МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Г. Ермаков

ТОПОЛОГИЯ

(метрические и топологические пространства)

Учебное пособие

Гомель 1984

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ... СКОРИНЫ

Рецензенты: Ю.Г.Золотухин, кандидат физико-математических наук Гродненского государственного университета;
Д.Н.Качевский, кандидат физико-математических наук Чувашского государственного университета им. И.Н.Ульянова

Пособие представляет собой введение в общую топологию. В нем рассмотрены в основном все вопросы, предусмотренные по этому разделу действующей программой курса "Топология". Большое внимание уделено анализу развития основных понятий топологии.

Пособие предназначено студентам-заочникам специальности "Математика".

$\text{Е}\,\frac{20203-031}{\text{М}\,339-84}$ – 2 – 84 1702030000

© Гомельский государственный университет (ГГУ), 1984

В настоящем пособии излагается та часть курса "Топология", которая посвящена метрическим и топологическим пространствам и их непрерывным отображениям. Эту часть обычно называют теоретико-множественной или общей топологией.

Предполагается предварительное знакомство с элементами теории множеств (например, по книге [3], гл.I). Всюду в дальнейшем запись $\forall x \in X\ P(x)$ обозначает утверждение: "для всякого элемента x множества X свойство P выполнено", запись $\exists x \in X\ P(x)$ означает, что "существует по крайней мере один элемент x из X, обладающий свойством P", импликация $A \Rightarrow B$ означает, что A влечет B, эквивалентность $A \Leftrightarrow B$ означает, что $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Если $f: X \to Y$ – отображение из X в Y, $C \subset X$ и $D \subset Y$, то множество $f(C) = \{y \in Y \mid \exists x \in C,\ y = f(x)\}$ называется образом множества C при отображении f, а множество $f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$ – прообразом множества D при отображении f.

Часть I. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие метрического пространства было введено в 1906 году учеником Ж.Адамара французским математиком Морисом Фреше (2.9.1878 – 4.5.1973). Метрические пространства образуют частный (и весьма важный) класс топологических пространств. Их изучение до введения топологического пространства помогает проследить за развитием основных понятий топологии.

§ 1. Определение и примеры метрических пространств

Определение 1.1. Пусть X – непустое множество. Отображение $\rho: X \times X \to R$, которое каждой упорядоченной паре (x,y) элементов из X ставит в соответствие некоторое действительное число $\rho(x,y)$, называется метрикой на X, если при любых $x, y, z \in X$ выполнены следующие условия (аксиомы):

М1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

М2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметричность);

М3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Напоминание. $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ – декартово произведение множеств X и Y.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ...

<u>Определение I.2.</u> Множество X с заданной на нем метрикой ρ, т.е. пара (X,ρ), называется <u>метрическим пространством</u>. При этом элементы множества X называются <u>точками</u> этого пространства, а число $\rho(x,y)$ – <u>расстоянием</u> между точками x и y.

Если в неравенстве треугольника положить $z=x$ и воспользоваться аксиомами MI, M2, то получим, что для любых $x,y\in X$ $\rho(x,y)\geqslant 0$, а при $x\neq y$ $\rho(x,y)>0$.

На одном и том же множестве X могут быть заданы различные метрики, но если из контекста ясно, о какой метрике идет речь, метрическое пространство (X,ρ) обозначают также и одной буквой X.

Приведем несколько простых примеров метрических пространств.

<u>Пример I.I.</u> Пусть X – произвольное непустое множество. Полагая для любых $x,y\in X$ $\rho(x,y)=0$, если $x=y$, и $\rho(x,y)=1$, если $x\neq y$, получаем, как легко проверить, метрику на X, называемую <u>дискретной</u> метрикой. (X,ρ) называется дискретным метрическим пространством.

<u>Пример I.2.</u> На множестве R всех действительных чисел определим метрику, полагая для любых $x,y\in R$ $\rho(x,y)=|x-y|$. Аксиомы MI – M3 легко проверяются. Докажем, например, неравенство треугольника: $\rho(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|\leqslant \leqslant|x-y|+|y-z|=\rho(x,y)+\rho(y,z)$. Полученную метрику называют естественной или евклидовой метрикой на множестве действительных чисел, полученное метрическое пространство обозначают R^1.

<u>Пример I.3.</u> Пусть X_n – арифметическое n-мерное пространство, т.е. множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел. Если $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $y=(y_1,\dots,y_n)$ – точки из X_n, то расстояние между ними определим так:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}. \qquad (I.I)$$

Пространство X_n с такой метрикой называют n-мерным евклидовым пространством и обозначают R^n.

Аксиомы MI и M2 для метрики, определенной формулой (I.I), проверяются просто. Докажем неравенство треугольника, т.е. докажем, что при всех $x,y,z\in X_n$ имеет место неравенство

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2}. \qquad (I.2)$$

Полагая $x_k-y_k=a_k$, $y_k-z_k=b_k$, получаем $x_k-z_k=a_k+b_k$;

неравенство (I.2) принимает при этом вид:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}. \qquad (I.3)$$

Но это неравенство сразу вытекает из следующего неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2. \qquad (I.4)$$

Действительно, в силу неравенства (I.4) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=$$
$$=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2;$$

тем самым неравенство (I.3), а следовательно и (I.2), доказано.

Для доказательства использованного выше неравенства Коши-Буняковского заметим, что при любом $\lambda\in R$

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+b_k)^2=\lambda^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

Но квадратный трехчлен относительно λ может принимать неотрицательные значения при всех действительных λ лишь если его дискриминант неположителен, т.е.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leqslant 0.$$

Неравенство (I.4) доказано.

<u>Пример I.4.</u> R_1^n – множество X_n с метрикой

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|.$$

<u>Пример I.5.</u> R_∞^n – множество X_n с метрикой

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

Отметим, что в последних трех примерах на одном и том же множестве X_n заданы три разных метрики, и следовательно, построены три разных метрических пространства.

<u>Пример I.6.</u> Пусть X - множество всех непрерывных действительных функций, заданных на отрезке $[a,b]$. Введем метрику, полагая

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|. \qquad (I.5)$$

Проверим выполнение аксиом метрики. Очевидно, $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $\forall t\in[a,b]\ x(t)=y(t)$, т.е. когда функции x и y равны. Равенство $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ вытекает из того, что $\forall t\in[a,b]\ |x(t)-y(t)|=|y(t)-x(t)|$. Остается проверить аксиому треугольника. Для любого $t\in[a,b]$ имеем

$$|x(t)-z(t)|\le|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\le$$

$$\le\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\le t\le b}|y(t)-z(t)|=\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Отсюда в силу теоремы о сохранении знака неравенства при переходе к точной верхней грани получаем

$$\rho(x,z)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|\le\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Построенное пространство (X,ρ) называют пространством непрерывных функций и обозначают $C[a,b]$.

<u>Пример I.7.</u> Если во множестве всех последовательностей $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$, ввести метрику

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2},$$

то соответствующее метрическое пространство обозначается символом ℓ_2.

Отметим, что функция ρ имеет смысл для любых $x,y\in\ell_2$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2$ сходится, поскольку в силу элементарного неравенства $(x_k\pm y_k)^2\le2(x_k^2+y_k^2)$ этот ряд мажорируется рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k^2+y_k^2)$, сходящимся как сумма двух сходящихся рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k^2$. Справедливость аксиом MI и M2 очевидна. Неравенство треугольника для $x,y,z\in\ell_2$ можно получить из доказанного ранее неравенства (I.2) предельным переходом при $n\to\infty$.

Неограниченное количество дальнейших примеров дает следующий прием. Пусть (X,ρ) - метрическое пространство, Y - произвольное (непустое) подмножество X. Метрика ρ в X естественным образом определяет метрику ρ_Y в Y, а именно: для любых $x,y\in Y$ полагаем $\rho_Y(x,y)=\rho(x,y)$. Ясно, что при таком определении функции $\rho_Y: Y\times Y\to\mathbb{R}$ аксиомы MI - M3 выполняются. Метрическое пространство (Y,ρ_Y) называется <u>подпространством</u> пространства (X,ρ), метрика ρ_Y называется <u>индуцированной</u> в Y из пространства (X,ρ).

<u>Определение I.3.</u> Метрические пространства $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$ называются <u>изометричными</u>, если существует биективное отображение $f: X_1\to X_2$ (т.е. взаимно-однозначное отображение множества X_1 на множество X_2) такое, что

$$\forall x,y\in X_1\quad \rho_2(f(x),f(y))=\rho_1(x,y).$$

При этом отображение f называется <u>изометрией</u>.

Ясно, что свойства пространства, связанные с метрикой, у изометричных пространств одинаковы.

§ 2. Сферы, открытые и замкнутые шары, окрестности

Наличие метрики позволяет по аналогии с трехмерным евклидовым пространством ввести понятие сферы и шара в произвольном метрическом пространстве.

<u>Определение 2.I.</u> Пусть (X,ρ) - метрическое пространство, $x_0\in X$ и $r>0$ - фиксированное действительное число. Множество $B(x_0,r)=\{x\in X\mid\rho(x,x_0)<r\}$ называется <u>открытым шаром</u> с центром в точке x_0 и радиуса r, $B[x_0,r]=\{x\in X\mid\rho(x,x_0)\le r\}$ - <u>замкнутый шар</u> в (X,ρ), $S(x_0,r)=\{x\in X\mid\rho(x,x_0)=r\}$ - <u>сфера</u> в (X,ρ).

<u>Пример 2.I.</u> В пространстве $\mathbb{R}^1$ (действительных чисел с естественной метрикой) шар $B(x_0,r)$ является открытым интервалом $]x_0-r,x_0+r[$.

<u>Пример 2.2.</u> В $\mathbb{R}^2$ (т.е. на плоскости с естественной метрикой) сферы - это окружности, открытые шары - это круги без ограничивающих окружностей, а замкнутые шары - круги вместе с огра-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ И

ничивающими окружностями.

Пример 2.3. Шары $B(x_0,r)$ в пространствах R_1^2 и R_∞^2 изображены на рисунках 2.1 и 2.2 соответственно.

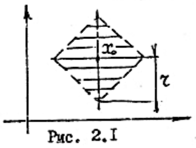

Рис. 2.1

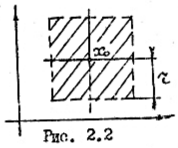

Рис. 2.2

Пример 2.4. В пространстве $C[a,b]$ открытый шар $B(x_0,r)$ составляют все непрерывные функции, графики которых лежат внутри полосы высоты $2r$, полученной поднятием вверх и опусканием вниз графика функции $x_0=x_0(t)$ на величину r (см. рис. 2.3).

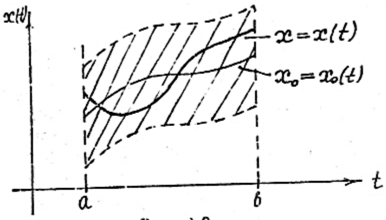

Рис. 2.3

Вопрос. Из чего состоит замкнутый шар $B[x_0,r]$ в $C[a,b]$?

Упражнение 2.1. Укажите из каких точек состоят множества $B(x_0,r)$, $B[x_0,r]$ и $S(x_0,r)$ при различных значениях r в дискретном метрическом пространстве (см. пример 1.1).

Если (Y,ρ_Y) – подпространство метрического пространства (X,ρ), то, как следует из определения, сферы и шары в (Y,ρ_Y) есть пересечения с множеством Y сфер и шаров пространства (X,ρ) с теми же центрами и радиусами.

Вопрос. Может ли шар радиуса 3 содержаться в шаре радиуса 2 и не совпадать с ним?

Определение 2.2. Множество A в метрическом пространстве (X,ρ) называется ограниченным, если существует такой шар

$B(x_0,r)$, что $A\subset B(x_0,r)$.

Определение 2.3. Окрестностью $O(x_0)$ точки $x_0\in X$ в метрическом пространстве (X,ρ) называется всякое множество в X, содержащее некоторый открытый шар $B(x_0,r)$ с центром в точке x_0.

Приведем основные свойства семейства всех окрестностей произвольной точки $x_0\in X$.

Предложение 2.1. 01) Точка x_0 принадлежит любой своей окрестности (и, значит, окрестность точки есть непустое множество); 02) всякое множество, содержащее окрестность точки x_0, само является окрестностью точки x_0; 03) пересечение любого конечного числа окрестностей точки x_0 является окрестностью точки x_0; 04) для любой окрестности U точки x_0 существует такая окрестность V точки x_0, что $V\subset U$ и V является окрестностью каждой точки $y\in V$.

◁Свойство 01) вытекает из того, что центр шара принадлежит шару (проверьте!); свойство 02) – непосредственно из определения; свойство 03) следует из того, что пересечение конечного числа шаров с общим центром есть шар с тем же центром; и, наконец, для доказательства свойства 04) достаточно в качестве V взять шар $B(x_0,r_0)$, имеющийся в U по определению окрестности. В самом деле, если $y\in B(x_0,r_0)$, то $\rho(y,x_0)<r_0$ и определен шар $B(y,r)$, где $r=r_0-\rho(y,x_0)>0$. При этом последний целиком содержится в шаре $B(x_0,r_0)$, поскольку для любого

$z\in B(y,r)$ $\rho(z,x_0)\le\rho(z,y)+\rho(y,x_0)<r_0-\rho(y,x_0)+$
$+\rho(y,x_0)=r_0$. ▷

§ 3. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства. Замыкание множества

3.1. Открытые множества

Определение 3.1. Множество $A\subset V$ называется открытым в метрическом пространстве (X,ρ), если для любой точки $x\in A$ найдется открытый шар $B(x,r)$, такой, что $B(x,r)\subset A$.

Замечание 3.1. Сравнивая определения 2.3 и 3.1 легко заметить, что множество A открыто в метрическом пространстве тогда и только тогда, когда A является окрестностью каждой своей точки (докажите это).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

Пример 3.1. Открытый шар $B(x_0, r_0)$ метрического пространства (X,ρ) является открытым множеством (см. доказательство предложения 2.1).

Пример 3.2. Дополнение $X \setminus B[x_0, r]$ к замкнутому шару открыто в (X, ρ), поскольку каждая точка x этого множества входит в него вместе с шаром $B(x, \rho(x, x_0) - r)$.

Пример 3.3. Интервал $]a, b[\subset \mathbb{R}^1$ – открытое множество в $\mathbb{R}^1$ (проверьте!).

Пример 3.4. В дискретном метрическом пространстве (см. пример 1.1) всякое множество A открыто, так как для любого $x \in A$ $B(x, 1) = \{x\} \subset A$.

Упражнение 3.1. Докажите, что множество $\{ x \in C[a, b] \mid \forall t \in [a, b]\ x(t) > 0\}$ открыто в $C[a, b]$.

Теорема 3.1. Семейство τ, состоящее из всех открытых подмножеств метрического пространства (X, ρ), обладает следующими тремя основными свойствами:

1) все множество X и пустое подмножество $\varnothing$ принадлежат τ;

2) объединение любого семейства множеств из τ входит в состав семейства τ;

3) пересечение конечного числа множеств из τ входит в состав семейства τ.

◁ 1) X открыто в (X, ρ), так как в силу определения 2.1 $\forall x \in X$ и $\forall r > 0$ $B(x, r) \subset X$. Пустое множество $\varnothing$ открыто в (X, ρ), поскольку оно не содержит элементов и благодаря этому удовлетворяет определению 3.1.

2) Пусть теперь $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, где $A_\alpha \in \tau$ для всех α из множества индексов I произвольной мощности. Пусть, далее, x – произвольная точка из A, тогда, очевидно, $\exists \alpha_0 \in I$, что $x \in A_{\alpha_0}$. Так как A_{α_0} открыто, то найдется такое число $r_0 > 0$, что $B(x, r_0) \subset A_{\alpha_0}$. Ввиду того, что $A_{\alpha_0} \subset A$, имеем $B(x, r_0) \subset A$, откуда в силу произвольности x и вытекает, что A открыто.

3) Пусть $A_1, \dots, A_n$ – открытые множества и $x \in A = A_1 \cap \dots \cap A_n$. Тогда $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $x \in A_k$ и, следовательно, $\exists r_k > 0$, такое, что $B(x, r_k) \subset A_k$. Но тогда, положив $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, имеем $r > 0$ и $B(x, r) \subset A$. Так как x – произвольная точка из A, A – открытое множество. ▷

Замечание 3.2. Пересечение бесконечной совокупности открытых множеств может и не быть открытым. Например, для любого

$n \in \mathbb{N}$ множество $A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ открыто в $\mathbb{R}^1$, но множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ не является открытым в $\mathbb{R}^1$.

Из примера 3.1 и теоремы 3.1 вытекает, что объединение любой совокупности открытых шаров в (X, ρ) есть открытое множество. Справедливо и обратное. Пусть A – произвольное открытое множество. Тогда $\forall x \in A\ \exists r_x > 0$ такое, что $B(x, r_x) \subset A$. Отсюда получаем, что $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$. Таким образом, доказано

Предложение 3.1. Множество A открыто в метрическом пространстве тогда и только тогда, когда A есть объединение некоторой совокупности открытых шаров.

Из предложения 3.1 легко получить

Предложение 3.2. Любое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^1$ есть объединение конечного или счетного семейства попарно непересекающихся интервалов.

3.2. Замкнутые множества

Определение 3.2. Множество $F \subset X$ называется замкнутым в метрическом пространстве (X, ρ), если его дополнение $X \setminus F$ открыто в (X, ρ).

Пример 3.5. В произвольном метрическом пространстве (X, ρ) замкнутые шары являются замкнутыми множествами (см. пример 3.2).

Пример 3.6. Одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто в любом метрическом пространстве (X, ρ). (Если $y \in X \setminus \{x\}$, то и $B(y, \rho(x, y)) \subset X \setminus \{x\}$).

Пример 3.7. В дискретном метрическом пространстве всякое множество замкнуто (см. пример 3.4).

Пример 3.8. Отрезок $[a, b]$ – замкнутое множество в $\mathbb{R}^1$.

Замечание 3.3. Как видно из примеров, множество может быть открытым и замкнутым одновременно. (В дискретном метрическом пространстве все подмножества являются такими). Но могут существовать множества, не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми, например, полуоткрытый интервал $]a, b]$ в $\mathbb{R}^1$ (проверьте!).

В силу принципа двойственности в теории множеств из теоремы 3.1 вытекает.

Предложение 3.3. 1) X и $\varnothing$ замкнуты в (X, ρ); 2) пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто; 3) объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Упражнение 3.2. Укажите бесконечное семейство замкнутых

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

множеств, объединение которых не будет замкнутым множеством.

3.3. Замыкание множества

Определение 3.3. Точка x метрического пространства (X,ρ) называется точкой прикосновения множества $A\subset X$, если в любой окрестности точки x есть точка, принадлежащая множеству A. Совокупность всех точек прикосновения множества A называется замыканием множества A и обозначается $[A]$ (или $\bar{A}$).

. В силу свойства 01) окрестностей точки (см. предложение 2.I) каждая точка множества A принадлежит $[A]$, т.е. $A\subset[A]$.

Предложение 3.4. Множество $F\subset X$ замкнуто в (X,ρ) тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием, т.е.

(F замкнуто в $(X,\rho)) \Leftrightarrow (F=[F]$ в (X,ρ))

◁ Необходимость. Пусть F замкнуто в (X,ρ). Тогда множество $X\setminus F$ открыто и поэтому в силу замечания 3.I является окрестностью каждой своей точки, причем такой окрестностью, в которой нет точек из F ($(X\setminus F)\cap F=\emptyset$). Значит, ни одна точка из $X\setminus F$ не является точкой прикосновения множества F. Следовательно, $[F]\subset X\setminus(X\setminus F)=F$. Отсюда и из полученного ранее включения $F\subset[F]$ вытекает, что $F=[F]$.

Достаточность. Пусть $F=[F]$ и пусть $x\in X\setminus F$ – произвольная точка. Тогда $x\notin F$ и в силу данного равенства $x\notin[F]$. Следовательно, найдется такая окрестность $O(x)$ точки x, в которой нет точек из F, т.е. $\exists O(x)\subset X\setminus F$. По свойству 02) окрестностей точки $X\setminus F$ – также окрестность точки x. Так как x – произвольная точка из $X\setminus F$, то в силу замечания 3.I $X\setminus F$ есть открытое множество. Тогда F – замкнутое множество. ▷

Пример 3.9. Пусть $(X,\rho)=R^1$, Q – множество рациональных чисел и $A=\{\frac{1}{n} \mid n\in N\}$. Тогда $[Q]=R$, $[A]=A\cup\{0\}$.

Пример 3.10. В пространстве Q^1, у которого $X=Q$, а $\rho(x,y)=|x-y|$, замыкание $[Q]=Q$ (в X других точек нет!).

Замечание 3.4. Последние два примера показывают, что замыкание одного и того же множества в разных пространствах может быть различным.

Определение 3.4. Множество A называется всюду плотным в

(X,ρ), если $[A]=X$.

Пример 3.II. Q всюду плотно в R^1. Множество $R\setminus Q$ иррациональных чисел всюду плотно в R^1.

§ 4. Сходимость в метрическом пространстве. Полные метрические пространства. Пополнение

4.I. Сходимость. Напомним, что последовательностью элементов непустого множества X называют отображение множества N в X, т.е. функцию, которая каждому натуральному числу n $(n\in N)$ ставит в соответствие элемент $x_n\in X$. Обозначают последовательность так: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, (x_n), $(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$. Пусть (x_n) – последовательность элементов множества X, а (n_k) – возрастающая последовательность натуральных чисел, т.е. отображение $N\to N$, $k\to n_k$, такое, что $n_1<n_2<n_3<\dots$. Тогда отображение $N\to X$, $k\to x_{n_k}$ задает последовательность (x_{n_k}), которую называют подпоследовательностью последовательности (x_n).

Определение 4.I. Последовательность (x_n) точек метрического пространства (X,ρ) называется фундаментальной в (X,ρ), если для любого действительного числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $n_\varepsilon\in N$, что $\forall n\geq n_\varepsilon$ и $\forall m\geq n_\varepsilon$ $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

Определение 4.2. Последовательность (x_n) точек из X называется сходящейся в метрическом пространстве (X,ρ), если она имеет в этом пространстве предел. Точка $x\in X$ называется пределом (x_n) в (X,ρ), если $\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in N$ такое, что $\forall n>n_\varepsilon$ $\rho(x_n,x)<\varepsilon$. Обозначение: $\lim x_n=x$ или $x_n\longrightarrow x$ при $n\to\infty$.

Заметим, что в силу определения открытого шара $\rho(x_n,x)<\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $x_n\in B(x,\varepsilon)$. Отсюда и из того, что окрестность точки x есть множество, содержащее некоторый открытый шар с центром в точке x, нетрудно получить, что сформулированное определение предела последовательности эквивалентно следующему.

Определение 4.3. Точка $x\in X$ называется пределом последовательности (x_n) в метрическом пространстве (X,ρ), если вне любой окрестности точки x лежит лишь конечное число членов последовательности (x_n).

Определение 4.4. Последовательность (x_n) точек метрического пространства (X,ρ) называется ограниченной, если ограничено множество ее значений.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

<u>Предложение 4.I</u>. Пусть (x_n) – сходящаяся последовательность точек метрического пространства (X,ρ). Тогда она I) ограничена, 2) имеет единственный предел, 3) фундаментальна.

◁Эти свойства доказываются так же, как и аналогичные свойства числовых последовательностей в курсе математического анализа. <u>Докажите их в качестве упражнения</u>. Для примера рассмотрим утверждение 3). Пусть (x_n) – последовательность, сходящаяся в (X,ρ) к точке a и $\varepsilon>0$ – произвольное число. В силу определения предела последовательности для числа $\frac{\varepsilon}{2}>0$ $\exists n_\varepsilon\in N$ такое, что $\forall n\geq n_\varepsilon$ $\rho(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n\geq n_\varepsilon$ и $\forall m\geq n_\varepsilon$

$$\rho(x_n,x_m)\leq\rho(x_n,a)+\rho(a,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность (x_n) фундаментальна.▷

<u>Замечание 4.I</u>. Обратное к свойству 3) утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Вот пример. Пусть Q^1 – множество рациональных чисел с естественной метрикой. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ (очевидно, $x_n\in Q$). Как известно из курса математического анализа, последовательность (x_n) фундаментальна. Однако, она не сходится в Q^1, так как в случае сходимости в Q^1 ее предел – некоторое рациональное число – был бы пределом последовательности (x_n) и в R^1, но в R^1 рассматриваемая последовательность имеет только один предел – иррациональное число e.

В то же время из математического анализа известно, что всякая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится (в естественной метрике) к некоторому действительному числу. Этот факт играет очень важную роль. Таким же свойством обладают и многие другие метрические пространства. Естественно выделить класс таких пространств.

<u>Определение 4.5.</u> Метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность точек сходится, называется <u>полным</u> метрическим пространством.

4.2. <u>Примеры полных метрических пространств</u>

<u>Пример 4.1.</u> R^1 – полное пространство.

<u>Пример 4.2</u>. Пространство R^n (см. пример I.3) является полным.

◁Пусть $(x^p)_{p=1}^{\infty}$ – произвольная фундаментальная последовательность в R^n, где $x^p=(x_1^p,\dots,x_n^p)$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ $\exists p_\varepsilon\in N$ такое, что $\forall p\geq p_\varepsilon$ и $\forall q\geq p_\varepsilon$ $\rho(x^p,x^q)<\varepsilon$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^p-x_k^q)^2<\varepsilon^2. \tag{4.I}$$

Отсюда вытекает, что при любом фиксированном $k\in\{1,\dots,n\}$ $\forall p\geq p_\varepsilon$ и $\forall q\geq p_\varepsilon$ $|x_k^p-x_k^q|<\varepsilon$, и значит, $(x_k^p)_{p=1}^{\infty}$ – фундаментальная числовая последовательность в R^1. В силу полноты R^1 эта последовательность имеет предел, т.е. $\exists x_k^0\in R^1$, что $\lim\limits_{p\to\infty}x_k^p=x_k^0$ (в R^1). Тогда $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ – предел последовательности (x^p) (в R^n). Последнее легко заметить, если перейти в неравенстве (4.I) к пределу при $q\to\infty$.▷

<u>Пример 1.3</u>. $C[a,b]$ – полное пространство.

◁Пусть (x_n) – фундаментальная последовательность в $C[a,b]$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon\in N$ такое, что $\forall n\geq n_\varepsilon$ и $\forall m\geq n_\varepsilon$

$$\rho(x_n,x_m)=\max_{a\leq t\leq b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\forall t\in[a,b]\quad |x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon. \tag{4.2}$$

Отсюда вытекает, что для каждого фиксированного $t_0\in[a,b]$ числовая последовательность $(x_n(t_0))$ фундаментальна в R^1 и в силу полноты R^1 сходится к некоторому действительному числу, которое обозначим через $x(t_0)$. Если теперь каждому $t_0\in[a,b]$ поставить в соответствие указанное число $x(t_0)$, то в результате получим некоторую функцию $x:[a,b]\to R^1$. Докажем, что

I) $x\in C[a,b]$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$.

I) Фиксируем $\varepsilon>0$ и оценим $|x(t_1)-x(t_2)|$. Имеем

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leq|x(t_1)-x_{n_0}(t_1)|+$$
$$+|x_{n_0}(t_1)-x_{n_0}(t_2)|+|x_{n_0}(t_2)-x(t_2)|, \tag{4.3}$$

где $t_1,t_2\in[a,b]$, а n_0 – пока произвольный номер.

Переходя в неравенстве (4.2) к пределу при $m\to\infty$, легко заметить, что для достаточно больших n величина $|x_n(t)-x(t)|$ становится меньше любого наперед заданного числа сразу для всех $t\in[a,b]$. Выберем n_0 настолько большим, чтобы первое и третье слагаемые в правой части неравенства (4.3) были меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$. Функция x_{n_0} непрерывна на отрезке $[a,b]$ и в силу теоремы Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$. Поэтому для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ найдется такое число $\delta>0$, что $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ $(|t_1-t_2|<\delta\Rightarrow$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

$\Rightarrow |x_{n_0}(t_1)-x_{n_0}(t_2)|<\frac{\varepsilon}{3})$. При таком δ из неравенства (4.3) получаем, что если $t_1, t_2 \in [a,b]$ и $|t_1-t_2|<\delta$, то $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$. Это и означает непрерывность функции x.

2) Предельный переход при $m\to\infty$ в неравенстве (4.2) показывает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \geq n_\varepsilon\ \rho(x_n, x) = \max\limits_{a\leq t\leq b}|x_n(t)-x(t)| \leq \varepsilon$. Значит, последовательность (x_n) сходится в $C[a,b]$ к функции x. ▷

4.3. Принцип вложенных шаров. В этом пункте рассмотрим одно из многих важных свойств полных метрических пространств.

Теорема 4.I. (принцип вложенных шаров). Для того, чтобы метрическое пространство (X,ρ) было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

◁ Необходимость. Пусть (X,ρ) – полное метрическое пространство. Рассмотрим произвольную последовательность $(B[x_n, r_n])$ замкнутых шаров, такую, что $B[x_1, r_1]\supset B[x_2, r_2]\supset \ldots$ и $r_n \to 0$ при $n\to\infty$. Требуется доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \neq \emptyset$.

Сначала покажем, что последовательность (x_n) центров этих шаров фундаментальна. В самом деле, по условию при $k > n$ $B[x_k, r_k]\subset B[x_n, r_n]$, откуда, в частности, следует, что при тех же k и n $x_k \in B[x_n, r_n]$, и значит, $\rho(x_k, x_n)\leq r_n$. Кроме того, так как $r_n\to 0$ при $n\to\infty$, то, очевидно, $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n\geq n_\varepsilon\ 2r_n<\varepsilon$. Тогда $\forall k \geq n_\varepsilon$ и $\forall l \geq n_\varepsilon$ $\rho(x_k, x_l)\leq \rho(x_k, x_{n_\varepsilon})+\rho(x_{n_\varepsilon}, x_l)\leq 2r_{n_\varepsilon}<\varepsilon$. Фундаментальность последовательности (x_n) доказана.

Поскольку (X,ρ) является полным пространством, последовательность (x_n) сходится в (X,ρ) к некоторой точке $x\in X$. Покажем, что эта точка принадлежит пересечению шаров. Предположим противное, т.е. предположим, что найдется шар $B[x_{n_0}, r_{n_0}]$, который не содержит точки x. Тогда $x \in X\setminus B[x_{n_0}, r_{n_0}]$. В силу примера 3.2 дополнение к замкнутому шару открыто и поэтому (см. замечание 3.I) является окрестностью точки x. Так как x – предел последовательности (x_n), то вне этой окрестности должно лежать лишь конечное число членов последовательности (см. определение 4.3). Но это противоречит тому, что, как было отмечено выше, $\forall n\geq n_0\ x_n \in B[x_{n_0}, r_{n_0}]$. Из полученного противоречия вытекает, что $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$.

Достаточность. Здесь докажем, что если любая последовательность шаров, удовлетворяющая условию теоремы, имеет непустое пересечение, то (X,ρ) – полное пространство.

Пусть (x_n) – фундаментальная последовательность точек из X. В силу фундаментальности (x_n) $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n\geq n_1\ \rho(x_{n_1}, x_n)<\frac{1}{2}$. Положим $B_1 = B[x_{n_1}, 1]$. Далее, используя фундаментальность (x_n), выберем n_2 так, чтобы выполнялись условия $n_2>n_1$ и $\forall n\geq n_2\ \rho(x_{n_2}, x_n)<\frac{1}{2^2}$. Положим $B_2 = B[x_{n_2}, \frac{1}{2}]$. Легко проверить, что $B_2 \subset B_1$. Этот процесс продолжим дальше, а именно: если $x_{n_1},\ldots,x_{n_k}$ уже выбраны, причем $n_1<n_2<\ldots<n_k$, то n_{k+1} будем считать таким, что $n_{k+1}>n_k$ и $\forall n\geq n_{k+1}\ \rho(x_n, x_{n_{k+1}})<\frac{1}{2^{k+1}}$. Положим $B_{k+1} = B[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$. В результате получаем последовательность (B_k) вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю ($\frac{1}{2^{k-1}}\to 0$ при $k\to\infty$), а центры которых образуют подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n). По условию $\exists x\in X$, такая, что $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Оказывается, что $x_{n_k}\to x$ при $k\to\infty$. В самом деле, из того, что $\forall k\in\mathbb{N}\ x\in B_k$, имеем $\rho(x_{n_k}, x)\leq\frac{1}{2^{k-1}}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Для окончания доказательства теоремы остается доказать следующее

Упражнение 4.I. Если подпоследовательность (x_{n_k}) фундаментальной последовательности (x_n) сходится к точке x, то и сама последовательность (x_n) сходится к x. ▷

Замечание 4.2. Если в теореме 4.I отказаться от условия $r_n\to 0$, то она становится неверной.

Упражнение 4.2. Доказать, что подпространство полного метрического пространства (X,ρ) является полным тогда и только тогда, когда оно замкнуто в (X,ρ).

4.4. Пополнение метрического пространства. Как уже отмечалось в замечании 4.I не все метрические пространства являются полными. Наряду с пространством $\mathbb{Q}^1$ не является полным, например, и множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}.$$

Оказывается, что если пространство (X,ρ) неполно, то его всегда можно пополнить, т.е. включить некоторым (и, по существу, единственным) способом в полное пространство.

Определение 4.6. Пополнением метрического пространства (X,ρ) называется такое полное метрическое пространство (X_0,ρ_0), в котором имеется всюду плотное подпространство, изометричное пространству (X,ρ).

Пример 4.4. $\mathbb{R}^1$ есть пополнение пространства $\mathbb{Q}^1$.

Справедлива следующая

Теорема 4.3 (теорема о пополнении). Для произвольного неполного метрического пространства существует его пополнение; при этом всякие два пополнения изометричны.

◁Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге[3] (гл.II,§3). Здесь дадим описание способа, которым строится пополнение (X_0,ρ_0) пространства (X,ρ).

На множестве K всех фундаментальных последовательностей точек пространства (X,ρ) введем следующее отношение эквивалентности: $((x_n)\sim(y_n))\Longleftrightarrow(\rho(x_n,y_n)\to 0$ при $n\to\infty)$. Это отношение разбивает множество K на попарно непересекающиеся классы эквивалентных между собой последовательностей. Совокупность этих классов и есть множество X_0.

Расстояние между точками $x_0,y_0\in X_0$ определяется так. Пусть (x_n) и (y_n) - представители классов x_0 и y_0 соответственно. Можно доказать, что последовательность действительных чисел $\rho(x_n,y_n)$ сходится в $\mathbb{R}^1$, причем предел не зависит от выбора представителей классов x_0 и y_0. Это позволяет положить:

$$\rho_0(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Оказывается, что построенное отображение $\rho_0: X_0\times X_0\to\mathbb{R}^1$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, так что (X_0,ρ_0) является метрическим пространством.

Далее, рассмотрим отображение $h: X\to X_0$, которое каждому $x\in X$ ставит в соответствие класс $h(x)$ последовательностей точек из X, сходящихся к x. Класс $h(x)$ не пуст, поскольку содержит стационарную последовательность $(x,x,\ldots,x,\ldots)$, сходящуюся к x. Очевидно, также, что каждый класс может содержать не более одной стационарной последовательности. Поэтому h есть биекция X на множество $h(X)\subset X_0$ ($h(X)$ - образ множества X при отображении h). Кроме того, несложно доказать, что $\forall x,y\in X$ $\rho_0(h(x),h(y))=\rho(x,y)$, и, значит, h - изометрия X на $h(X)$.

После этого остается доказать, что $h(X)$ всюду плотно в (X_0,ρ_0), что (X_0,ρ_0) - полное пространство и что любое другое

пополнение пространства (X,ρ) изометрично (X_0,ρ_0).▷

Замечание 4.3. Доказательство теоремы 4.3 повторяет использованную в курсе математического анализа схему пополнения рациональных чисел до действительных чисел.

Замечание 4.4. Утверждение из упражнения 4.2 дает еще один, практически более удобный способ строить пополнение пространства, а именно: если (X,ρ) является подпространством полного пространства (X_1,ρ_1), то в качестве пополнения пространства (X,ρ) можно взять его замыкание в (X_1,ρ_1).

Пример 4.5. Пополнением интервала $]a,b[\subset\mathbb{R}^1$ является отрезок $[a,b]$ - замыкание интервала $]a,b[$ в $\mathbb{R}^1$.

§5. Непрерывные отображения метрических пространств

Пусть (X,ρ) и (Y,ρ_1) - два не обязательно разных метрических пространства и $f: X\to Y$ - произвольное отображение из X в Y.

Определение 5.I. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0\in X$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall x\in X$ $(\rho(x,x_0)<\delta\Longrightarrow\rho_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon)$.

В частном случае, когда $X,Y\subset\mathbb{R}$, а ρ и ρ_1 - естественная метрика на множестве действительных чисел, определение 5.I представляет собой известное из курса математического анализа определение непрерывности числовой функции в точке.

Используя понятия открытого шара и образа множества при отображении, определение 5.I можно переписать следующим образом.

Определение 5.2. Отображение f непрерывно в точке $x_0\in X$, если для любого шара $B(f(x_0),\varepsilon)\subset Y$ с центром в точке $f(x_0)$ и радиуса ε найдется шар $B(x_0,\delta)\subset X$ с центром в точке x_0 и радиуса δ такой, что $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$.

Определения 5.I и 5.2 отличаются лишь способом записи основных моментов, но от определения 5.2 легче перейти к следующей важной формулировке непрерывности функции в точке.

Определение 5.3. Пусть (X,ρ) и (Y,ρ_1) - метрические пространства. Отображение $f: X\to Y$ называется непрерывным в точке $x_0\in X$, если для любой окрестности $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ найдется окрестность $O(x_0)$ точки x_0, такая, что

$$f(O(x_0))\subset O(f(x_0)).$$

Упражнение 5.I. Докажите эквивалентность определений 5.2 и 5.3.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

Определение 5.4. Отображение f называется непрерывным на X или просто непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке из X.

Примеры и свойства непрерывных отображений будут рассмотрены позже.

Комментарий к части I. В первых пяти параграфах пособия с помощью метрики (и по аналогии с курсом математического анализа) были определены такие фундаментальные понятия теории метрических пространств, как, например, понятия точки прикосновения, сходимости последовательности точек, непрерывности отображения и др. В то же время, как выяснилось, все эти понятия могут быть описаны исключительно в терминах окрестностей точек (или, что эквивалентно, в терминах открытых множеств). Это обстоятельство служит основой для чрезвычайно плодотворной идеи, заключающейся в том, чтобы исходным считать не метрику, а само семейство окрестностей точек (или семейство открытых множеств), причем описывать его не опираясь на какую-либо метрику или другую концепцию, использующую понятие числа, а посредством определенных аксиом, отражающих лишь наиболее основные свойства семейства окрестностей точек метрического пространства (соответственно, семейства открытых множеств метрического пространства). Именно таким путем и возникло столь фундаментальное для всей математики понятие топологического пространства.

Часть II. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятия топологического пространства и непрерывного отображения, выделенные в 1914 году немецким математиком Ф.Хаусдорфом (8.II.1868-21.I.1942), являются исходными понятиями общей топологии.

§6. Определение и примеры топологических пространств. База топологии.

6.I. Определение 6.I. Пусть X - некоторое множество. Топологией или топологической структурой на X называется любая система τ подмножеств из X, удовлетворяющая следующим свойствам (аксиомам):

T1) множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат семейству τ;

T2) объединение любой совокупности множеств из τ есть множество из τ;

T3) пересечение любого конечного числа множеств из τ есть множество из τ.

Определение 6.2. Множество X с заданной в нем топологией τ, т.е. пара (X,τ) называется топологическим пространством. При этом элементы множества X называются точками, а множества, принадлежащие системе τ, называются открытыми множествами в топологическом пространстве (X,τ).

Таким образом, задать топологическое пространство - это значит задать некоторое множество X и задать в нем топологию τ, т.е указать те подмножества X, которые считаются открытыми.

Определение 6.3. Множество $B\subset X$ - замкнуто в (X,τ), если его дополнение $X\setminus B$ открыто, т.е. $X\setminus B\in\tau$.

Упражнение 6.I. Докажите, что X и $\varnothing$ замкнуты в (X,τ), что пересечение любой совокупности и объединение любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутые множества.

Замечание 6.I. Если в некотором множестве X выделить систему подмножеств так, чтобы выполнялись свойства из упражнения 6.I, то, как легко проверить, дополнения к этим множествам будут удовлетворять аксиомам T1-T3. Следовательно, при необходимости топологию на X можно задать указав сначала систему замкнутых множеств (дополнения к которым и образуют топологию).

6.2. Примеры топологических пространств

Пример 6.I (Метрические пространства). Из теоремы 3.I вытекает, что система открытых множеств метрического пространства (X,ρ) (т.е. система множеств, которые вместе с каждой своей точкой содержат и некоторый открытый шар с центром в этой точке) образует некоторую топологию, которую называют топологией, индуцированной метрикой ρ, и обозначают τ_ρ.

Пример 6.2. Топология на $\mathbb{R}^n\ (n\in\mathbb{N})$, определяемая естественной метрикой, называется естественной топологией. Множества, открытые в естественной топологии пространства $\mathbb{R}^1$, легко перечислить - это $\varnothing$, всевозможные интервалы $]a,b[$ и их объединения, в том числе $\mathbb{R}=\bigcup_{k=1}^{\infty}]-k,k[$.

Пример 6.3. Пусть X - множество, состоящее из двух точек a и b. Система $\tau=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$ является, как легко проверить, топологией на X. В пространстве (X,τ) множества $\varnothing$, $\{a\}$ и X открыты, а множества $\varnothing$, $\{b\}$, X замкнуты.

Замечание 6.2. Топология пространства (X,τ) из примера 6.3

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

не порождается никакой метрикой на X , так как в противном случае в соответствии с примером 3.6 одноточечное множество $\{a\}$ было бы замкнуто, а это не так.

Вопрос о том, при каких условиях на множестве X существует такая метрика, что порождаемая ею топология совпадает с заданной топологией τ , составляет проблему метризации. Большой вклад в решение этой проблемы внесли советские математики П.С.Александров (7.5.1896-16.II.1982) и П.С Урысон (3.2.1898-17.8.1924). К названному вопросу вернемся позже, в п. II.4.

Пример 6.4. Пусть X – произвольное множество. Очевидно, система $\tau_0=\{\varnothing, X\}$ является топологией на X ; она называется минимальной или тривиальной. Говорят также, что τ_0 – антидискретная топология на X .

Пример 6.5. Пусть X – произвольное множество, а $\tau_1=\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}\subset X\}$ – совокупность всех подмножеств множества X . Проверьте, что τ_1 – топология. Она называется максимальной или дискретной. Заметим, что в (X,τ_1) любое множество одновременно открыто и замкнуто.

6.3. Сравнение топологий

Определение 6.4. Пусть на одном и том же множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2 . Тем самым определены два топологических пространства (X,τ_1) и (X,τ_2). Говорят, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2 (или τ_2 слабее τ_1), если $\tau_2\subset\tau_1$, т.е. если каждое множество из τ_2 содержится и в τ_1 .

Если τ_1 сильнее τ_2 , а τ_2 сильнее τ_1 , то топологии τ_1 и τ_2 совпадают, т.е. $\tau_1=\tau_2$.

Введенное соотношение устанавливает частичную упорядоченность в совокупности всех возможных топологий на множестве X . В этой совокупности топологий есть максимальный элемент – дискретная топология (см. пример 6.5) и минимальный элемент – антидискретная топология (см.пример 6.4). Таким образом, дискретная топология – самая сильная, а антидискретная топология – самая слабая топология из всех топологий, заданных на X . Однако сравнимы не все топологии. Например, заданные на множестве $X=\{a,b\}$ топологии $\tau_1=\{\varnothing,\{a\},X\}$ и $\tau_2=\{\varnothing,\{b\},X\}$ несравнимы, так как не выполняется ни одно из включений: $\tau_1\subset\tau_2$, $\tau_2\subset\tau_1$.

Пример 6.6. Различные метрики ρ, ρ_1 и ρ_∞ , введенные в примерах I.3, I.4 и I.5, определяют на множестве X_n одну и ту же (естественную) топологию (проверьте!). По этой причине эти метрики называют эквивалентными. Соответствующее топологическое

пространство обозначается через $\mathbb{R}^n$.

6.4. Индуцированная топология и подпространства.

Оказывается, что топология любого пространства естественным образом задает (индуцирует) в каждом подмножестве этого пространства некоторую вполне определенную топологию. В самом деле, пусть (X,τ) – топологическое пространство и $Y\subset X$ – фиксированное множество. Рассмотрим совокупность τ_Y всех тех подмножеств множества Y , которые представляют собой пересечение с Y открытых множеств пространства (X,τ) , т.е. $\tau_Y=\{B\subset Y \mid \exists A\in\tau, B=Y\cap A\}$. Имеет место

Теорема 6.I. Описанная система τ_Y является топологией на Y .

◁Требуемая для доказательства теоремы проверка аксиом TI–T3 предоставляется читателю.▷

Определение 6.5. Построенная выше на множестве Y топология τ_Y называется индуцированной (или наследственной) топологией из (X,τ) , а топологическое пространство (Y,τ_Y) называется подпространством пространства (X,τ) .

В дальнейшем, рассматривая топологические свойства множеств из подпространства (Y,τ_Y) топологического пространства (X,τ) , будем указывать относительно какой топологии (τ или τ_Y) эти свойства рассматриваются. Так, например, полуоткрытый интервал $]a,b]$ является открытым множеством на полупрямой $]-\infty,b]$ (с естественной топологией), замкнутым множеством на полупрямой $]a,+\infty[$ и не является ни открытым, ни замкнутым множеством на всей прямой $\mathbb{R}^1$.

Упражнение 6.2. Пусть (Y,τ_Y) – подпространство (X,τ) . Докажите, что $B\subset Y$ замкнуто в (Y,τ_Y) тогда и только тогда, когда существует замкнутое в (X,τ) множество A такое, что $B=Y\cap A$.

Упражнение 6.3. Докажите, что для того, чтобы всякое открытое в подпространстве (Y,τ_Y) множество A было открытым и в (X,τ), необходимо и достаточно, чтобы множество Y само было открытым подмножеством пространства (X,τ) . При каких условиях на Y каждое замкнутое в (Y,τ_Y) множество будет замкнуто и в (X,τ) ?

Упражнение 6.4. Пусть (Y,τ_Y) – подпространство пространства (X,τ) и A – произвольное подмножество множества Y (а, значит, и подмножество множества X). Докажите, что топология, индуцированная на A из (Y,τ_Y) , совпадает с топологией, индуцированной на A непосредственно из (X,τ) .

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

6.5. <u>База топологии</u>. Для задания на множестве X определенной топологии нет необходимости непосредственно указывать все открытые подмножества этой топологии. Оказывается, что достаточно указать лишь некоторую совокупность открытых множеств, обладающую определенным свойством и называемую базой этой топологии.

<u>Определение 6.6</u>. Совокупность β открытых множеств пространства (X,τ) называется <u>базой топологии</u> τ или базой пространства (X,τ), если всякое непустое открытое множество является объединением некоторой (конечной или бесконечной) совокупности множеств, принадлежащих β.

Ясно, что база топологии τ всегда существует, например, $\beta=\tau$.

<u>Предложение 6.I</u>. Для того, чтобы совокупность β открытых множеств топологии τ была базой этой топологии, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x\in X$ и любого содержащего x открытого множества A существовало множество $B\in\beta$ такое, что $x\in B\subset A$.

◁<u>Необходимость</u>. Пусть $\beta=\{B_\alpha \mid \alpha\in I\}$ - база топологии τ, $x_0\in X$ и $A_0\in\tau$, причем $x_0\in A_0$. В силу определения базы $\exists I_0\subset I$ такое, что $A_0=\bigcup_{\alpha\in I_0} B_\alpha$, где $B_\alpha\in\beta$. Так как $x_0\in A_0$, то $\exists \alpha_0\in I_0$ такое, что $x_0\in B_{\alpha_0}$. В результате имеем $x_0\in B_{\alpha_0}\subset A_0$.

<u>Достаточность</u>. Пусть теперь совокупность β открытых множеств удовлетворяет условию предложения 6.I, и $A\in\tau$ - произвольное множество. Тогда $\forall x\in A\ \exists B_x\in\beta$ такое, что $x\in B_x\subset A$. Легко проверить, что $A=\bigcup_{x\in A} B_x$, и, значит, произвольное открытое в (X,τ) множество представимо в виде объединения множеств из β. Следовательно, β - база топологии τ. ▷

<u>Пример 6.7</u>. В силу доказанного предложения на прямой $\mathbb{R}^1$ базой (естественной) топологии будет совокупность интервалов $]a,b[$, где $a,b\in\mathbb{R}$, т.е. система $\beta=\{]a,b[\mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Существенно, что и совокупность интервалов с рациональными концами также образует базу числовой прямой $\mathbb{R}^1$ $(\beta_1=\{]a,b[\mid a,b\in\mathbb{Q}\})$.

<u>Пример 6.8</u>. Совокупность всех открытых шаров произвольного метрического пространства (X,ρ) образует базу топологии этого пространства (см. также пример 3.I и предложение 3.I). Здесь тоже можно ограничиться шарами с рациональными радиусами.

<u>Пример 6.9</u>. В дискретном пространстве минимальную базу составляют одноточечные множества: $\beta=\{\{x\}\subset X \mid x\in X\}$.

Из предложения 6.I легко получить следующие два свойства базы β топологического пространства (X,τ).

БI) Объединение всех множеств, входящих в β, дает все множество X;

Б2) $\forall A,B\in\beta$ и $\forall x\in A\cap B\ \exists C\in\beta$ такое, что $x\in C\subset A\cap B$.

Оказывается, что эти свойства полностью характеризуют базу любой топологии, а именно, имеет место следующая важная теорема, которую приведем здесь без доказательства.

<u>Теорема 6.2</u> (о задании топологии посредством базы). Пусть в произвольном множестве X задана некоторая система β подмножеств из X, обладающая свойствами БI) и Б2). Тогда на множестве X существует единственная топология τ, одной из баз которой служит система β.

Сформулированная теорема указывает еще один способ задания топологии.

§ 7. Окрестности точки и их свойства. Фундаментальная система окрестностей точки

7.I. <u>Определение 7.I</u>. <u>Окрестностью точки</u> $x\in X$ в топологическом пространстве (X,τ) называется любое подмножество $O(x)$ множества X, если только оно содержит открытое в (X,τ) множество, содержащее точку x, т.е. ($O(x)$ - окрестность точки x в (X,τ)) $\Leftrightarrow$ $(\exists A\in\tau$ такое, что $x\in A\subset O(x))$. Любое открытое множество, содержащее точку x, называется <u>открытой окрестностью</u> точки x.

<u>Определение 7.2</u>. <u>Окрестностью множества</u> $M\subset X$ в (X,τ) называется множество $O(M)\subset X$, для которого $\exists A\in\tau$ такое, что $M\subset A\subset O(M)$.

<u>Замечание 7.I</u>. В связи с тем, что не все топологические пространства метризуемы (см. замечание 6,2), определение 7.I задает окрестности точки в более широком классе пространств, чем определение 2.3. Однако, для метрических пространств оба определения эквивалентны, поскольку в топологии, индуцированной метрикой, открытый шар является открытым множеством, а открытое множество содержит каждую свою точку вместе с некоторым открытым шаром.

<u>Предложение 7.I</u> Множество $M\subset X$ открыто в (X,τ) тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой своей точки.

◁<u>Необходимость</u> очевидна, так как если M - открыто и $x\in M$, то в качестве искомого множества A из определения 7.I достаточно взять $A=M$.

<u>Достаточность</u>. Пусть M - окрестность каждой своей точки. Тогда в силу определения 7.I $\forall x\in M\ \exists A_x\in\tau$ такое, что $x\in A_x\subset M$.

Пользуясь этим, легко доказать равенство $M=\bigcup_{x\in M} A_x$, из которого вытекает, что M открыто, как объединение открытых множеств A_x, (см. аксиому Т2). ▷

Итак, любое открытое в (X,τ) множество, за исключением $\varnothing$, является окрестностью. Одноточечное множество $\{x_0\}$ также может служить окрестностью, если только это множество открыто в рассматриваемой топологии. В этом случае точка x_0 называется <u>изолированной точкой</u> пространства (X,τ).

<u>Пример 7.1</u>. В пространстве с дискретной топологией (и только в нем) изолированными являются все точки.

7.2. <u>Свойства системы окрестностей точки в топологическом пространстве</u>. Для названной системы имеет место следующая копия предложения 2.1.

<u>Предложение 7.2</u>. Система S_{x_0} всех окрестностей точки x_0 топологического пространства (X,τ) удовлетворяет следующим свойствам:

01) $\forall\, \mathcal{U}\in S_{x_0}\ \ x_0\in\mathcal{U}$;

02) $\forall\, \mathcal{U}\in S_{x_0}$ и $\forall\, V\subset X$ $(\mathcal{U}\subset V \Rightarrow V\in S_{x_0})$;

03) пересечение конечного числа множеств из S_{x_0} принадлежит S_{x_0};

04) $\forall\, \mathcal{U}\in S_{x_0}\ \exists\, V\subset \mathcal{U}$ такое, что $V\in S_{x_0}$ и $\forall\, y\in V\ \ V\in S_y$.

◁ Свойства 01) и 02) непосредственно вытекают из определения 7.1. Для доказательства 03) достаточно использовать аксиому Т3) топологии, в соответствии с которой пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто. Наконец, для установления свойства 04) достаточно взять в качестве множества V то существующее, по определению окрестности, открытое множество, которое содержит x_0 и содержится в $\mathcal{U}$. ▷

Оказывается, что, отправляясь от этих четырех свойств, можно в произвольном множестве задать определенную топологию, а именно, справедлива

<u>Теорема 7.1</u> (о задании топологии с помощью окрестностей). Пусть X – произвольное множество и пусть каждому элементу $x\in X$ каким-либо образом сопоставлена непустая система $\widetilde{S}_x$ множеств из X так, что выполняются свойства 01)-04). Тогда на X существует единственная топология τ такая, что для каждого $x\in X$ система S_x всех окрестностей точки x в этой топологии совпадает с системой $\widetilde{S}_x$.

◁ Предложение 7.2 подсказывает, что в качестве τ следует взять $\varnothing$ и множество всех таких подмножеств M множества X,

что $\forall\, x\in M\ \ M\in\widetilde{S}_x$. Нужно доказать, что эта система τ удовлетворяет аксиомам Т1)-Т3). Сделайте это самостоятельно.

Докажем, что $S_x=\widetilde{S}_x$. Пусть $\mathcal{U}\in S_x$, т.е. $\mathcal{U}$ –(произвольная) окрестность точки x в топологии τ. Тогда по определению окрестности $\exists\, V\in\tau$ такое, что $x\in V\subset\mathcal{U}$. По построению τ $\forall\, y\in V$ $V\in\widetilde{S}_y$, в частности, $V\in\widetilde{S}_x$. Из свойства 02) вытекает, что и $\mathcal{U}\in\widetilde{S}_x$. Итак, $S_x\subset\widetilde{S}_x$.

Теперь рассмотрим произвольное множество $G\in\widetilde{S}_x$. По свойству 04) $\exists\, V\in\widetilde{S}_x$ такое, что $V\subset \mathcal{U}$ и $\forall\, y\in V$ $V\in\widetilde{S}_y$. По построению τ это множество $V\in\tau$. Таким образом, нашлось $V\in\tau$ такое, что $x\in V\subset G$. Следовательно, G является окрестностью точки x в (X,τ), т.е. $G\in S_x$. Обратное включение $\widetilde{S}_x\subset S_x$ доказано.

Единственность топологии с требуемыми свойствами непосредственно следует из того, что если системы всех окрестностей в двух топологиях совпадают в каждой точке, то в силу предложения 7.2 совпадают и системы открытых множеств, т.е. эти топологии. ▷

<u>Замечание 7.2.</u> В комментарии к части I упоминалась эквивалентность двух способов задания топологической структуры – системой окрестностей и системой открытых множеств. Предложение 7.2 и теорема 7.1 доказывают эту эквивалентность. Подход, использованный в настоящем пособии, употребляется чаще, поскольку свойства открытых множеств выделяемые в качестве аксиом более наглядны; однако, иногда топологию все же удобнее задавать системой окрестностей, как, например, в линейных топологических пространствах, в которых достаточно указать окрестности лишь для одной точки пространства.

7.3. <u>Фундаментальная система окрестностей.</u>

<u>Определение 7.3</u>. Система β_{x_0} окрестностей точки x_0 из пространства (X,τ) называется <u>фундаментальной системой окрестностей</u> этой точки, если для каждой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0 существует окрестность V из β_{x_0} такая, что $V\subset\mathcal{U}$. Фундаментальная система окрестностей точки x_0, состоящая только из открытых окрестностей, называется <u>локальной базой</u> в точке x_0.

Фундаментальная система окрестностей точки произвольного топологического пространства (и локальная база точки) существуют всегда, например, совокупность всех открытых окрестностей этой точки.

<u>Пример 7.2</u>. В произвольном метрическом пространстве совокуп-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

ность открытых шаров с центром в точке x_0 и радиусами $\frac{1}{n}$ $(n \in N)$, очевидно, образует локальную базу точки x_0.

Пример 7.3. Во всяком дискретном пространстве для каждой его точки x_0 сама эта точка уже служит локальной базой.

§8. Замыкание множества. Предельные и изолированные точки.

8.I. Определение и свойства замыкания (см. также п.3.3).

Определение 8.I. Пусть (X,τ) – топологическое пространство и $A \subset X$. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества A, если каждая окрестность $O(x)$ точки x содержит хотя бы одну точку из A, т.е. $A \cap O(x) \neq \emptyset$. Совокупность всех точек прикосновения множества A обозначается через $[A]$ (или $\overline{A}$) и называется замыканием множества A, а операция перехода от множества A к множеству $[A]$ называется операцией замыкания.

Замечание 8.I. Ясно, что в этом определении можно ограничиться окрестностями, принадлежащими некоторой (произвольной) фундаментальной системе окрестностей, например, системе всех открытых окрестностей.

Пример 8.I. В соответствии с теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами замыкание в пространстве $C[a,b]$ множества всех многочленов совпадает с $C[a,b]$.

Пример 8.2. Замыкание открытого шара в R^n есть замкнутый шар. (Докажите это).

Упражнение 8.I. Докажите, что замыкание открытого шара не всегда является замкнутым шаром.

Предложение 8.I. Операция замыкания в топологическом пространстве (X,τ) обладает следующими свойствами: $\forall A \subset X$ и $\forall B \subset X$

I) $A \subset [A]$; 2) если $A \subset B$, то $[A] \subset [B]$;
3) $[\emptyset] = \emptyset$; 4) $[X] = X$; 5) $[[A]] = [A]$;
6) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$; 7) $[A \cap B] \subset [A] \cap [B]$.

◁ Свойства I)-4) вытекают непосредственно из определения. Рассмотрим свойство 5). Из 2) имеем $[A] \subset [[A]]$. Остается доказать обратное включение. Пусть $x \in [[A]]$ и $\mathcal{U}$ – произвольная открытая окрестность точки x. Тогда x является точкой прикосновения множества $[A]$ и, следовательно, $\exists y \in \mathcal{U}$ такая, что $y \in [A]$. Последнее означает, что y – точка прикосновения множества A, и значит, в ее окрестности $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ – окрестность точки y в силу предложения 7.I) найдется точка $z \in A$. Итак, для любой (открытой) окрестности $\mathcal{U}$ точки x $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Отсюда (с учетом замечания 8.I) получаем, что x – точка прикосновения множества

A, т.е. $x \in [A]$. Включение $[[A]] \subset [A]$ доказано.

6) Из очевидных включений $A \subset A \cup B$ и $B \subset A \cup B$ в силу свойства 2) имеем $[A] \subset [A \cup B]$ и $[B] \subset [A \cup B]$, откуда $[A] \cup [B] \subset [A \cup B]$. Для доказательства обратного включения предположим противное, т.е. пусть существует точка $x \in [A \cup B]$, такая, что $x \notin [A] \cup [B]$, т.е. $x \notin [A]$ и $x \notin [B]$. Тогда найдутся окрестности $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ точки x, для которых $A \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$ и $B \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$. Множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ также является окрестностью точки x (см. свойство 03) из предложения 7.2). При этом, как легко проверить, $\mathcal{U} \cap (A \cup B) = \emptyset$. Мы приходим к противоречию с тем, что x – точка прикосновения множества $A \cup B$. Значит, $[A \cup B] \subset [A] \cup [B]$. Свойство 6) доказано. Свойство 7) докажите самостоятельно. ▷

Легко заметить, что и формулировка, и доказательство предложения 3.4 подходят не только для метрических, но и для любых топологических пространств. Разве лишь ссылку на замечание 3.I нужно заменить на более общее предложение 7.I. Итак, справедливо

Предложение 8.2. (F замкнуто в (X,τ)) $\Longleftrightarrow$ ($[F] = F$ в (X,τ)).

Из этого предложения и свойства 5) замыкания вытекает

Следствие 8.I. Замыкание $[A]$ множества A из (X,τ) является замкнутым множеством в (X,τ).

Замечание 8.2. Предложение 8.2 показывает, что замкнутые множества топологического пространства (X,τ) (а значит, и топологию τ) можно описать с помощью операции замыкания. Польский математик К.Куратовский (2.2.1896-18.6.1980) выделил те свойства операции замыкания, которые следует принять в качестве аксиом для того, чтобы удовлетворяющая им операция действительно порождала топологию. Им доказана

Теорема 8.I (о задании топологии с помощью операции замыкания). Если каждому множеству $A \subset X$ некоторым способом поставлено в соответствие множество из X так, что при этом выполняются свойства I),3),5) и 6) из предложения 8.I, то дополнения к множествам, которые не меняются при выполнении описанной операции, образуют единственную топологию на X, в которой операция замыкания совпадает с заданной операцией.

Упражнение 8.2. Докажите, что замыкание множества A есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Таким образом, замыкание A – это наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

8.2. Предельные и изолированные точки. Совершенные множест-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

ва. В этом пункте рассмотрим, из каких точек может состоять замыкание в топологическом пространстве (X,τ) множества $A\subset X$.

Определение 8.2. Точка $a\in A$ называется изолированной точкой множества A, если найдется такая окрестность точки a, в которой нет других точек из A, кроме a.

Ясно, что в топологии, индуцированной на A из (X,τ), одноточечное множество, состоящее из изолированной точки, открыто.

Точка из $[A]$, не являющаяся изолированной, очевидно, удовлетворяет следующему определению.

Определение 8.3. Точка $b\in X$ называется предельной точкой множества A, если любая окрестность точки b содержит хотя бы одну точку из A, отличную от b.

Замечание 8.3. В метрическом пространстве каждая окрестность предельной точки множества A содержит бесконечное множество точек из A. Доказать это можно, используя локальную базу из примера 7.2.

Упражнение 8.3. Найти предельные и изолированные точки множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}^1$.

Очевидно, замыкание $[A]$ произвольного множества A распадается на точки трех типов: 1) изолированные точки, 2) предельные точки, принадлежащие множеству A, и 3) предельные точки, не принадлежащие множеству A. Если точек третьего типа нет, то в силу предложения 8.2 множество A является замкнутым. Если нет и точек первого типа, то A называется совершенным множеством.

Определение 8.4. Множество $A\subset X$ называется совершенным в (X,τ), если оно замкнуто и лишено изолированных точек.

Замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ является совершенным множеством; множество $\mathbb{Z}$ замкнуто в $\mathbb{R}^1$, но не является совершенным. Важный пример топологического пространства, являющегося совершенным, построил создатель классической теории множеств немецкий математик Г.Кантор (3.3.1845–6.1.1918). Это пространство носит название канторового совершенного множества (см. [1], гл.2, §2).

Определение 8.5. Пусть A и B – подмножества топологического пространства (X,τ); A называется плотным в B, если замыкание A содержит B $(B\subset[A])$, т.е. если каждая точка из B является точкой прикосновения для A. В том случае, когда $B=X$, говорят, что A всюду плотно. Множество A называется нигде не плотным в (X,τ), если дополнение к $[A]$ всюду плотно, т.е. $[X\setminus[A]]=X$.

Пример 8.3. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}^1$, а $\mathbb{Z}$ нигде не плотно в $\mathbb{R}^1$. Канторово совершенное множество является нигде не плотным подмножеством $\mathbb{R}^1$.

Определение 8.6. Топологическое пространство называется сепарабельным, если в нем есть счетное всюду плотное подмножество.

Пример 8.4. $\mathbb{R}^1$ сепарабельно, так как множество $\mathbb{Q}$ счетно и $[\mathbb{Q}]=\mathbb{R}$.

Упражнение 8.4. Докажите, что множество A всюду плотно в (X,τ) тогда и только тогда, когда каждое непустое открытое в (X,τ) множество имеет с A непустое пересечение.

§9. Внутренность, внешность и граница множества.

Определение 9.1. Точка x_0 топологического пространства (X,τ) называется внутренней точкой множества $A\subset X$, если x_0 обладает окрестностью, целиком содержащейся в A (т.е. если A – окрестность точки x_0). Множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначается $Int\,A$.

Пример 9.1. Пусть $[a,b]$ – отрезок из $\mathbb{R}^1$, тогда $Int\,A=\,]a,b[$.

С помощью свойств окрестностей и открытых множеств, а также с помощью предложения 7.1 легко доказать

Предложение 9.1. Для произвольных подмножеств A и B топологического пространства (X,τ) справедливы утверждения: 1) $Int\,A$ – открытое множество; 2) $Int\,A$ – наибольшее открытое множество, содержащееся в A; 3) (A открыто)$\Longleftrightarrow(Int\,A=A)$; 4) $Int(Int\,A)=Int\,A$; 5) $[X\setminus A]=X\setminus Int\,A$; 6) $X\setminus[A]=Int(X\setminus A)$; 7) $(A\subset B)\Longrightarrow(Int\,A\subset Int\,B)$; 8) $Int(A\cap B)=Int\,A\cap Int\,B$; 9) $Int(A\cup B)\supset Int\,A\cup Int\,B$.

Задание 9.1. Докажите предложение 9.1.

Определение 9.2. Точка $x\in X$ называется внешней точкой множества $A\subset X$, если x есть внутренняя точка дополнения $X\setminus A$. Множество внешних точек множества A обозначается $Ext\,A$ и называется внешностью A.

Очевидно, что $x\in Ext\,A$ тогда и только тогда, когда существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки x, что $\mathcal{U}\cap A=\varnothing$.

С учетом предложения 9.1 можно сказать, что внешность A – это наибольшее открытое множество, непересекающееся с A. Из того, что $Int\,A\subset A$, имеем $Int\,A\cap Ext\,A=\varnothing$.

Упражнение 9.1. Докажите, что $[A]=X\setminus Ext\,A$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

Определение 9.3. Дополнение к внутренности и внешности множества A называется границей A и обозначается $Fr A$ (или ∂A). Таким образом, $Fr A = X \setminus (Int A \cup Ext A)$. Точки границы называются граничными точками множества A.

Ясно, что $x \in Fr A$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x есть как точки из A так и точки из $X \setminus A$.

Из определения вытекает, что граница произвольного множества является замкнутым множеством.

Предостережение 9.I. Если $A \subset B$, то не всегда $Fr A \subset Fr B$. Кроме того, $\exists A \subset X$, такое, что $Fr(Fr A) \neq Fr A$.

Пример 9.2. В R^1 $Int Q = \emptyset$, $Ext Q = \emptyset$, $Fr Q = R$, $Fr R = \emptyset$. Отсюда имеем $Fr(Fr Q) = Fr R = \emptyset \neq Fr Q$.

Упражнение 9.2. Докажите, что для любого $A \subset X$ I) $Fr A = [A] \setminus Int A$; 2) ($A$ замкнуто) $\Longleftrightarrow$ (A содержит всю свою границу), 3) (A открыто) $\Longleftrightarrow$ (A не содержит ни одной своей граничной точки).

Упражнение 9.3. Найдите внутренность, внешность и границу следующих множеств на прямой R^1: $[a,b]$, $\{a\}$, Z, $I = R \setminus Q$.

§10. Аксиомы счетности. Сходимость последовательности в топологическом пространстве

10.I. Первая и вторая аксиома счетности. В этом пункте будут определены два важных класса топологических пространств.

Определение 10.I. Топологическое пространство (X,τ) называется удовлетворяющим второй аксиоме счетности или пространством со счетной базой, если оно обладает базой, состоящей из не более чем счетного числа открытых множеств; пространство (X,τ) называется удовлетворяющим первой аксиоме счетности, если в нем для каждой его точки существует локальная база, состоящая из не более чем счетного числа окрестностей этой точки.

Пример 10.I. Пространство R^n (и, в частности, R^1) удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Счетную базу топологии в нем образуют открытые шары с рациональными радиусами и с центрами в точках с рациональными координатами. (Докажите это).

Пример 10.2. Любое метрическое пространство (в частности, пространство $C[a,b]$) удовлетворяет первой аксиоме счетности, так как в нем каждая точка имеет локальную базу, состоящую из открытых шаров с рациональными радиусами.

Упражнение 10.I. Проверьте, что пространство, удовлетворяющее

второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Рассмотрев произвольное несчетное множество, наделенное дискретной топологией, покажите, что обратное может быть и неверно.

Интересно сопоставить пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности и сепарабельные пространства.

Теорема 10.I. Пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.

$\triangleleft$ Пусть (X,τ) имеет счетную базу $\beta = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$. В каждом элементе B_n базы выберем точку $x_n \in B_n$. Счетное множество $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ как раз и является искомым всюду плотным в (X,τ) множеством, т.е. $[A] = X$. В самом деле, предположив противное, мы имели бы, что множество $X \setminus [A] \neq \emptyset$ и открыто; следовательно его можно было бы представить в виде объединения некоторых множеств $B_{n_k} \in \beta$. Тогда множество $X \setminus [A]$ должно было бы содержать точки из A, поскольку каждое множество B_{n_k} содержит точки из A. Но это невозможно ввиду очевидного равенства $(X \setminus [A]) \cap A = \emptyset$. $\triangleright$

Как показывают примеры, сепарабельные пространства не всегда имеют счетную базу. Однако для метрических пространств обратная теорема верна.

Теорема 10.2. Всякое сепарабельное метрическое пространство (X,ρ) удовлетворяет второй аксиоме счетности.

$\triangleleft$ Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – счетное всюду плотное множество в (X,ρ). Тогда в качестве счетной базы можно взять следующее множество открытых шаров $\beta = \{B(a_n, \frac{1}{m}) \mid n, m \in N\}$. Проверьте самостоятельно, что β – база. $\triangleright$

Для формулировки одного важного свойства пространств со счетной базой введем два определения.

Определение 10.2. Система $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ множеств $U_\alpha \subset X$ называется покрытием пространства (X,τ), если объединение всех U_α совпадает с X, т.е. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$. Покрытие $\mathcal{U}$ называется открытым (соответственно замкнутым), если каждое из множеств U_α открыто (соответственно замкнуто) в (X,τ).

Определение 10.3. Пусть I_0 – подмножество множества индексов I. Если $\bigcup_{\alpha \in I_0} U_\alpha = X$, то система $\mathcal{U}_0 = \{U_\alpha \mid \alpha \in I_0\}$ называется подпокрытием покрытия $\mathcal{U}$.

Очевидно, что топология τ и любая база топологии τ являются покрытиями пространства (X,τ).

Имеет место

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

Теорема 10.3. (Линделёф) Если (X,τ) удовлетворяет второй аксиоме счетности, то в произвольном его открытом покрытии содержится конечное или счетное подпокрытие.

◁ Пусть $\beta=\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетная база топологии τ, а $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ – произвольное открытое покрытие (X,τ). Для каждого $x\in X$ обозначим через $U_{\alpha(x)}$ один из элементов покрытия $\mathcal{U}$, содержащих x, и пусть $B_{n(x)}$ – такой, существующий в силу предложения 6.1, элемент базы β, что $x\in B_{n(x)}\subset U_{\alpha(x)}$. Среди отобранных таким образом множеств $B_{n(x)}$ различных множеств может быть не более чем счетное число. При этом, их объединение, очевидно, дает все X $(\bigcup_{x\in X} B_{n(x)}=X)$. Выбрав для каждого из указанных множеств $B_{n(x)}$ по одному из содержащих его множеств $U_{\alpha(x)}$, мы получаем не более чем счетное подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$. ▷

10.2. Сходимость последовательности точек в топологическом пространстве. Следующее определение естественным образом распространяет на топологические пространства понятие сходимости в метрических пространствах (см. п. 4.1, определение 4.3).

Определение 10.4. Последовательность (x_n) точек топологического пространства (X,τ) называется сходящейся к точке $x_0\in X$, если вне любой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 находится лишь конечное число элементов последовательности; при этом x_0 называют пределом этой последовательности и пишут $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$.

Пример 10.3. В пространстве (X,τ) из примера 6.3 последовательность (x_n), где $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n=a$ сходится как к точке a, так и к точке b (проверьте!).

Пример 10.4. В любом антидискретном пространстве каждая последовательность, очевидно, сходится к любой точке этого пространства.

Замечание 10.1. Итак, в отличие от метрических пространств (см. предложение 4.1) в общих топологических пространствах сходящаяся последовательность может иметь сколько угодно пределов. В следующем параграфе будет выделен очень важный и достаточно широкий класс пространств, называемых хаусдорфовыми, в которых предел у любой сходящейся последовательности единственен.

Теперь обсудим связь между понятием точки прикосновения, играющим основополагающую роль в топологии (см. теорему 8.1), и родственным с ним, но более привычным с точки зрения математического анализа понятием предела последовательности точек.

Упражнение 10.2. Докажите, что если последовательность (x_n)

точек из подмножества A произвольного топологического пространства (X,τ) сходится к точке $x_0\in X$, то x_0 – точка прикосновения множества A, т.е. $x_0\in[A]$.

Примеры показывают, что обратное утверждение в общем случае не имеет места, т.е. может существовать точка $x_0\in[A]$, которая не является пределом ни для одной последовательности точек из A. В следующей теореме указан класс пространств (и среди них все метрические пространства), в которых обсуждаемые понятия равнозначны.

Теорема 10.4. Если пространство (X,τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности, то $x_0\in[A]$ тогда и только тогда, когда x_0 является пределом некоторой последовательности (x_n) точек из A.

◁ Достаточность (как и упражнение 10.2) непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Необходимость. Пусть $x_0\in[A]$ и пусть $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая счетная локальная база в точке x_0. Легко проверить (сделайте это самостоятельно), что система $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $B_n=\bigcap_{k=1}^{n} V_k$, также является локальной базой в точке x_0, причем $\forall n\in\mathbb{N}\ B_{n+1}\subset B_n$. Согласно определению точки прикосновения при каждом $n\in\mathbb{N}$ $A\cap B_n\neq\varnothing$. Тогда взяв в качестве x_n какую-либо точку из $A\cap B_n$, мы получим последовательность (x_n) из A, сходящуюся к x_0. В самом деле, пусть V – произвольная окрестность точки x_0. По определению локальной базы для нее $\exists n_0\in\mathbb{N}$ такое, что $B_{n_0}\subset V$. Кроме того, $\forall n\geqslant n_0$ $B_n\subset B_{n_0}$. Поэтому при всех таких n будем иметь $x_n\in A\cap B_n\subset B_{n_0}\subset V$, а это и означает, что $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$. ▷

§11. Аксиомы отделимости. Метризуемость топологических пространств

11.1. Аксиомы отделимости. Ранее отмечалось, что самые общие топологические пространства обладают неестественными свойствами. Чтобы получить более "привычные" пространства топологические пространства подчиняют дополнительным условиям. В первую очередь это аксиомы счетности и отделимости. Аксиомы счетности изложены в §10. Сейчас перечислим аксиомы отделимости в порядке их постепенного усиления.

Ниже через $O(x)$ и $O(F)$ обозначаются окрестности точки $x\in X$ и множества $F\subset X$, соответственно.

Аксиома T_1 (первая аксиома отделимости). Каждая из любых двух различных точек пространства (X,τ) обладает окрестностью,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

не содержащей другую точку. Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме, называются T_1 - пространствами.

Пространства из примеров 6.3 и 6.4 не являются T_1 -пространствами.

Предложение II.I. $((X,\tau)$ - T_1 -пространство$)\Longleftrightarrow(\forall x\in X$ множество $\{x\}$ замкнуто).

◁Необходимость. Пусть $x\in X$. В силу аксиомы T_1 $\forall y\in X$, такой, что $y\neq x$ $\exists O(y)\subset X\setminus\{x\}$. Значит, множество $X\setminus\{x\}$ является окрестностью каждой своей точки и поэтому открыто. Следовательно, $\{x\}$ замкнуто.

Достаточность. Пусть x и y - две произвольные различные точки из X . Так как все одноточечные множества замкнуты в (X,τ) , то множества $X\setminus\{x\}$ и $X\setminus\{y\}$ открыты и являются искомыми окрестностями точек y и x соответственно. ▷

Аксиома T_2 (Хаусдорфа). Любые две различные точки из (X,τ) обладают такими окрестностями, пересечение которых пусто. Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме называются T_2 -пространствами или хаусдорфовыми или просто отделимыми

Ясно, что всякое T_2 -пространство является и T_1 -пространством. Обратное неверно.

Пример II.I. Всякое метрическое пространство (X,ρ) хаусдорфово. В самом деле, если $x,y\in X$ и $x\neq y$, то $\rho(x,y)>0$. Тогда открытые шары с центрами в точках x и y и радиусами $\frac{\rho(x,y)}{2}$ являются непересекающимися окрестностями точек x и y (проверьте!).

Предложение II.2. В хаусдорфовом пространстве (X,τ) всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

◁Предположим противное, т.е. пусть последовательность (x_n) точек из X сходится к двум различным пределам x_0 и y_0 . В силу аксиомы T_2 x_0 и y_0 обладают непересекающимися окрестностями $O(x_0)$ и $O(y_0)$. По определению предела вне $O(x_0)$ лежит конечное число членов последовательности (x_n) . Но тогда окрестность $O(y_0)$ содержит лишь конечное число членов этой последовательности, и значит, точка y_0 не может служить пределом (x_n). Получили противоречие. ▷

Аксиома T_3 . Для каждой точки $x\in X$ и любого замкнутого множества $F\subset X$, не содержащего x , существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(F)$.

Эта аксиома интересна только для T_1 -пространств. При одновременном выполнении аксиом T_1 и T_3 пространство (X,τ) называют регулярным.

Очевидно, что регулярные пространства хаусдорфовы. Примеры показывают, что существуют хаусдорфовы нерегулярные пространства.

Аксиома T_4 . Для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $F_1,F_2\subset X$ существуют такие окрестности $O(F_1)$ и $O(F_2)$, что $O(F_1)\cap O(F_2)=\varnothing$.

Пространство (X,τ) называется нормальным, если выполнены одновременно аксиомы T_1 и T_4 .

Нормальные пространства, очевидно, регулярны; обратное, вообще говоря, неверно. Представление о широте класса нормальных пространств дает следующее приводимое без доказательства

Предложение II.3. Всякое метрическое пространство является нормальным пространством.

II.2. Функциональная отделимость множеств.

Определение II.I. Два множества A и B в топологическом пространстве (X,τ) называются функционально отделимыми, если существует такая непрерывная функция $\varphi : X \longrightarrow [0;1]\subset R^1$, что $\forall x\in A$ $\varphi(x)=0$ и $\forall x\in B$ $\varphi(x)=1$.

Имеет место следующая

Большая лемма Урысона. Любые два непустые непересекающиеся замкнутые подмножества нормального пространства функционально отделимы.

II.3. Непрерывная продолжимость функций. Вопрос о продолжимости непрерывной функции, заданной на подмножестве, на все пространство с сохранением непрерывности является принципиально важным для многих разделов математики. Для функций, заданных на подмножествах нормального пространства, этот вопрос решается следующей знаменитой теоремой.

Теорема II.I (Титце-Урысона). Пусть A - замкнутое подмножество нормального топологического пространства (X,τ), а f - заданная на A действительная непрерывная функция. Тогда функцию f можно непрерывно продолжить на все пространство (X,τ) без изменения ее верхней и нижней граней.

II.4. Метризуемость топологических пространств. В пункте 6.2 уже отмечалось, что не всегда заданная на множестве X топология порождается какой-либо метрикой. Пример I0.2 и предложение II.3 показывает, что для метризуемости топологическое простран-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ И

ство должно быть нормальным пространством и удовлетворять первой аксиоме счетности. Эти два свойства представляют собой необходимые (но не достаточные) условия метризуемости топологического пространства. Следующая классическая теорема Урысона дает полное решение проблемы метризуемости для важного класса топологических пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности.

Теорема II.2 (П.С.Урысон). Для того, чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным.

§12. Непрерывные отображения топологических пространств

12.1. Понятие непрерывного отображения имеет в топологии такое же фундаментальное значение, какое имеет, например, понятие гомоморфизма групп, колец и других алгебраических структур в алгебре. Продолжая начатое в §5 изучение непрерывности и естественным образом обобщая введенные там определения, дадим здесь общее определение непрерывного отображения.

Пусть (X,τ) и (Y,τ_1) – два не обязательно различных топологических пространства и $f: X \to Y$ – произвольное отображение.

Определение 12.1. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $O(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ найдется окрестность $O(x_0)$ точки x_0, такая, что $f(O(x_0)) \subset O(y_0)$.

Замечание 12.1. Условие, сформулированное в определении 12.1, равносильно тому, что прообраз каждой окрестности точки $f(x_0)$ является окрестностью точки x_0. Это немедленно вытекает из свойства О2) окрестностей и из того, что $(f(U) \subset V) \Longleftrightarrow (U \subset f^{-1}(V))$.

Упражнение 12.1. Докажите, что в определении 12.1 можно ограничиться окрестностями, принадлежащими некоторым фундаментальным системам окрестностей точек x_0 и $f(x_0)$, соответственно; например, системам всех открытых окрестностей.

Упражнение 12.2. Пусть (X_1,τ_1), (X_2,τ_2), (X_3,τ_3) – топологические пространства, отображение $f: X_1 \to X_2$ непрерывно в точке $x \in X_1$, а отображение $g: X_2 \to X_3$ непрерывно в точке $f(x) \in X_2$. Докажите, что композиция $h = g \circ f: X_1 \to X_3$ отображений f и g непрерывна в точке x.

Как обычно, отображение f называется непрерывным на X или просто непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке из X.

Простейшими примерами непрерывных отображений служат постоянное отображение, т.е. отображение $f: X \to Y$, для которого име-

ется точка $y_0 \in Y$, такая, что $\forall x \in X \ f(x) = y_0$, и тождественное отображение $1_X: X \to X$ $(\forall x \in X \ 1_X(x) = x)$.

Пример 12.1. Отображение $\sin: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, ставящее каждой точке $x \in \mathbb{R}^1$ значение $\sin x$, является непрерывным.

В курсе математического анализа изучается большое количество непрерывных функций, отображающих $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$ (и более общих, отображающих $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$). Ясно, что все такие функции являются также непрерывными отображениями соответствующих топологических пространств (см. §5).

Укажем два важных свойства непрерывных отображений, каждое из которых равносильно непрерывности.

Теорема 12.1. (Критерий непрерывности). Пусть f – отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,τ_1). Следующие условия равносильны 1) f непрерывно; 2) прообраз любого открытого в (Y,τ_1) множества является открытым множеством в (X,τ); 3) прообраз любого замкнутого в (Y,τ_1) множества замкнут в (X,τ).

◁ Шаг 1. Докажем равносильность условий 2) и 3). Для этого воспользуемся следующим простым тождеством, известным из теории множеств:

$$\forall A \subset Y \quad f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A). \qquad (12.1)$$

Справедливость равенства (12.1) вытекает из эквивалентности следующих высказываний: $(x \in f^{-1}(Y \setminus A)) \Longleftrightarrow (f(x) \in Y \setminus A) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (f(x) \in Y \text{ и } f(x) \notin A) \Longleftrightarrow (x \in f^{-1}(Y) \text{ и } x \notin f^{-1}(A)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A)) \Longleftrightarrow (x \in X \setminus f^{-1}(A)).$$

Пусть условие 2) выполняется и пусть $F \subset Y$ – произвольное замкнутое множество. Тогда $Y \setminus F \in \tau_1$. В силу условия 2 и формулы (12.1) $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F) \in \tau$. Значит, $f^{-1}(F)$ замкнуто в (X,τ). Свойство 3) доказано. Импликация 3) ⟹ 2) доказывается аналогично.

Шаг 2. (1) ⟺ 2)). Пусть f непрерывно и пусть $V \subset Y$ – произвольное открытое в (Y,τ_1) множество. Докажем, что множество $U = f^{-1}(V)$ открыто в (X,τ). Если $U = \varnothing$, то это очевидно. Пусть $U \neq \varnothing$. Так как для произвольной точки $x \in f^{-1}(V)$ $f(x) \in V$, а $V \in \tau_1$, то множество V является окрестностью точки $f(x)$. В силу непрерывности отображения f найдется такая

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

окрестность $O(x)$ точки x, что $f(O(x)) \subset V$. Следовательно, $O(x) \subset f^{-1}(V)$. Тогда $f^{-1}(V)$ также является окрестностью точки x. Поскольку x – произвольная точка из $\mathcal{U}$, то в силу предложения 7.I $\mathcal{U} \in \tau$. Свойство 2) доказано.

Обратно, пусть свойство 2) имеет место. Докажем непрерывность отображения f в произвольной точке $x_0 \in X$. Пусть $O(f(x_0))$ – произвольная окрестность точки $f(x_0)$. По определению окрестности $\exists V \in \tau_1$ такое, что $f(x_0) \in V \subset O(f(x_0))$. Очевидно, множество $\mathcal{U} = f^{-1}(V)$ содержит точку x_0 и по условию 2) открыто. Поэтому $\mathcal{U}$ – окрестность точки x_0, причем $f(\mathcal{U}) = V \subset O(f(x_0))$. Таким образом, отображение f непрерывно в произвольной точке x_0, т.е. является непрерывным отображением. $\triangleright$

Замечание I2.2. Ясно, что в теореме I2.I условие 2) можно заменить следующим: прообраз любого множества, принадлежащего некоторой базе топологии τ_1, открыт в (X,τ).

Предостережение I2.I. Образ открытого (соответственно замкнутого) множества при непрерывном отображении может не быть открытым (соответственно замкнутым) множеством. Вот пример. Отображение $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, определяемое формулой $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, очевидно, непрерывно. При этом множество $\mathbb{R}$ и открыто и замкнуто в $\mathbb{R}^1$, но его образ $f(\mathbb{R}) =]0;1]$ не является ни открытым, ни замкнутым в $\mathbb{R}^1$.

Определение I2.2. Отображение $f: X \to Y$ называется открытым (замкнутым), если образ каждого открытого (соответственно замкнутого) множества в (X,τ) открыт (соответственно замкнут) в (Y,τ_1).

Упражнение I2.3. Пусть (X,τ) и (Y,τ_1) – топологические пространства, причем $X = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 – замкнутые в (X,τ) множества. Докажите, что отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда ограничения отображения f на F_1 и F_2 непрерывны. (Напомним, что ограничением f на множество $A \subset X$ называется отображение $f_A: A \to Y$, такое, что $\forall x \in A$ $f_A(x) = f(x)$. Заметим также, что на F_1 и F_2 предполагается заданной топология, индуцированная топологией τ).

Предложение I2.I. Пусть f – отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,τ_1), непрерывное в точке x_0. Если x_0 – точка прикосновения множества $A \subset X$, то $f(x_0)$ – точка прикосновения множества $f(A) \subset Y$.

$\triangleleft$ Пусть V – произвольная окрестность точки $f(x_0)$ в (Y,τ_1). Требуется доказать, что $f(A) \cap V \neq \varnothing$. В силу непрерывности f в точке x_0 найдется такая окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0, что $f(\mathcal{U}) \subset V$. Так как x_0 – точка прикосновения A, то $A \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$; следовательно, $f(A) \cap V \neq \varnothing$. $\triangleright$

Имеет место следующее более общее утверждение, которое является еще одним критерием непрерывности отображения f и которое предлагается доказать самостоятельно.

Предложение I2.2. (f непрерывно) $\Leftrightarrow$ $(\forall A \subset X \ f([A]) \subset [f(A)])$.

I2.2. Связь непрерывности со сходимостью последовательностей.

Теорема I2.2. Для того, чтобы отображение f топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,τ_1) было непрерывным в точке x_0, необходимо, а если (X,τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности, то и достаточно, чтобы для любой сходящейся к x_0 последовательности точек x_n их образы $f(x_n)$ сходились к $f(x_0)$.

$\triangleleft$ Необходимость. Пусть отображение f непрерывно в точке x_0, а (x_n) – произвольная последовательность точек, сходящаяся к x_0. Покажем, что $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$. В самом деле, в силу непрерывности f для любой окрестности V точки $f(x_0)$ найдется окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0 такая, что $f(\mathcal{U}) \subset V$. Так как по определению предела последовательности вне окрестности $\mathcal{U}$ лежит лишь конечное число элементов последовательности (x_n), то из последнего включения вытекает, что вне окрестности V также лежит лишь конечное число элементов последовательности $(f(x_n))$. Поскольку V – произвольная окрестность точки $f(x_0)$, требуемое утверждение доказано.

Достаточность. Пусть (X,τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности и пусть сходимость произвольной последовательности (x_n) к x_0 влечет сходимость $(f(x_n))$ к $f(x_0)$. Докажем непрерывность f в точке x_0. Для этого рассмотрим счетную базу $\{\mathcal{U}_n\}$ системы окрестностей точки x_0, такую, что $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \ldots$ (см. доказательство теоремы I0.4). Предположим противное, т.е. пусть f не является непрерывным отображением в точке x_0. Тогда существует такая окрестность V точки $f(x_0)$, для которой в каждой окрестности $\mathcal{U}_n$ найдется точка x_n такая, что $f(x_n) \notin V$. Полученная последовательность (x_n) сходится к x_0. Это легко доказать, если воспользоваться определениями локальной базы, предела последовательности и тем очевидным фактом, что $\forall m \geq n$ $x_m \in \mathcal{U}_n$. Но при этом $(f(x_n))$ не сходится к $f(x_0)$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ И

поскольку $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) \notin V$. Получили противоречие.

<u>Следствие I2.I</u>. В метрических пространствах определения непрерывности отображения по Коши (т.е. на языке окрестностей) и по Гейне (т.е. на языке последовательностей) равносильны (см. пример I0.2).

I2.3. <u>Гомеоморфизм. Предмет топологии</u>.

<u>Определение I2.3</u>. Пусть (X,τ) и (Y,τ_1) – два топологических пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется <u>гомеоморфным</u> отображением или <u>гомеоморфизмом</u>, если I) f – биекция; 2) f непрерывно; 3) обратное к f отображение $f^{-1}: Y \to X$ непрерывно.

<u>Определение I2.4</u>. Пространство (X,τ) называется <u>гомеоморфным</u> пространству (Y,τ_1), если существует хотя бы одно гомеоморфное отображение $f: X \to Y$.

<u>Пример I2.2</u>. Функция $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$ является гомеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^1$ на интервал $]-1;1[\subset \mathbb{R}^1$.

Гомеоморфными являются $\mathbb{R}^n$ и открытый шар в $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ при $n \neq m$ негомеоморфны. Единичная сфера из $\mathbb{R}^3$ и двумерный тор (поверхность бублика) негомеоморфны.

Заметим, что условие 3) в определении I2.3 не вытекает из условий I) и 2). В самом деле, пусть на некотором множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2, причем τ_1 (строго) сильнее τ_2 (см. п. 6.3). Тогда, очевидно, отображение $1_X: (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$, $x \to x$, непрерывно, а обратное к нему отображение $1_X: (X,\tau_2) \to (X,\tau_1)$ не является непрерывным (для проверки этого можно использовать теорему I2.I).

Из условия 3) определения I2.3 и теоремы I2.I вытекает, что гомеоморфизм f является открытым отображением, т.е. образ каждого открытого множества из (X,τ) открыт в (Y,τ_1). Отсюда и из условий I) и 2) определения I2.3 заключаем, что гомеоморфизм пространства (X,τ) на (Y,τ_1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие как между точками этих пространств, так и между открытыми множествами этих пространств. Следовательно, гомеоморфизм отождествляет эти пространства во всех вопросах, которые связаны только с топологическими структурами.

Ясно, что тождественное отображение пространства (X,τ) на себя, отображение обратное к гомеоморфизму и композиция гомеоморфных отображений являются гомеоморфизмами. Следовательно, отношение гомеоморфности является отношением эквивалентности на

множестве всех топологических пространств и поэтому разбивает это множество на попарно непересекающиеся классы, называемые <u>топологическими типами</u>. Свойство, присущее всем пространствам одного типа, называется <u>топологическим инвариантом</u>.

Топологический инвариант может выражаться числом, как, например, введенная для некоторых топологических пространств П.С.Урысоном топологическая размерность пространства. Свойство удовлетворять первой (или второй) аксиоме счетности, сепарабельность, метризуемость, а также связность (см. §I4), компактность (§I5) – топологические инварианты, не выражающиеся числами.

Пользуясь введенными понятиями, можно достаточно полно охарактеризовать топологию как науку, изучающую топологические инварианты пространств и их непрерывных отображений. Уместно отметить, что сказанное не только характеризует топологию, но и указывает на одну из побудительных причин ее возникновения. К топологическим пространствам в их нынешнем виде привела не только потребность охватить возникающие в исследованиях объекты более общие, чем метрические пространства, но и попытки аксиоматизировать такие структуры, которые были бы инвариантны относительно гомеоморфизмов. Заметим, что метрика последнему требованию не удовлетворяет, поскольку при гомеоморфном отображении одного метрического пространства на другое метрическое пространство расстояние между точками может и не сохраняться. Не удивительно поэтому, что определяемая при помощи метрики полнота метрического пространства не является топологическим инвариантом. Так, $\mathbb{R}^1$ и интервал $]-1;1[$ (с естественной метрикой) гомеоморфны (см. пример I2.2), но $\mathbb{R}^1$ – полное пространство, а $]-1;1[$ – нет.

§I3. Способы построения топологических пространств

В этом параграфе излагаются некоторые приемы, позволяющие конструировать новые топологические пространства, исходя из заданных пространств.

I3.I. <u>Подпространства топологического пространства</u>. Как уже отмечалось в пункте 6.4, топологические пространства естественным образом индуцируют на каждом своем подмножестве некоторую топологию, тем самым превращая его в самостоятельное топологическое пространство. Таким образом становятся топологическими пространствами, например, всевозможные поверхности в $\mathbb{R}^3$ (цилиндр, сфера, тор и др.).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

13.2. Прямое произведение топологических пространств. Пусть (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2) – два не обязательно различных топологических пространства. Введем топологию на декартовом произведении $Z = X_1\times X_2$. Пусть β – совокупность множеств $W\subset Z$, таких, что $W=\mathcal{U}\times V$, где $\mathcal{U}$ – открытое подмножество пространства (X_1,τ_1), а V – открытое подмножество (X_2,τ_2). Ясно, что само Z принадлежит β, поскольку $X_1\in\tau_1$ и $X_2\in\tau_2$. Далее, из легко проверяемого соотношения

$$(\mathcal{U}\times V)\cap(R\times S) = (\mathcal{U}\cap R)\times(V\cap S)$$

непосредственно вытекает, что пересечение двух элементов из β есть опять элемент из β. Отсюда заключаем, что система β удовлетворяет условиям Б1 и Б2 теоремы 6.2 и, следовательно, является базой некоторой топологии на множестве Z. Эта топология называется произведением топологий τ_1 и τ_2 и обозначается $\tau_1\times\tau_2$. Топологическое пространство $(X_1\times X_2,\ \tau_1\times\tau_2)$ называется прямым или топологическим произведением пространств (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2).

Согласно определению базы (см. п.6.5) открытыми множествами в прямом произведении $(X_1\times X_2,\tau_1\times\tau_2)$ являются, во-первых, все множества вида $\mathcal{U}\times V$, где $\mathcal{U}\in\tau_1$, $V\in\tau_2$, а также всевозможные объединения таких множеств (см. также предложение 6.1). Несложно доказать, что топология $\tau_1\times\tau_2$ является слабейшей среди всех топологий на множестве $X_1\times X_2$, в которых открыто декартово произведение произвольного открытого множества из (X_1,τ_1) и произвольного открытого множества из (X_2,τ_2).

Упражнение 13.1. Аналогично случаю двух пространств определите произведение любого конечного числа топологических пространств.

Замечание 13.1. В 1929 году советский математик А.Н.Тихонов (род. 30.10.1906) предложил и глубоко исследовал одну важную и плодотворную конструкцию, позволяющую задать топологию в декартовом произведении любого семейства топологических пространств. Эта топология давно уже стала классической и носит название тихоновской топологии. (см.[2], стр.120).

Пример 13.1. Произведение двух дискретных топологий есть дискретная топология.

Пример 13.2. Пространство R^n представляет собой прямое произведение n экземпляров числовой прямой R^1, т.е.

$$R^n = R^1\times R^1\times\ldots\times R^1 \qquad (n \text{ сомножителей}).$$

Пример 13.3. Двумерный тор, рассматриваемый как пространство с индуцированной из R^3 топологией, гомеоморфен прямому произведению двух окружностей.

Приведем некоторые свойства прямого произведения.

Рассмотрим отображения $p_1: X_1\times X_2\to X_1$ и $p_2: X_1\times X_2\to X_2$, определенные на прямом произведении пространств (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2) формулами $p_1(x_1,x_2)=x_1\in X_1$, $p_2(x_1,x_2)=x_2\in X_2$. p_1 и p_2 называются отображениями проектирования.

Предложение 13.1. Отображения p_1 и p_2 непрерывны.

◁ В самом деле, $\forall\,\mathcal{U}\in\tau_1$ $p_1^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\times X_2\in\tau_1\times\tau_2$, откуда в силу критерия непрерывности и следует непрерывность отображения p_1. Непрерывность p_2 доказывается так же. ▷

Далее, пусть (Y,τ) – произвольное топологическое пространство. Тогда любое отображение $f: Y\to X_1\times X_2$ порождает отображения $f_1 = p_1\circ f: Y\to X_1$ и $f_2 = p_2\circ f: Y\to X_2$, которые принято называть компонентами отображения f.

Предложение 13.2. Для непрерывности отображения $f: Y\to X_1\times X_2$ необходима и достаточна непрерывность каждой из его компонент.

◁ Необходимость очевидна, поскольку компоненты представляют собой композиции непрерывных отображений.

Достаточность: Пусть отображения f_1 и f_2 непрерывны. Докажем непрерывность f. Для этого, согласно критерию непрерывности и замечанию 12.2, достаточно доказать, что прообраз при отображении f любого открытого множества из некоторой базы топологии $\tau_1\times\tau_2$ открыт в (Y,τ). Пусть $\mathcal{U}\in\tau_1$ и $V\in\tau_2$. С помощью соотношения

$$\mathcal{U}\times V = (\mathcal{U}\times X_2)\cap(X_1\times V) = p_1^{-1}(\mathcal{U})\cap p_2^{-1}(V) \qquad (13.1)$$

получаем

$$f^{-1}(\mathcal{U}\times V) = f^{-1}(p_1^{-1}(\mathcal{U})\cap p_2^{-1}(V)) =$$

$$= f^{-1}(p_1^{-1}(\mathcal{U}))\cap f^{-1}(p_2^{-1}(V)) = f_1^{-1}(\mathcal{U})\cap f_2^{-1}(V)\in\tau,$$

что и требовалось доказать. ▷

Упражнение 13.1. Докажите, что а) произведение двух хаусдорфовых пространств хаусдорфово, б) произведение двух пространств со счетной базой обладает счетной базой.

13.3. Инициальная и финальная топология. Пусть $f: X\to Y$ – не-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ И...

которое фиксированное отображение произвольного множества X в топологическое пространство (Y, τ_1). На множестве X всегда можно ввести топологию так, что отображение f будет непрерывным. Например, если задать на X дискретную топологию. Однако более интересной является топология, состоящая из прообразов открытых подмножеств пространства (Y, τ_1) при отображении f, т.е. топология $\tau = f^{-1}(\tau_1) = \{f^{-1}(V) \mid V \in \tau_1\}$. То, что $f^{-1}(\tau_1)$ удовлетворяет аксиомам TI–T3 топологии, легко доказать с помощью известных соотношений, связывающих операцию перехода к прообразам с операциями объединения и пересечения:

$$f^{-1}\Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha); \quad f^{-1}\Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha f^{-1}(V_\alpha). \tag{13.2}$$

Топология $\tau = f^{-1}(\tau_1)$ называется <u>прообразом топологии</u> τ_1, относительно отображения f. Из способа построения τ следует, что f, как отображение из (X, τ) в (Y, τ_1), удовлетворяет критерию непрерывности и, значит, непрерывно.

<u>Упражнение 13.2</u>. Докажите, что $f^{-1}(\tau_1)$ – слабейшая из всех топологий на X, при которых отображение $f: X \to Y$ непрерывно.

<u>Замечание 13.2</u>. Описанный подход является частным случаем следующей более общей схемы. Пусть X – произвольное множество, $\{(Y_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ – семейство топологических пространств и пусть для каждого $i \in I$ задано отображение $f_i: X \to Y_i$. Рассмотрим совокупность прообразов открытых множеств при отображениях f_i, т.е. семейство $\sigma = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\tau_i)$. В общем случае σ не является топологией на X, но всевозможные пересечения конечного числа множеств из семейства σ образуют базу некоторой топологии, которую называют <u>инициальной топологией</u>, порожденной семейством отображений $\{f_i\}$. Нетрудно доказать, что инициальная топология является слабейшей из всех таких топологий на X, при которых все отображения f_i непрерывны. В качестве примера инициальной топологии отметим, что топология прямого произведения, введенная на декартовом произведении $X_1 \times X_2$ (см. п.13.2), совпадает с инициальной топологией относительно отображений проектирования p_1 и p_2. Это легко доказать с помощью соотношения (13.1). Кстати сказать, и тихоновская топология (см. замечание 13.1) является инициальной относительно семейства всех отображений проектирования, что позволяет дать достаточно простое ее описание.

Теперь перейдем к обратной задаче. Пусть $f: X \to Y$ – фиксированное отображение пространства (X, τ) в произвольное множество

Y. Рассмотрим семейство множеств из Y, прообразы которых при отображении f, являются открытыми множествами в (X, τ), т.е. семейство $\tau_f = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \tau\}$. Из соотношений (13.2) и из того, что $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ и $f^{-1}(Y) = X$, вытекает, что τ_f – топология на Y. По построению τ_f отображение f непрерывно. Ясно, что τ_f – сильнейшая из всех топологий на Y, при которых f непрерывно. τ_f называется <u>финальной</u> топологией, порожденной отображением f и топологией τ, или топологией, индуцированной отображением f. Примером финальной топологии может служить фактор-топология (см. п.13.4).

Без каких-либо изменений на множестве Y вводится топология, индуцированная семейством отображений $f_i: X_i \to Y, i \in I$.

13.4. <u>Фактор-топология и фактор-пространство</u>. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, R – некоторое отношение эквивалентности во множестве X, т.е. бинарное отношение на X, удовлетворяющее условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности (подробнее см. в книге [3], гл.I). Как известно (см.[3]), R разбивает множество X на попарно непересекающиеся классы, совокупность которых называется <u>фактор-множеством</u> множества X по отношению эквивалентности R и обозначается X/R. Топологию в фактор-множестве X/R введем при помощи естественной проекции $p: X \to X/R$, которая каждому элементу $a \in X$ ставит в соответствие содержащий его класс эквивалентности $X_a \in X/R$. (Напомним, что X_a состоит из тех $x \in X$, которые находятся в отношении R с элементом a).

<u>Определение 13.I</u>. Финальная топология на X/R, порожденная отображением p (см. п.13.3), называется <u>фактор-топологией</u> топологии τ по отношению эквивалентности R и обозначается τ_R. Таким образом, $(U \in \tau_R) \Leftrightarrow (p^{-1}(U) \in \tau)$. Пространство $(X/R, \tau_R)$ называется <u>фактор-пространством</u> пространства (X, τ) по отношению R.

Говорят, что пространство $(X/R, \tau_R)$ получено из пространства (X, τ) путем топологического отождествления R – эквивалентных точек. При этом отображение p называют отображением топологического отождествления. Очевидно, что отображение $p: X \to X/R$, по самому определению фактор-топологии, есть непрерывное отображение.

Нетрудно убедиться, что из непрерывности композиции двух отображений, одно из которых тоже непрерывно, не всегда следует

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

непрерывность другого отображения, тем не менее имеет место следующее простое

Предложение 13.3. Отображение h фактор-пространства $(X/_R, \tau_R)$ в произвольное топологическое пространство (Y, τ_1) непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $f = h \circ p$ является непрерывным отображением (X, τ) в (Y, τ_1).

◁Если h непрерывно, то f непрерывно как композиция непрерывных отображений. Обратно, пусть f непрерывно и V – открытое множество в (Y, τ_1) (т.е. $V \in \tau_1$). Тогда по критерию непрерывности множество $f^{-1}(V) = (h \circ p)^{-1}(V) = p^{-1}(h^{-1}(V))$ открыто в (X, τ), а значит, по определению фактор-топологии $h^{-1}(V) \in \tau_R$, что и доказывает непрерывность h .▷

13.5. Примеры фактор-пространств. Пусть $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ – квадрат в плоскости $\mathbb{R}^2$ с индуцированной из $\mathbb{R}^2$ топологией (см. рис. 13.1). Будем задавать на X отношения эквивалентности, явно указывая какие различные точки отождествляются и полагая при этом, что неупомянутая точка сама образует класс (одноточечный).

Пример 13.4. Введем в X отношение эквивалентности R_1 , считая эквивалентными точки $(x, 1)$ и $(x, -1)$, а также точки $(1, y)$ и $(-1, y)$. Тогда пространство $(X/_{R_1}, \tau_{R_1})$ гомеоморфно двумерному тору (см. рис. 13.2). Наглядно можно себе представить, что квадрат X сначала склеивается по "горизонтальным" сторонам, а затем у получившегося цилиндра склеиваются ограничивающие его окружности.

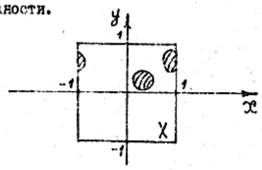

Рис. 13.1

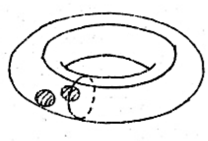

Рис. 13.2

Отождествляя стороны квадрата X по другим законам, можно получить еще несколько важных примеров фактор-пространств.

Пример 13.5. Введем в X отношение эквивалентности R_2 : $(1, y) \underset{R_2}{\sim} (-1, -y)$.(у вертикальных сторон отождествляются точки, симметричные относительно центра). Фактор-пространство

$(X/_{R_2}, \tau_{R_2})$ гомеоморфно ленте Мёбиуса (рис. 13.3).

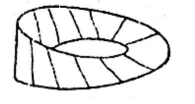

Рис. 13.3

Пример 13.6. Отождествляя точки сторон квадрата, симметричные относительно центра, получим фактор-пространство, называемое действительной проективной плоскостью.

Пример 13.7. Введем в X отношение эквивалентности R_3 : $(x, 1) \underset{R_3}{\sim} (x, -1)$ и $(1, y) \underset{R_3}{\sim} (-1, -y)$. Пространство $(X/_{R_3}, \tau_{R_3})$ называется "бутылкой Клейна".

К сожалению, представить себе проективную плоскость и бутылку Клейна непросто, поскольку в отличие от двумерного тора и ленты Мебиуса у них нет фигур в $\mathbb{R}^3$, которым они были бы гомеоморфны.

13.6. Склеивание двух пространств по непрерывному отображению. Опишем один важный частный случай топологического отождествления. Сначала дадим следующее

Определение 13.2. Пусть (X, τ) , (Y, τ_1) – непересекающиеся топологические пространства. На объединении $X \cup Y$ зададим топологию условием: (множество $\mathcal{U}$ из $X \cup Y$ открыто)$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$($\exists V \subset X$ и $\exists V_1 \subset Y$ такие, что $V \in \tau, V_1 \in \tau_1$ и $\mathcal{U} = V \cup V_1$). Полученное пространство называется топологической суммой пространств (X, τ) и (Y, τ_1), а его топология – суммой топологий τ и τ_1 .

Итак, пусть (X, τ) и (Y, τ_1) – непересекающиеся пространства, $A \subset X, B \subset Y$ – некоторые подпространства пространств (X, τ) и (Y, τ_1) , соответственно, и пусть $f: A \to B$ – непрерывное отображение A на B . В топологической сумме пространств (X, τ) и (Y, τ_1) рассмотрим отношение эквивалентности R_f , при котором классами эквивалентности будут: 1) множества, состоящие из точки $b \in B$ и ее полного прообраза $f^{-1}(b) \subset X$; 2) одноточечные множества $x \notin A \cup B$.

Определение 13.3. Фактор-пространство $(X \cup Y)_{R_f}$ обозначают $X \cup_f Y$ и говорят, что оно получено приклеиванием мно-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

жества A к множеству B по отображению f. Если $A=\{x_0\}$, $B=\{y_0\}$ и $f: x_0 \to y_0$, то $X \cup_f Y$ называют <u>букетом</u> пространств (X,τ) и (Y,τ_1) и обозначают $X \vee Y$.

<u>Пример I3.8.</u> Пусть X и Y – два различных экземпляра единичного замкнутого круга, $A=Fr\,X$ и $B=Fr\,Y$ – единичные окружности, а $f: A \to B$ – тождественное отображение. Тогда пространство $X \cup_f Y$ гомеоморфно двумерной сфере.

§I4. Связность, линейная связность, локальная связность

I4.I. <u>Связность</u>. Понятие связного пространства есть математическое обобщение свойства фигуры состоять из одной части, одного куска.

Как известно, в топологическом пространстве (X,τ) $\emptyset$ и X являются открытыми и замкнутыми множествами одновременно. Если в (X,τ) содержится отличное от $\emptyset$ и X множество A, которое одновременно открыто и замкнуто, то говорят, что (X,τ) – несвязное пространство. В этом случае X разлагается в объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств A и $X \setminus A$ ($X \setminus A$ открыто как дополнение к замкнутому множеству A). Верно и обратное: если $X=\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, причем $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \tau$, $\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{U}_2 \neq \emptyset$ и $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$, то множество $\mathcal{U}_1$ не только открыто, но и замкнуто (как дополнение к открытому множеству $\mathcal{U}_2$). Вообще, два взаимно дополнительных открытых (замкнутых) множества одновременно замкнуты (соответственно открыты).

<u>Определение I4.I.</u> Топологическое пространство (X,τ) называется <u>связным</u>, если оно не может быть представлено в виде объединения двух своих непустых непересекающихся открытых подмножеств.

Очевидно, антидискретное пространство связно, дискретное пространство, содержащее более одной точки, несвязно.

<u>Определение I4.2.</u> Подмножество A пространства (X,τ) называется <u>связным множеством</u>, если оно, рассматриваемое как подпространство, является связным пространством.

Пустое множество $\emptyset$ связно, одноточечное множество $\{x\}$ в любом топологическом пространстве связно. Конечное множество, содержащее более одной точки, в хаусдорфовом топологическом пространстве несвязно. В R^n дополнение к сфере несвязно. Важный пример связного множества дает следующее

<u>Предложение I4.I.</u> Отрезок $[a,b]$ – связное множество в R^1.

◁Предположим противное, т.е. предположим, что $[a,b]=A \cup B$, где $A \cap B=\emptyset$, причем A и B непусты, открыты (и одновремен-

но замкнуты) в топологии, индуцированной на $[a,b]$ из R^1. Для определенности, пусть $a \in A$. Обозначим через M совокупность точек $x \in [a,b]$ таких, что $[a,x[\, \subset A$. $M \neq \emptyset$, поскольку A открыто в $[a,b]$ и, значит, $\exists \varepsilon>0$ такое, что $[a,a+\varepsilon[\, \subset A$. Пусть c – точная верхняя грань множества M. Очевидно, $a<c \leq b$. Покажем, что $c \in M$. В самом деле, $\forall x \in [a,c[$ по определению точной верхней грани найдется точка x_1, такая, что $x<x_1<c$ и $[a,x_1[\, \subset A$. Значит, $x \in A$ и, следовательно, $[a,c[\, \subset A$. Отсюда в силу замкнутости A имеем, что отрезок $[a,c] \subset A$ (см. предложение 8.I, свойство 2). Таким образом, доказано, что $c \in A$. Теперь уже легко доказать, что $c=b$. Действительно, если $c<b$, то в силу открытости A $\exists \varepsilon>0$ такое, что $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\, \subset A$ и, значит, $[a,c+\varepsilon[\, \subset A$, что противоречит выбору c. Поэтому $c=b$ и $[a,b] \subset A$. Следовательно, множество B пусто. Получили противоречие, которое и доказывает связность отрезка $[a,b]$.▷

<u>Упражнение I4.I.</u> Докажите, что связное множество в R^1 вместе с каждыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок.

<u>Замечание I4.I.</u> Пусть (Y,τ_Y) – подпространство пространства (X,τ) и $A \subset Y$. Из упражнения 6.4 вытекает, что A – связное подмножество пространства (Y,τ_Y) тогда и только тогда, когда A – связное подмножество пространства (X,τ).

I4.2. <u>Свойства связных пространств</u>

<u>Теорема I4.I.</u> Пусть $f: X \to Y$ – непрерывное отображение пространства (X,τ) в (Y,τ_1). Если (X,τ) связно, то $f(X)$ связно в (Y,τ_1). Другими словами, образ связного пространства при непрерывном отображении – связное множество.

◁Предположим противное, т.е. пусть $f(X)=A_1 \cup A_2$, где A_1 и A_2 непусты, открыты (в индуцированной топологии на $f(X)$) и $A_1 \cap A_2=\emptyset$. Отсюда с помощью соотношений (I3.2) вытекает, что $X=f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$, причем множества $f^{-1}(A_1)$ и $f^{-1}(A_2)$ непусты и непересекаются. Докажем, что $\forall i \in \{1,2\}$ $f^{-1}(A_i) \in \tau$. По определению индуцированной топологии $\forall i \in \{1,2\}$ $\exists V_i \in \tau_1$ такие, что $A_i = f(X) \cap V_i$. Согласно критерию непрерывности множество $f^{-1}(V_i)$ открыто в (X,τ). Остается заметить, что $f^{-1}(A_i)=f^{-1}(f(X) \cap V_i)=X \cap f^{-1}(V_i)=f^{-1}(V_i)$ $(i=1,2)$. Таким образом, X представимо в виде объединения двух непустых

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

непересекающихся открытых множеств $f^{-1}(A_1)$ и $f^{-1}(A_2)$ и, следовательно, (X,τ) несвязно. Полученное противоречие доказывает связность $f(X)$. ▷

<u>Следствие I4.I.</u> В силу непрерывности естественной проекции фактор-пространство связного пространства связно.

<u>Следствие I4.2.</u> Из теоремы I4.I вытекает, что связность является топологическим инвариантом (см. п.I2.3).

<u>Пример I4.I.</u> Окружность $S^1 = S(x_0, r_0)$ связна как образ связного отрезка $[0;1]$ при непрерывном отображении $f:[0;1]\to\mathbb{R}^2$, таком, что $\forall t\in[0;1]\ f(t)=(x_1^0+r_0\cos 2\pi t,\ x_2^0+r_0\sin 2\pi t)\in\mathbb{R}^2$. Здесь $(x_1^0,x_2^0)=x_0$ – центр окружности. Непрерывность отображения f вытекает из очевидной непрерывности его компонент (см. предложение I3.2).

<u>Упражнение I4.2.</u> Пользуясь теоремой I4.I, докажите следующий <u>критерий связности:</u> для того, чтобы топологическое пространство (X,τ) было связным, необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное отображение пространства (X,τ) на множество, состоящее из двух точек и снабженное дискретной топологией.

Доказательству очередного свойства предпошлем следующее

<u>Замечание I4.2.</u> Ясно, что если в пространстве (X,τ) существуют непустые непересекающиеся открытые множества $\mathcal{U}$ и V, такие, что $X=\mathcal{U}\cup V$, то всякое связное подмножество A пространства (X,τ) либо целиком содержится в $\mathcal{U}$, либо целиком содержится в V. В противном случае очевидное равенство $A=(A\cap\mathcal{U})\cup(A\cap V)$ противоречило бы связности множества A.

<u>Теорема I4.2.</u> Прямое произведение связных пространств (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2) является связным пространством.

◁ Предположим противное, т.е. пусть $X_1\times X_2=\mathcal{U}\cup V$, где $\mathcal{U}$ и V – непустые непересекающиеся открытые (в топологии $\tau_1\times\tau_2$) множества. Рассмотрим некоторую точку $x^0=(x_1^0,x_2^0)\in\mathcal{U}$. Очевидно, множество $A=X_1\times\{x_2^0\}$ (с топологией, индуцированной топологией $\tau_1\times\tau_2$) гомеоморфно пространству (X_1,τ_1) и, следовательно, является связным множеством. Так как точка $x^0\in A$, то согласно замечанию I4.2 $A\subset\mathcal{U}$. Далее, $\forall x_1\in X_1$ множество $B_{x_1}=\{x_1\}\times X_2$ гомеоморфно пространству (X_2,τ_2) и по этой причине связно. При этом $B_{x_1}\cap A\neq\emptyset$, поскольку $(x_1,x_2^0)\in B_{x_1}\cap A$. Следовательно, $\forall x_1\in X_1\ B_{x_1}\subset\mathcal{U}$. Тогда $X_1\times X_2=\bigcup_{x_1\in X_1}B_{x_1}\subset\mathcal{U}$. Значит, $V=\emptyset$. Противоречие. ▷

<u>Следствие I4.3.</u> Квадрат $[0;1]\times[0;1]\subset\mathbb{R}^2$ – связное множество. Отсюда вытекает, что тор, лента Мебиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна – связные пространства.

<u>Предложение I4.2.</u> Пусть $\{X_\alpha,\alpha\in I\}$ – семейство связных подмножеств пространства (X,τ), причем $\bigcap_{\alpha\in I}\neq\emptyset$. Тогда $\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$ связно в (X,τ).

◁ Предположим противное, т.е. пусть $\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha=\mathcal{U}\cup V$, где $\mathcal{U},V$ – непустые непересекающиеся открытые (в топологии, индуцированной на $\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$) множества. По условию пересечение всех X_α непусто и, следовательно, существует такая точка $x_0\in X$, что $\forall\alpha\in I$ $x_0\in X_\alpha$. Пусть $x_0\in\mathcal{U}$. Тогда из замечания I4.2 (с учетом замечания I4.I) получаем, что $\forall\alpha\in I$ связное множество $X_\alpha\subset\mathcal{U}$ и, значит, $V=\emptyset$. Если $x_0\in V$, то аналогично получаем, что $\mathcal{U}=\emptyset$. Пришли к противоречию. ▷

<u>Пример I4.2.</u> Интервал $]0;1[\subset\mathbb{R}^1$ – связное множество, поскольку $]0;1[=\bigcup_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}]$ и $\bigcap_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]=\{\frac{1}{2}\}\neq\emptyset$ (см. предложение I4.I).

<u>Упражнение I4.3.</u> Докажите, что если A – связное множество в (X,τ) и $A\subset B\subset[A]$, то B – также связное множество.

<u>Упражнение I4.4.</u> Пусть A и B – связные множества в (X,τ), причем $A\cap[B]\neq\emptyset$. Докажите, что тогда $A\cup B$ связно.

<u>Замечание I4.3.</u> С помощью упражнения I4.I и теоремы I4.I легко получить доказательство известной из математического анализа классической теоремы Больцано: пусть $f:[0;1]\to\mathbb{R}^1$ – непрерывная числовая функция, такая, что $f(0)\cdot f(1)<0$; тогда $\exists c\in]0;1[$ такое, что $f(c)=0$. То, что все дело здесь в связности отрезка $[0;1]$, показывает следующий простой пример. Пусть $X=[-2;-1]\cup[1,2]\subset\mathbb{R}^1$. Заданная на X непрерывная числовая функция $f(t)=t$ принимает в точках -2 и $+2$ значения разных знаков, но $f(X)$ не содержит точки 0.

14.3. <u>Связные компоненты.</u> Если пространство (X,τ) несвязно, то естественно попытаться разложить его на связные куски.

<u>Определение I4.3.</u> Подмножество A топологического пространства (X,τ) называется <u>связной компонентой</u>, если выполняются следующие условия: 1) A связно, 2) не существует другого связного множества в (X,τ), содержащего A.

<u>Предложение I4.3.</u> Всякое топологическое пространство можно представить в виде объединения непересекающихся компонент связ-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ И

ности.

◁Во-первых, заметим, что каждая точка $x \in X$ содержится в некоторой компоненте связности. В самом деле, объединение связных множеств, содержащих точку x, есть связная компонента, поскольку оно в силу предложения I4.2 связно и по построению является максимальным связным множеством, содержащим точку x. Во-вторых, разные компоненты связности не могут пересекаться, так как это ввиду предложения I4.2 противоречило бы условию 2) определения I4.3. ▷

Предложение I4.4. Связные компоненты пространства (X,τ) являются замкнутыми множествами, а если компонент связности конечное число, то они и открыты.

◁Доказательство проведите самостоятельно, используя то, что в силу упражнения I4.3 замыкание связного множества связно. ▷

Мощность множества компонент связности является топологическим инвариантом (докажите это!). Этот инвариант позволяет различать некоторые топологические пространства. Например, буквы Ы, Ц, Ё негомеоморфны (как подпространства в $\mathbb{R}^2$), поскольку они имеют соответственно две, одну и три компоненты связности.

I4.4. Линейно связные пространства

Определение I4.4. Непрерывное отображение f отрезка $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}^1$ в топологическое пространство (X,τ) называется путем в (X,τ). При этом множество $f([\alpha,\beta]) \subset X$ называется носителем пути, а точки $a = f(\alpha)$ и $b = f(\beta)$ – началом и концом пути соответственно.

Определение I4.5. Топологическое пространство (X,τ) называется линейно связным, если любые две его точки могут быть соединены путем, т.е. $\forall a, b \in X$ найдется путь $f: [\alpha,\beta] \to X$ такой, что $f(\alpha) = a$ и $f(\beta) = b$.

Предложение I4.5. Всякое линейно связное пространство связно.

◁Выберем в X точку x_0 и зафиксируем ее. Затем для каждой точки $x \in X$ рассмотрим путь f_x, соединяющий x_0 с x. По теореме I4.I носитель ℓ_x этого пути – связное множество. Оно содержит точку x_0 и $X = \bigcup_{x \in X} \ell_x$. Связность пространства (X,τ) вытекает из этих фактов и предложения I4.2. ▷

Для линейно связных пространств справедливо утверждение аналогичное предложению I4.2. Благодаря этому можно доказать, что всякое топологическое пространство распадается на множество

компонент линейной связности, которые попарно не пересекаются. (Компонентой линейной связности называется максимальное линейно связное подмножество). Мощность множества компонент линейной связности является топологическим инвариантом.

Понятие линейной связности не совпадает с понятием связности.

Пример I4.3. На плоскости рассмотрим множество, являющееся объединением графика функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, заданной при $x > 0$, и отрезка оси ординат, определяемого условиями $x = 0; -1 \leq y \leq 1$. Это множество является связным в $\mathbb{R}^2$, но не является линейно связным: оно имеет две компоненты линейной связности (докажите это).

I4.5. Локально связные пространства

Определение I4.6. Пространство (X,τ) называется локально связным в точке $x_0 \in X$, если в любой окрестности точки x_0 содержится ее связная окрестность; пространство (X,τ) называется локально связным, если оно локально связно в каждой своей точке.

Таким образом, локальная связность пространства означает, что каждая его точка обладает фундаментальной системой связных окрестностей. Простейшим примером локально связного пространства служит пространство $\mathbb{R}^1$, являющееся также связным и линейно связным. Вместе с тем, локальная связность пространства не влечет за собой связность этого пространства, кроме того, существуют связные пространства, не являющиеся локально связными ни в одной точке.

§I5. Компактные топологические пространства

I5.I. Компактность. Понятие компактности топологического пространства обобщает замечательное и существенно используемое в математическом анализе свойство замкнутого отрезка, которое состоит в том, что из любого покрытия этого отрезка открытыми интервалами можно выделить конечное подпокрытие. Впервые компактные пространства (под названием "бикомпактных пространств") были введены и изучены в работах П.С. Александрова и П.С. Урысона.

Определение I5.I. Хаусдорфово топологическое пространство (X,τ) называется компактным, если во всяком его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие (см. определения I0.2 и I0.3).

Определение I5.2. Множество в топологическом пространстве называется компактным, если оно компактно как подпространство.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ

Очевидно, любое хаусдорфово пространство, состоящее из конечного числа точек, компактно. $\mathbb{R}^1$ не компактно, так как если из его открытого покрытия $\mathcal{U} = \{]n-1, n+1[\mid n \in \mathbb{Z} \}$ удалить интервал $]n_0-1, n_0+1[$, то оставшиеся интервалы не покрывают точку n_0. $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ также не является компактным, поскольку его покрытие $\mathcal{U} = \{ B(x_0, k) \mid k \in \mathbb{N} \}$ открытыми шарами с общим центром x_0 и радиусами $k \in \mathbb{N}$, очевидно, не содержит конечного подпокрытия. То же самое можно сказать и о покрытии $\{]-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[\mid n = 2, 3, \ldots \}$ интервала $]-1, 1[$, следовательно, $]-1; 1[$ не является компактным множеством в $\mathbb{R}^1$.

Теорема I5.I (лемма Гейне-Бореля-Лебега). Отрезок $[a, b]$ компактен в $\mathbb{R}^1$.

◁ Пусть $\mathcal{U} = \{ U_\alpha \}$ - произвольное открытое покрытие отрезка $[a, b]$ (разумеется, в индуцированной из $\mathbb{R}^1$ топологии). Рассмотрим множество $A = \{ x \mid a \leq x \leq b$ и $[a, x]$ покрыт конечным числом множеств из $\mathcal{U} \}$. Ясно, что $A \neq \emptyset$, так как $a \in A$. Обозначим $d = \sup A$. Число d определено, так как множество A ограничено сверху числом b. Покажем, что $d \in A$. Если $d = a$ - это очевидно. Пусть $d > a$. Поскольку $\mathcal{U}$ - покрытие, $\exists U_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ такое, что $d \in U_{\alpha_0}$. U_{α_0} открыто, значит, $\exists]c, d[\subset U_{\alpha_0}$. По определению точной верхней грани существует число $x_1 \in A$, такое, что $x_1 \in]c, d[$. Тогда отрезок $[a, x_1]$ покрыт конечным числом множеств из $\mathcal{U}$. Но тогда и $[a, d]$ покрыт конечным числом множеств из $\mathcal{U}$ (если к покрытию $[a, x_1]$ добавить U_{α_0}). Следовательно, $d \in A$.

Предположим, что $d < b$. Тогда существует число x_2, такое, что $d < x_2 < b$ и $]d, x_2[\subset U_{\alpha_0}$, т.е. $[a, x_2]$ может быть покрыт конечным числом элементов из $\mathcal{U}$. Это противоречит определению числа d. Противоречие показывает, что $d = b$. ▷

I5.2. Свойства компактных топологических пространств. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение. Если $A \subset X$ и $\{ U_\alpha \}$ - система множеств из X такая, что $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, то систему $\{ U_\alpha \}$ условимся называть покрытием множества A множествами из X.

Лемма I5.I. Для компактности множества A в топологическом пространстве (X, τ) необходимо и достаточно, чтобы в любом покрытии множества A открытыми в (X, τ) множествами содержалось конечное подпокрытие.

◁ Необходимость. Пусть $\{ U_\alpha \}$ - система открытых подмножеств

(X, τ), такая, что $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Тогда, очевидно, семейство $\{ U_\alpha \cap A \}$ - открытое покрытие A (в индуцированной на A топологии). В силу компактности A у этого покрытия существует конечное подпокрытие $\{ U_{\alpha_i} \cap A \mid i = 1, \ldots, m \}$. Очевидно, что тогда $\{ U_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, m \}$ - конечное подпокрытие покрытия $\{ U_\alpha \}$.

Достаточность. Пусть $\{ V_\alpha \}$ - произвольное открытое покрытие множества A (в индуцированной на A топологии). По определению индуцированной топологии $\forall V_\alpha \in \tau_A \ \exists U_\alpha \in \tau$ такое, что $V_\alpha = U_\alpha \cap A$. Очевидно, $\{ U_\alpha \}$ - покрытие A открытыми подмножествами из (X, τ). По условию в нем имеется конечное подпокрытие $\{ U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \}$. Тогда $\{ V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n} \}$ - конечное подпокрытие покрытия $\{ V_\alpha \}$. Следовательно, A - компактное множество в (X, τ). ▷

Теорема I5.2. Всякое замкнутое подмножество F компактного пространства (X, τ) компактно.

◁ Пусть $\{ U_\alpha \}$ - покрытие F открытыми в (X, τ) множествами. Так как $(\bigcup_\alpha U_\alpha) \cup (X \setminus F) = X$, то система $\{ U_\alpha, X \setminus F \}$ - открытое покрытие (X, τ). В силу компактности (X, τ) у него имеется конечное подпокрытие $\{ U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}, X \setminus F \}$. Ясно, что тогда $\{ U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m} \}$ - конечное подпокрытие покрытия $\{ U_\alpha \}$. Отсюда и из леммы I5.I вытекает, что F - компактное множество в (X, τ). ▷

Теорема I5.3. Пусть F - компактное подпространство в хаусдорфовом пространстве (X, τ). Тогда F - замкнутое множество в (X, τ).

◁ Докажем, что $X \setminus F$ открыто. Рассмотрим произвольную точку $x \in X \setminus F$. Так как (X, τ) - хаусдорфово топологическое пространство, то $\forall y \in F$ существует пара открытых непересекающихся окрестностей $O_y(y)$ и $O_y(x)$ точек y и x, соответственно. Очевидно, система $\{ O_y(y) \mid y \in F \}$ является покрытием F открытыми в (X, τ) множествами. В силу компактности F и леммы I5.I в нем имеется конечное подпокрытие $\{ O_{y_i}(y_i) \mid i = 1, \ldots, n \}$. Тогда $U = \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}(y_i)$ - окрестность множества F, а $V = \bigcap_{i=1}^{n} O_{y_i}(x)$ - окрестность точки x, причем легко доказать, что $U \cap V = \emptyset$. Отсюда заключаем, что $U \subset X \setminus F$ и, следовательно, $X \setminus F$ - окрестность точки x. Согласно предложению 7.I $X \setminus F \in \tau$. ▷

Замечание I5.I. При доказательстве теоремы I5.3 установлено,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

что в хаусдорфовом пространстве для произвольного компактного подмножестве F и произвольной, не содержащейся в F точки x, существуют открытые непересекающиеся окрестности $\mathcal{U}$ и V. Согласно теореме I5.2 это же будет верно, если F – замкнутое подмножество компактного пространства. Таким образом, фактически доказано, что компактное пространство регулярно. Имеет место и более общее утверждение, установленое в 1923 году П.С.Александровым и П.С.Урысоном.

<u>Теорема I5.4.</u> Компактное пространство нормально.

◁Требуется доказать, что у любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств F_1 и F_2 компактного пространства (X,τ) имеются непересекающиеся окрестности.

Согласно замечанию I5.I $\forall x \in F_2 \ \exists \mathcal{U}_x$ – открытая окрестность множества F_1 и $\exists V_x$ – открытая окрестность точки x, такие, что $\mathcal{U}_x \cap V_x = \emptyset$. Очевидно, $\{V_x \mid x \in F_2\}$ – покрытие F_2 открытыми в (X,τ) множествами. В силу теоремы I5.2 и леммы I5.I у него имеется конечное подпокрытие $\{V_{x_1},\dots,V_{x_m}\}$. Ясно, что $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$ – окрестность F_2, $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{x_i}$ – окрестность F_1 и $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$. ▷

<u>Теорема I5.5</u>. Образ компактного пространства при непрерывном отображении в хаусдорфово пространство компактен.

◁Пусть $f: X \to Y$ непрерывное отображение компактного пространства (X,τ) в хаусдорфово пространство (Y,τ_1) и пусть $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ – произвольное покрытие множества $f(X)$ открытыми в (Y,τ_1) множествами. Из свойств (I3.2) операции перехода к прообразам и из критерия непрерывности вытекает, что $\{f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ – открытое покрытие (X,τ). В силу компактности (X,τ) в этом покрытии имеется конечное подпокрытие $\{f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_i}) \mid i = 1,\dots,n\}$. Тогда, как легко проверить, $\{\mathcal{U}_{\alpha_i} \mid i=1,\dots,n\}$ – конечное подпокрытие покрытия $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Согласно лемме I5.I $f(X)$ – компактное множество в (Y,τ_1). ▷

<u>Следствие I5.I.</u> Компактность – топологический инвариант, т.е. гомеоморфные пространства компактны или нет одновременно.

<u>Теорема I5.6.</u> Пусть $f: X \to Y$ – непрерывная биекция компактного пространства (X,τ) на хаусдорфово пространство (Y,τ_1). Тогда f – гомеоморфизм.

◁Пусть F – замкнутое множество в (X,τ). В силу теоремы I5.2 F – компактное множество. Тогда согласно теореме I5.5

$f(F)$ – компактно в (Y,τ_1), откуда по теореме I5.3 имеем, что $f(F)$ – замкнутое множество в (Y,τ_1). Но образ множества F при отображении f, очевидно, совпадает, с прообразом множества F при обратном отображении $f^{-1}: Y \to X$. Следовательно, отображение f^{-1} удовлетворяет одному из критериев непрерывности (см. теорему I2.I, условие 3)) и, значит, непрерывно. ▷

Следующая теорема, принадлежащая советскому математику А.Н. Тихонову, играет центральную роль в теории компактных пространств и является одной из фундаментальных теорем общей топологии.

<u>Теорема I5.7</u> (А.Н.Тихонов). Прямое произведение (любой совокупности) компактных топологических пространств компактно.

◁Доказательство опускается.▷

В заключение приведем теорему, обобщающую известные из математического анализа теоремы Вейерштрасса.

<u>Теорема I5.8.</u> Всякая непрерывная функция $f: X \to R^1$, заданная на компактном пространстве (X,τ), ограничена и принимает свое наибольшее (и наименьшее) значение.

◁В силу теоремы I5.5 $f(X)$ – компактно в R^1, и по теореме I5.3 $f(X)$ – замкнуто в R^1. Кроме того, $f(X)$ – ограничено, так как в противном случае из его открытого покрытия $\{\mathcal{U}_n \mid n \in N\}$, где $\mathcal{U}_n =]-n, n[\cap f(X)$, нельзя было бы выделить конечного подпокрытия. Ограниченность функции f доказана. Исходя из определения точной верхней и точной нижней граней множества $f(X)$, легко понять, что они являются точками прикосновения для $f(X)$ и, значит, в силу замкнутости $f(X)$, принадлежат этому множеству. Следовательно, $\exists x_0, y_0 \in X$, такие, что $f(x_0) = \inf f(X)$ и $f(y_0) = \sup f(X)$. ▷

I5.3. <u>Предкомпактные множества</u>. Из теоремы I5.3 вытекает, что в хаусдорфовом пространстве незамкнутое множество не может быть компактным. Но может оказаться, что замыкание этого множества уже обладает свойством компактности.

<u>Определение I5.3</u>. Подмножество A топологического пространства (X,τ) называется <u>предкомпактным</u> (или компактным относительно (X,τ)), если его замыкание в (X,τ) компактно.

<u>Замечание I5.2</u>. Понятие предкомпактности (в отличие от компактности) связано с тем пространством (X,τ), в котором рассматривается данное множество. Например, множество $]0;1[\cap Q$ предкомпактно в R^1, но не предкомпактно в Q^1.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

Понятие предкомпактности наиболее существенно в случае метрических пространств.

В заключение этого параграфа определим еще несколько классов топологических пространств, обладающих многими свойствами компактных пространств.

15.4. <u>Локально-компактные пространства</u> были введены и изучены П.С.Александровым.

<u>Определение 15.4.</u> Пространство (X,τ) называется <u>локально-компактным</u>, если каждая его точка обладает открытой окрестностью, замыкание которой компактно в (X,τ).

Ясно, что всякое компактное пространство локально-компактно. Пространство $\mathbb{R}^n$ локально-компактно, но не компактно. Всякое дискретное пространство локально компактно, а компактным оно является лишь если у него конечное число точек.

П.С.Александров предложил конструкцию, называемую <u>одноточечной компактификацией</u>, которая позволяет каждое локально-компактное (но не компактное) хаусдорфово пространство гомеоморфно отобразить на такое подмножество некоторого компактного пространства, дополнение к которому состоит из одной точки. В качестве примера одноточечной компактификации отметим хорошо известную стереографическую проекцию, которая осуществляет гомеоморфизм между локально-компактным пространством $\mathbb{R}^n$ и n-мерной сферой S^n с выколотым северным полюсом ($S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

15.5. <u>Паракомпактные пространства</u>. Этот класс топологических пространств был открыт в начале 40-х годов французским математиком Ж.Дьедоне (род. 1.7.1906).

<u>Определение 15.5.</u> Покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ пространства (X,τ) называется <u>локально-конечным</u>, если каждая точка из X обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов семейства $\{\mathcal{U}_\alpha\}$.

<u>Определение 15.6.</u> Говорят, что покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ <u>вписано</u> в покрытие $\{V_\beta\}$, если $\forall \mathcal{U}_\alpha \ \exists V_\beta$ такое, что $\mathcal{U}_\alpha \subset V_\beta$.

<u>Определение 15.7.</u> Топологическое пространство называется <u>паракомпактным</u>, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально-конечное открытое покрытие.

К числу паракомпактных принадлежат все компактные пространства (это очевидно) и все метрические пространства. Замкнутые подмножества паракомпактных пространств паракомпактны. Все паракомпактные пространства нормальны.

Выделение паракомпактных пространств позволило решить ряд вопросов, связанных с метризацией, существованием разбиения единицы и др.

§16. Компактность метрических пространств

16.1. <u>Секвенциальная компактность</u>. Теоремы 10.4 и 12.2 показывают, что многие свойства метрических пространств можно выразить в терминах сходящейся последовательности. Здесь докажем, что компактность метрического пространства равносильна секвенциальной компактности, которая также определяется с помощью сходящейся последовательности.

<u>Определение 16.1.</u> Топологическое пространство (X,τ) называется <u>секвенциально-компактным</u>, если из всякой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

<u>Теорема 16.1.</u> Метрическое пространство (X,ρ) (с топологией τ_ρ, индуцированной метрикой ρ) является компактным тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

(а) из любой последовательности точек из X можно выделить сходящуюся подпоследовательность;

(б) всякая последовательность (F_n) непустых, вложенных друг в друга, замкнутых множеств, таких, что $\forall n \in \mathbb{N} \ F_n \supset F_{n+1}$, имеет непустое пересечение.

◁ <u>Шаг 1.</u> Докажем, что из компактности (X,τ_ρ) следует условие (б). Предположим противное, т.е. пусть (F_n) – указанная в условии (б) последовательность множеств, но $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$. Тогда множества $G_n = X \setminus F_n$ открыты и образуют покрытие X, поскольку $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = X$. В силу компактности (X,τ_ρ) в покрытии $\{G_n\}$ имеется конечное подпокрытие $\{G_{n_1},\dots,G_{n_m}\}$. Можно считать, что $n_1 < n_2 < \dots < n_m$. Тогда по условию при $j<k$ $F_{n_j} \supset F_{n_k}$ и, поэтому, $G_{n_j} \subset G_{n_k}$. Отсюда имеем, что $X = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G_{n_k} = G_{n_m}$. Следовательно, $F_{n_m} = X \setminus G_{n_m} = \varnothing$, что противоречит выбору множеств F_n.

<u>Шаг 2.</u> Докажем, что при выполнении условия (б) произвольная последовательность (x_n) точек из (X,τ_ρ) содержит сходящуюся подпоследовательность. Для каждого натурального числа $k \in \mathbb{N}$ определим множество $F_k = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\}$. Очевидно, получена убывающую цепочку множеств $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$. В

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

силу свойства 2 предложения 8.I такую же убывающую цепочку образуют замыкания множеств F_k : $[F_1] \supset [F_2] \supset [F_3] \supset \dots$, причем каждое из множеств $[F_k]$ не пусто. В силу условия (б) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [F_k] \neq \emptyset$ и, следовательно, $\exists a \in X$, такая, что $\forall k \in \mathbb{N} \;\; a \in [F_k]$. Последнее означает, что в произвольной окрестности V точки a при любом $k \in \mathbb{N}$ имеется точка множества F_k, т.е. $V \cap F_k \neq \emptyset$. Используя это, сконструируем сходящуюся подпоследовательность последовательности (x_n). Так как пересечение шара $B(a,1)$ (являющегося окрестностью точки a) с множеством F_1 не пусто, то найдется элемент x_{n_1} последовательности (x_n) такой, что $x_{n_1} \in B(a,1) \cap F_1$. Пересечение шара $B(a,\frac{1}{2})$ с множеством $F_{n_1} = \{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\}$ также не пусто и поэтому найдется элемент x_{n_2} последовательности (x_n) такой, что $n_2 > n_1$ и $x_{n_2} \in B(a,\frac{1}{2}) \cap F_{n_1}$. Продолжая этот процесс по индукции, $\forall k \in \mathbb{N}$ найдем элемент x_{n_k} последовательности (x_n) такой, что $n_k > n_{k-1}$ и $x_{n_k} \in B(a,\frac{1}{k}) \cap F_{n_{k-1}}$. Полученная последовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ сходится к a. Это вытекает из того, что $\forall k \in \mathbb{N} \;\; \rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Шаг 3. Докажем компактность (X, τ_ρ) в предположении, что условие (а) выполняется. Для этого докажем сначала две вспомогательные леммы.

Лемма I6.I. Пусть выполнено условие (а) теоремы I6.I и $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ – произвольное открытое покрытие (X, τ_ρ). Тогда $\exists \varepsilon > 0$ такое, что любой открытый шар радиуса ε целиком содержится в одном из множеств $\mathcal{U}_\alpha$, другими словами, покрытие $\{B(x,\varepsilon) \mid x \in X\}$ открытыми шарами вписано в покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$.

Доказательство леммы. Предположим противное, т.е. пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in X$ такая, что открытый шар $B(x_n, \frac{1}{n})$ не содержится целиком ни в одном из множеств $\mathcal{U}_\alpha$. Получим последовательность (x_n). По условию (а) у нее имеется подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся к некоторой точке $a \in X$. Так как $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ – покрытие X, то $\exists \mathcal{U}_{\alpha_0}$ такое, что $a \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$. Поскольку $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ – открытое множество, $\exists r > 0$ такое, что $B(a,r) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0}$. По определению предела последовательности найдется такое число $k_r \in \mathbb{N}$, что $\forall k \geq k_r \;\; \rho(a, x_{n_k}) < \frac{r}{2}$. Выберем число k_0 так, чтобы $k_0 \geq k_r$ и $\frac{1}{n_{k_0}} < \frac{r}{2}$. Тогда $\forall z \in B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}})$ имеем

$$\rho(a,z) \leq \rho(a, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \qquad \text{и,}$$

следовательно, $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}) \subset B(a,r) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0}$. Это противоречит выбору точки $x_{n_{k_0}}$. Лемма доказана.

Число ε из леммы I6.I называется числом Лебега покрытия $\{\mathcal{U}_\alpha\}$.

Лемма I6.2. Пусть (X, τ_ρ) удовлетворяет условию (а) теоремы I6.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество X может быть покрыто конечным набором открытых шаров радиуса ε.

Доказательство леммы. Пусть x_1 – произвольная точка из X. Если $B(x_1,\varepsilon) \neq X$, то возьмем $x_2 \in X \setminus B(x_1,\varepsilon)$ и рассмотрим множество $B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)$. Если но не покрывает X, то берем $x_3 \in X \setminus (B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon))$ и т.д.

Предположим, что мы не остановимся ни на каком конечном шаге. Тогда получим последовательность (x_n), у которой при любых различных n_1 и n_2 $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \geq \varepsilon$. Но тогда у этой последовательности нет ни одной фундаментальной подпоследовательности, а значит, и ни одной сходящейся подпоследовательности (см. предложение 4.I). Получили противоречие с условием (а), что и доказывает лемму.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть условие (а) выполняется и $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ – произвольное открытое покрытие пространства (X, τ_ρ). Пусть $\varepsilon > 0$ – число Лебега покрытия $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, существующее в силу леммы I6.I. По лемме I6.2 X можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε: $X = B(x_1,\varepsilon) \cup \dots \cup B(x_m,\varepsilon)$. Согласно лемме I6.I $\forall k \in \{1,\dots,m\} \; \exists \mathcal{U}_{\alpha_k} \in \{\mathcal{U}_\alpha\}$ такое, что $B(x_k,\varepsilon) \subset \mathcal{U}_{\alpha_k}$. Тогда, очевидно, $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{U}_{\alpha_k} = X$. Тем самым доказано, что в произвольном открытом покрытии $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ имеется конечное подпокрытие. Значит, (X, τ_ρ) компактно. $\triangleright$

Определение I6.2. Компактное метрическое пространство коротко называют компактном.

I6.2. Полная ограниченность. Компактность метрического пространства тесно связана с понятием полной ограниченности.

Определение I6.3. Подмножество A метрического пространства (X,ρ) называется ε-сетью множества $M \subset X$, если $\forall x \in M \;\; \exists a \in A$ такая, что $\rho(x,a) < \varepsilon$. Если при этом A – конечное множество, то A называют конечной ε-сетью.

Определение I6.4. Множество $M \subset X$ называется вполне ограниченным в (X,ρ), если при любом $\varepsilon > 0$ у M существует конечная ε-сеть.

Перечислим некоторые свойства вполне ограниченных множеств.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

1^0. Вполне ограниченное множество ограничено.

◁Пусть $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ – конечная 1-сеть множества M и r – наибольшее из чисел $\rho(a_1,a_2),\dots,\rho(a_1,a_n)$. Тогда $M\subset B(a_1,r+1)$. В самом деле, $\forall x\in M\ \exists a_j\in A$ такая, что $\rho(x,a_j)<1$. Следовательно, $\rho(a_1,x)\leq\rho(a_1,a_j)+\rho(a_j,x)<r+1$. ▷

2^0. Если M вполне ограничено, то и замыкание $[M]$ вполне ограничено.

◁Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число и A – конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть множества M. Тогда, очевидно, A – конечная ε-сеть множества $[M]$. ▷

3^0. Всякое вполне ограниченное метрическое пространство (X,ρ) сепарабельно.

◁По определению полной ограниченности $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists A_n$ – конечная $\frac{1}{n}$-сеть множества X. Тогда множество $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ является счетным (точнее, не более чем счетным) и всюду плотным, т.е. $[A]=X$. Действительно, если $x\in X$ и V – произвольная окрестность точки x, то $\exists B(x,\varepsilon)\subset V$. Очевидно, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$, тогда найдется такая точка $a\in A_{n_0}\subset A$, что $\rho(x,a)<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$, т.е. $V\cap A\neq\emptyset$. Следовательно, $x\in[A]$. ▷

Из свойства 3^0 и теоремы 10.2 вытекает

Следствие 16.1. Вполне ограниченное метрическое пространство обладает счетной базой топологии.

4^0. Подмножество вполне ограниченного множества вполне ограничено. (Интересно также и отрицание этого утверждения).

Упражнение 16.1. Пусть (Y,τ_Y) – подпространство пространства (X,τ) и $M\subset Y$. Докажите, что (M – вполне ограничено в (Y,τ_Y)) $\Longleftrightarrow$ (M – вполне ограничено в (X,τ)).

Теорема 16.2. (Хаусдорф). Для того, чтобы метрическое пространство (X,ρ) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

(1) (X,ρ) – полное пространство;

(2) X – вполне ограничено в (X,ρ).

◁Необходимость. Полнота компактного метрического пространства вытекает из теоремы 16.1, в силу которой любая последовательность точек пространства (X,ρ), а следовательно, и любая фундаментальная последовательность в (X,ρ), содержит сходящуюся подпоследовательность. Остается заметить, что если подпоследовательность (x_{n_k}) фундаментальной последовательности (x_n) сходится к точке $x_0\in X$, то согласно упражнению 4.1 и (x_n) сходится к x_0.

Докажем полную ограниченность компактного метрического пространства. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Очевидно, семейство $\{B(x,\varepsilon)\mid x\in X\}$ образует открытое покрытие X. В силу компактности (X,ρ) в нем имеется конечное подпокрытие $\{B(x_1,\varepsilon),\dots,B(x_n,\varepsilon)\}$. Но тогда множество $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ – конечная ε-сеть для множества X.

Достаточность. Пусть условия (1) и (2) выполняются. Докажем компактность пространства (X,ρ), для чего, в силу теоремы 16.1, достаточно доказать, что из любой последовательности (x_n) точек из X можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $\forall n\in\mathbb{N}\ A_n$ – конечная $\frac{1}{2^n}$-сеть множества X. Тогда $\forall n\in\mathbb{N}\ \{B(a,\frac{1}{2^n})\mid a\in A_n\}$ – конечное покрытие X. Различных шаров $B(a,\frac{1}{2})$, где $a\in A_1$, – конечное число. Значит, в один из них, скажем в $B(a_1,\frac{1}{2})$, где $a_1\in A_1$, попадет бесконечное число элементов последовательности (x_n). Сохранив между ними прежний порядок следования друг за другом, обозначим их так: $x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_n^{(1)},\dots$. Бесконечное число элементов последовательности $(x_n^{(1)})$, являющейся подпоследовательностью последовательности (x_n), содержится в некотором шаре $B(a_2,\frac{1}{2^2})$, где $a_2\in A_2$. Обозначим их так: $x_1^{(2)},x_2^{(2)},\dots,x_n^{(2)},\dots$. Продолжая этот процесс неограниченно, для каждого $k\in\mathbb{N}$ построим подпоследовательность $(x_n^{(k)})$ последовательности (x_n), такую, что $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n^{(k)}\in B(a_k,\frac{1}{2^k})$, где $a_k\in A_k$. Тогда последовательность $(x_1^{(1)},x_2^{(2)},\dots,x_n^{(n)},\dots)$ является искомой сходящейся подпоследовательностью последовательности (x_n).

Во-первых, $(x_n^{(n)})$ фундаментальна. В самом деле, так как при $m\geqslant n$ $x_m^{(m)}\in B(a_n,\frac{1}{2^n})$ (проверьте!), то $\forall p>0\ \rho(x_n^{(n)},x_{n+p}^{(n+p)})\leqslant\rho(x_n^{(n)},a_n)+\rho(a_n,x_{n+p}^{(n+p)})<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Во-вторых, (X,ρ) – полное пространство и поэтому фундаментальная последовательность $(x_n^{(n)})$ сходится. ▷

16.3. Предкомпактность множества в метрическом пространстве. Здесь докажем один важный критерий предкомпактности, принадлежащий Хаусдорфу.

Теорема 16.3. (Критерий Хаусдорфа). Для того, чтобы подмножество M метрического пространства (X,ρ) было предкомпактно в (X,ρ),

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ

необходимо, а в случае полноты пространства (X,ρ) и достаточно, чтобы M было вполне ограничено.

◁<u>Необходимость</u>. Если M предкомпактно, то замыкание $[M]$ – компактное подпространство (X,ρ). По теореме I6.2 $[M]$ вполне ограничено, а по свойству 4^o (см. п.I6.2) и M вполне ограничено.

<u>Достаточность</u>. По свойству 2^o (п.I6.2) из полной ограниченности M следует полная ограниченность $[M]$. Кроме того, $[M]$ замкнуто, и в силу упражнения 4.2 $[M]$ – полное подпространство полного пространства (X,ρ). Тогда в силу теоремы I6.2 $[M]$ компактно и, следовательно, M предкомпактно в (X,ρ). ▷

§I7. Критерии компактности множеств в $\mathbb{R}^n$, ℓ_2, $C[a,b]$.

<u>Теорема I7.I</u> (Гейне-Борель-Лебег). Для того, чтобы множество $A\subset\mathbb{R}^n$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и замкнуто.

◁<u>Необходимость.</u> В силу теоремы I6.2 компактное множество A вполне ограничено и по свойству I^o (п.I6.2) A ограничено. Так как $\mathbb{R}^n$ – хаусдорфово пространство, то в силу теоремы I5.3 A замкнуто.

<u>Достаточность.</u> Пусть A ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^n$. В силу ограниченности, A содержится в некотором замкнутом параллелепипеде $P\subset\mathbb{R}^n$. По теореме I5.7 множество P компактно как прямое произведение n замкнутых отрезков, являющихся компактными в силу теоремы I5.I. Тогда A можно рассматривать как замкнутое множество в компактном пространстве P. По теореме I5.2 A компактно. ▷

<u>Замечание I7.I.</u> Предкомпактность множества в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна его ограниченности в $\mathbb{R}^n$.

I7.2. <u>Критерий компактности в ℓ_2.</u>

<u>Теорема I7.2</u>. Для того, чтобы множество $A\subset\ell_2$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия: (I) A ограничено, (2) A замкнуто, (3) $\forall\varepsilon>0\ \exists p_0\in\mathbb{N}$ такое, что $\forall p\geq p_0$ и $\forall x\in A$ справедливо неравенство

$$\Big(\sum_{k=p}^{\infty}x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

◁Доказательство опускается. ▷

<u>Замечание I7.2.</u> Предкомпактность множества в ℓ_2 эквивалентна выполнению условий (I) и (3).

I7.3. <u>Критерий компактности в $C[a,b]$.</u>

<u>Теорема I7.3</u>. (Арцела-Асколи). Для того, чтобы множество $A\subset C[a,b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия: (I) A – ограниченное множество, т.е. $\exists C>0$ такое, что $\forall x\in A$ и $\forall t\in[a,b]$ $|x(t)|<C$, (2) A замкнуто в $C[a,b]$; (3) A – множество равностепенно непрерывных функций, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall x\in A$ и $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ $(|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow |x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon)$.

◁<u>Необходимость</u>. Ограниченность и замкнутость компактного множества $A\subset C[a,b]$ доказываются так же, как и в теореме I7.I. Докажем условие (3). Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. По теореме I6.2 для множества A в $C[a,b]$ существует конечная $\frac{\varepsilon}{4}$ – сеть $K_\varepsilon=\{x_1,\dots,x_m\}$. При любом $j\in\{1,\dots,m\}$ функция $x_j=x_j(t)$ непрерывна на $[a,b]$ и в силу теоремы Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$. Это означает, что $\exists\,\delta_j>0$ такое, что $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ $(|t_1-t_2|<\delta_j \Rightarrow |x_j(t_1)-x_j(t_2)|<\frac{\varepsilon}{2})$. Положив $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$, имеем, что $\forall x_j\in K_\varepsilon$ и

$$\forall t_1,t_2\in[a,b]\ (|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow |x_j(t_1)-x_j(t_2)|<\tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Пусть теперь x – произвольная функция из A, а x_j – такая функция из K_ε, что $\rho(x_j,x)=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x_j(t)-x(t)|<\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ из условия $|t_1-t_2|<\delta$ вытекает, что

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leq|x(t_1)-x_j(t_1)|+|x_j(t_1)-x_j(t_2)|+$$
$$+|x_j(t_2)-x(t_2)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

. Это и означает, что A – множество равностепенно непрерывных функций.

<u>Достаточность.</u> Пусть ε – произвольное положительное число, а $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таково, что $\forall x\in A$ и $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ $(|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow |x(t_1)-x(t_2)|<\frac{\varepsilon}{5})$. Пусть теперь $\{t_k\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$, диаметр которого меньше δ, т.е. $a=t_1<t_2<\dots<t_n=b$ и $\max\limits_{1\leq k\leq n-1}|t_{k+1}-t_k|<\delta$, а $\{y_j\mid j=1,\dots,m\}$ – разбиение отрезка $[-C,C]$ с диаметром меньшим чем $\frac{\varepsilon}{5}$, где C – постоянное число из условия (I). Рассмотрим множество K функций $\varphi(t)$, заданных и непрерывных на отрезке $[a,b]$, принимающих в точках t_k $(k=1,\dots,n)$ одно из значений y_j $(j=1,\dots,m)$ и линейных на каждом отрезке $[t_k,t_{k+1}]$. Очевидно, таких функций имеется лишь конечное число (равное m^n). Покажем, что K – ε – сеть для A. Пусть x – произвольная

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ И

функция из A и пусть $\varphi \in K$ – такая функция, что в каждом узле t_k $|\varphi(t_k) - x(t_k)| < \frac{3}{5}$. Тогда $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ $|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k+1})| \le |\varphi(t_k) - x(t_k)| + |x(t_k) - x(t_{k+1})| + |x(t_{k+1}) - \varphi(t_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}$. Отсюда в силу линейности функции $\varphi(t)$ на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ имеем, что $\forall t, \tilde{t} \in [t_k, t_{k+1}]$ $|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| < \frac{3\varepsilon}{5}$. Если теперь t – произвольная точка отрезка $[a, b]$, а t_k – ближайшая к t узловая точка разбиения $\{t_k\}$, то справедлива следующая оценка: $|x(t) - \varphi(t)| \le |x(t) - x(t_k)| +$

$$+ |x(t_k) - \varphi(t_k)| + |\varphi(t_k) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon .$$

Следовательно, $\rho(x, \varphi) = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, откуда вытекает, что K – ε -сеть для A .

В силу полноты $C[a, b]$ из теоремы I6.3 следует, что A предкомпактно в $C[a, b]$, а так как A замкнуто и, значит, совпадает со своим замыканием, то A компактно. $\triangleright$

Замечание I7.3. Предкомпактность множества в $C[a, b]$ эквивалентна выполнению условий (I) и (3).

ЛИТЕРАТУРА

I. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М., 1979.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1981.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I. Метрические пространства 3

§ I. Определение и примеры метрических пространств 3
§ 2. Сферы, открытые и замкнутые шары, окрестности 7
§ 3. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства. Замыкание множества 9
§ 4. Сходимость в метрическом пространстве. Полные метрические пространства. Пополнение I3
§ 5. Непрерывные отображения метрических пространств I9

Часть II. Топологические пространства 20

§ 6. Определение и примеры топологических пространств. База топологии 20
§ 7. Окрестности точки и их свойства. Фундаментальная система окрестностей точки 25
§ 8. Замыкание множества. Предельные и изолированные точки 28
§ 9. Внутренность, внешность и граница множества 3I
§IO. Аксиомы счетности. Сходимость последовательности в топологическом пространстве 32
§II. Аксиомы отделимости. Метризуемость топологических пространств 35
§I2. Непрерывные отображения топологических пространств .. 38
§I3. Способы построения топологических пространств 43
§I4. Связность, линейная связность, локальная связность .. 50
§I5. Компактные топологические пространства 55
§I6. Компактность метрических пространств 6I
§I7. Критерий компактности множеств в $\mathbb{R}^n, \ell_2, C[a, b]$ ... 66

Литература 68

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

Владимир Григорьевич Ермаков
Топология (метрические и топологические пространства)
Учебное пособие

Редактор Е.Ф. Зайцева

Подписано к печати 22.10.1984 г. Формат 60 х 84 1/16.
Бумага писчая № 1. Печать офсетная. Усл.п.л. 3,9.
Уч.-изд.л. 3,3. Тираж 250. Заказ 358. Цена 11 к.

Отпечатано на ротапринте ГГУ, г.Гомель, ул.Советская,104.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ