова	45
1.1. Вычисление собственных значений	45
1.2. Вычисление собственных векторов	46
§ 2. Метод Данилевского	48
2.1. Нахождение собственных значений	48
2.2. Отыскание собственных векторов	52
§ 3. Задания к лабораторным работам по разделу IV	53
Литература	54

Методические указания и задания к лабораторным работам по курсу
 "Методы вычислений" для студентов-заочников 5 курса специальности
 "Математика". Часть 2.

Составители: Николай Тарасович Всинов
 Сергей Иванович Голик
 Михаил Иванович Жадан
 Людмила Антоновна Цурганова

Подписано к печати 23.09.87. Формат 60х84 1/16. Объем усл.п.л. 3,26.
 Уч.-изд.л. 2,7 Зак. 249 Тираж 200 Бесплатно

Отпечатано на ротапринтере ГТУ, г.Гомель, ул.Советская, 104.