Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 512.542

Централизуемость на мультикольцах

А.Д. ХОДАЛЕВИЧ

Имеет место следующее утверждение: если H и K – идеалы мультикольца A, то H централизует K тогда и только тогда, когда β централизует α, где β, α – конгруэнции на A, индуцируемые H и K соответственно.
Ключевые слова: универсальная алгебра, мультикольцо, конгруэнция, идеал, централизуемость.

It's hold the following proposition: if H and K are ideals of a multiring A, then H centralises K if and only if β centralizes α, where β, α are congruences on A and β, α are endued by H and K, respectively.
Keywords: universal algebra, multiring, congruence, ideal, centrality.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Понятие централизуемости играет исключительно важную роль для большого числа алгебраических структур. Примером тому могут служить абелевы и нильпотентные группы, модули, когомологии, теория прямых представлений и т.д. В 1976 году Смит в работе [1] ввел определение централизуемости конгруэнций для произвольных универсальных алгебр. В последующем различные варианты этого определения рассматривались в работах [2]–[4] и были в основном связаны с конгруэнц-модулярными многообразиями универсальных алгебр. В настоящей статье приводится пример централизуемости конгруэнций на мультикольцах, что указывает на возможность развивать некоторые специфические методы исследований мультиколец аналогично тому, как это делается в схожих алгебраических структурах (группах, алгебрах Ли, n-арных группах и т.д.).

Согласно [5] алгебра A сигнатуры $\{+, -, 0\} \cup \Omega$ называется *мультикольцом,* если алгебра $< A, +, -, 0 >$ – группа (не обязательно абелева), и для любой ненулевой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и любых элементов $a_1, ..., a_{i-1}, a_i', a_i'', a_{i+1}, ..., a_n \in A$ имеет место

$$a_1 \dots a_{i-1}(a_i' + a_i'')a_{i+1} \dots a_n\omega =$$
$$= a_1 \dots a_{i-1}\, a_i'\, a_{i+1} \dots a_n\omega + a_1 \dots a_{i-1}\, a_i'' a_{i+1} \dots a_n\omega,$$

для любого $i = 1, ..., n.$

Для мультиколец справедливы следующие равенства:

$$a_1 ... a_{i-1} 0 a_{i+1} ... a_n\omega = 0,$$
$$a_1 ... a_{i-1}(-a)a_{i+1} ... a_n\omega = -(a_1 ... a_{i-1} a a_{i+1} ... a_n\omega),$$
$$a_1 ... a_{i-1}(a_i' - a_i'')a_{i+1} ... a_n\omega =$$
$$= a_1 ... a_{i-1} a_i' a_{i+1} ... a_n\omega - (a_1 ... a_{i-1} a_i'' a_{i+1} ... a_n\omega),$$

где $-a$, как обычно, обозначается элемент, противоположный элементу $a \in A$. Докажем, например, первое равенство.

$$a_1 ... a_{i-1} 0 a_{i+1} ... a_n\omega = a_1 ... a_{i-1}(0+0)a_{i+1} ... a_n\omega = a_1 ... a_{i-1} 0 a_{i+1} ... a_n\omega + a_1 ... a_{i-1} 0 a_{i+1} ... a_n\omega.$$

Прибавляя к обеим частям равенства элемент, противоположный элементу $a_1 ... a_{i-1} 0 a_{i+1} ... a_n\omega$, получаем требуемое равенство.

Подалгебра H мультикольца A называется *идеалом* [6], если H-нормальная подгруппа группы A и для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$, произвольного $i = 1, ..., n$ и любых $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n \in A$, $h \in H$, имеет место

$$a_1 ... a_{i-1} h\, a_{i+1} ... a_n\omega \in H,$$

в частности, если ω–нульарная или унарная операция, то это означает, что $h\omega \in H$.

Лемма 1 [5]. *Пусть* H *– идеал мультикольца* A *и* $\alpha=\{(a,b)\,|\,a,b\in A, a+b\in H\}$. *Тогда* α *– конгруэнция на* A, *и любая конгруэнция на* A *имеет такую форму для подходящего идеала* H.

Теорема (Мальцев). Конгруэнции любой алгебры многообразия M сигнатуры Ω попарно перестановочны тогда и только тогда, когда абсолютно свободная алгебра сигнатуры Ω со свободной порождающей системой $\{x,y,z\}$ содержит такое слово $(x,y,z)\mu$, что во всех алгебрах из M справедливы тождества

$$(xxy)\mu=(yxx)\mu=y.$$

Пусть A – кольцо, тогда полагаем

$$(xyz)\mu=x-y+z,$$

т.е. конгруэнции любого мультикольца попарно перестановочны.

Определение 1 [7]. *Пусть* H *– идеал мультикольца* A. *Тогда централизатором* H *в* A *называется наибольший идеал* $C_A(H)$ *в* A *такой, что для любого* $x\in C_A(H)$ *и любого* $h\in H$ *выполняются следующие условия:*

1) $x+h-x=h$;

2) *для любой* n*-арной операции* $\omega\,(n\geq 2)$, *любых различных* $i,j=1,\dots,n$ $(i<j)$, *произвольных* $a_1\dots a_n\in A$ *справедливо*

$$(a_1\dots a_{i-1}\,h\,a_{i+1}\dots a_{j-1}xa_{j+1}\dots a_n)\omega=0,$$
$$(a_1\dots a_{i-1}\,x\,a_{i+1}\dots a_{j-1}ha_{j+1}\dots a_n)\omega=0.$$

Универсальная алгебра A называется мальцевской, если все её конгруэнции попарно перестановочны.

Определение 2 [1]. *Пусть* α *и* β *– конгруэнции на универсальной мальцевской алгебре* A. *Тогда* β *централизует* α *(записывается:* $\beta\subseteq C_A(\alpha)$*), если на* α *существует такая конгруэнция* $C(\alpha,\beta)$, *что*

1) *из* $(x,y)C(\alpha,\beta)(x',y')$ *всегда следует* $(x,x')\in\beta$;

2) $(x,x)C(\alpha,\beta)(y,y)$ *для любого* $(x,y)\in\beta$;

3) *если* $(x,x)C(\alpha,\beta)(x,y)$, *то* $x=y$.

Лемма 2. *Пусть* A *и* B *– нормальные подгруппы группы* G *и* $B\subseteq C_G(A)$. *Тогда* A *и* B *индуцируют на* G *соответственно конгруэнции* α *и* β *такие, что* $\beta\subseteq C_G(\alpha)$. *Обратно, если* α *и* β *– произвольные конгруэнции на группе* G *и* $\beta\subseteq C_G(\alpha)$, *то* α *и* β *индуцируют соответственно нормальные подгруппы* A *и* B *группы* G, *причем* $B\subseteq C_G(A)$.

Доказательство. Определим бинарное отношение $C(\alpha,\beta)$ на α следующим образом: $(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{C}(\alpha,\beta)(\mathrm{x}',\mathrm{y}')$ тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $a\in A$, $b\in B$, что справедливы равенства

$$yx^{-1}=y'x'^{-1}=a,\ x^{-1}x'=b.$$

Очевидно, что $C(\alpha,\beta)$ – отношение эквивалентности на α. Проверим, что $C(\alpha,\beta)$ – подгруппа группы α^2. Пусть $(x_iy_i)\,\mathrm{C}(\alpha,\beta)(x_i'y_i')$, $y_ix_i^{-1}=y_i'x_i'^{-1}=a_i\in A$, $x_i^{-1}x_i'=b_i\in B$, $i=1,2$. Тогда

$$y_1y_2(x_1x_2)^{-1}=y_1y_2x_2^{-1}x_1^{-1}=y_1a_2x_1^{-1}=a_1x_1a_2x_1^{-1}.$$

Аналогично

$$y_1'y_2'(x_1'x_2')^{-1}=a_1x_1'a_2x_1'^{-1}.$$

Так как $B\subseteq C_G(A)$, то

$$x_1'^{-1}x_1a_2x_1^{-1}x_1'=b_1^{-1}a_2b_1=a_2,\ \text{т.е.}\ x_1a_2x_1^{-1}=x_1'a_2x_1'^{-1}.$$

Следовательно, $y_1y_2(x_1x_2)^{-1}=y_1'y_2'(x_1'x_2')^{-1}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Далее $(x_1x_2)^{-1}x_1^{'}x_2^{'} = x_2^{-1}x_1^{-1}x_1^{'}x_2^{'} = x_2^{-1}b_1x_2b_2 = b_1^{'}b_2$, где $b_1^{'} = x_2^{-1}b_1x_2 \in B$.
Поэтому

$$(x_1x_2,\ y_1y_2)C(\alpha,\beta)(x_1^{'}x_2^{'},\ y_1^{'}y_2^{'}).$$

Легко проверить, что $C(\alpha,\beta)$ удовлетворяет условиям 1)–2) определения 2. Следовательно, $\beta \subseteq C_G(\alpha)$.

Обратно, пусть α,β – конгруэнции на группе G и $\beta \subseteq C_G(\alpha)$.

Тогда для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$, из определения 2 следуют следующие соотношения:

$$(1,a)C(\alpha,\beta)(1,a),$$
$$(1,1)C(\alpha,\beta)(b,b),$$
$$(1,a^{-1})C(\alpha,\beta)(1,a^{-1}).$$

Тогда $(1,1)C(\alpha,\beta)(b,ba^{-1})$, и так как $C(\alpha,\beta)$ транзитивно, то $(b,b)C(\alpha,\beta)(b,aba^{-1})$. Из определения 2 следует, что $b = aba^{-1}$, т.е. $B \subseteq C_G(\mathrm{A})$.

В настоящей работе доказывается следующий результат.

Пример. *Пусть B и C – идеалы мультикольца A и $C \subseteq C_A(B)$. Тогда, согласно лемме 1, B и C индуцируют на A соответственно конгруэнции β и γ, где*

$$\beta = \{(x,y) \in A^2 \mid y - x \in B\},\ \gamma = \{(x,y) \in A^2 \mid y - x \in C\} \text{ и } \gamma \subseteq C_A(\beta).$$

Определим бинарное отношение $C(\beta,\gamma)$ на β следующим образом: $(x,y)C(\beta,\gamma)(x',y')$ тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $b \in B$ и $c \in C$, что справедливы равенства

$$y - x = y' - x' = b,\ x' - x = c.$$

Очевидно, что $C(\beta,\gamma)$ – отношение эквивалентности на β, удовлетворяющее условиям 1)-3) определения 2, замкнутость которого относительно групповых операций доказана в лемме 2.

Пусть теперь ω – n-арная операция и $(x_i,y_i)C(\beta,\gamma)(x_i^{'},y_i^{'}),\ i = 1,\dots,n.$ Тогда $y_i - x_i = y_i^{'} - x_i^{'} = b$ и $x_i^{'} - x_i = c_i$; для любого $i = 1,\dots,n.$

Следовательно,

$$y_1^{'}\dots y_n^{'}\omega - x_1^{'}\dots x_n^{'}\omega = (x_1^{'} + b_1)\dots(x_n^{'} + b_n)\omega - x_1^{'}\dots x_n^{'}\omega =$$
$$= b_1\dots b_n\omega + \sum_{i=1}^{n} b_1\dots b_{i-1}x_i^{'}b_{i+1}\dots b_n\omega + \sum_{i,j=1,i<j}^{n} b_1\dots b_{i-1}x_i^{'}b_{i+1}\dots b_1\dots b_{j-1}x_j^{'}b_{j+1}\dots b_n\omega +$$
$$+ \dots + \sum_{i=1}^{n} x_1^{'}\dots x_{i-1}^{'}b_i x_{i+1}^{'}\dots x_n^{'}.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства значения $x_i^{'} = x_i + c_i$ и учитывая, что после раскрытия скобок члены, одновременно содержащие элементы c_i и b_j, равны нулю $(C \subseteq C_A(B))$, получаем в правой части равенства выражение

$$b_1\dots b_n\omega + \sum_{i=1}^{n} b_1\dots b_{i-1}x_i b_{i+1}\dots b_n\omega + \dots + \sum_{i=1}^{n} x_1\dots x_{i-1}b_i b_{i+1}\dots x_n = y_1\dots y_n\omega - x_1\dots x_n\omega.$$

Так как C идеал, то

$$x_1^{'}\dots x_n^{'}\omega - x_1\dots x_n\omega = (x_1 + c_1)\dots(x_n + c_n)\omega - x_1\dots x_n\omega =$$
$$= c_1\dots c_n\omega + \sum_{i=1}^{n} c_1\dots c_{i-1}\, x_i c_i\dots x_n\omega + \dots + \sum_{i=1}^{n} x_1\dots x_{i-1}c_i x_{i+1}\dots x_n\omega \in C.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Итак, $(x_1...x_n\omega,\ y_1...y_n\omega)C(\beta,\gamma)(x_1^{'}...x_n^{'}\omega,\ y_1^{'}...y_n^{'}\omega)$, т.е. $\gamma \subseteq C_A(\beta)$.

Пусть теперь β,γ – конгруэнции мультикольца A и $\gamma \subseteq C_A(\beta)$. Обозначим смежные классы по β и γ, являющиеся идеалами мультикольца, соответственно $B = \beta 0$ и $C = \gamma 0$. Возьмём произвольные элементы $b \in B,\ c \in C,\ a_1,...,a_n \in A$. Тогда

$$(0,b)C(\beta,\gamma)(0,b),$$
$$(0,0)C(\beta,\gamma)(c,c),$$
$$(a_i,a_i)C(\beta,\gamma)(a_i,a_i).$$

Следовательно, для любой n-арной операции $\omega \in \Omega\,(n \geq 2)$, любых различных $i, j = 1,...,n\ (i < j)$ получаем

$$(0,0)C(\beta,\gamma)(0, a_1...a_{i-1}ba_{i+1}...a_{j-1}ca_{j+1}...a_n\omega).$$

Из определения 2 теперь следует, что

$$a_1...a_{i-1}ba_{i+1}...a_{j-1}ca_{j+1}...a_n\omega = 0.$$

Нетрудно проверить, что справедливо и другое аналогичное равенство определения 1. Так как из леммы 2 следует, что $c + b - c = c$, то это означает, что $C \subseteq C_A(B)$.

Очевидно, что примеры, аналогичные приведенным выше, можно рассматривать для самых различных типов универсальных алгебр с перестановочными конгруэнциями. Отметим, в частности, что для n-арных групп эта задача решалась в работе [8].

Литература

1. Smith, J.D.H. Mal'cev Varieties / J.D.H. Smith // Lect. Notes. Math. – 1976. – V. 554. – 158 p.
2. Hagemann, J. A conerefe ideal multiplication for algebraic systems and its relation to congruence distributivity / J. Hagemann, C. Herrman // Arch. math. (Basel) 32. – 1979. – P. 234–245.
3. Herrman, C. Affine algebras in congruence modular varieties / C. Herrman // Acta. Sci. Math. (szeged) – Ч.1. – 1979. – P. 119–125.
4. Freese, R. Commutator theory for congruence modular varieties / R. Freese, R. Mekenzie // London Wath. Soc. Lecture Note – № 125. – 1987. – 227 p.
5. Скорняков, Л.А. Элементы общей алгебры / Л.А. Скорняков. – М. : Наука, 1983. – 272 с.
6. Курош, А.Г. Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1973. – 399 с.
7. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 256 с.
8. Ходалевич, А.Д. Формационные свойства нильпотентных алгебр / А.Д. Ходалевич // Вопросы алгебры. – Гомель : Изд-во Гомельского ун-та, 1992. – Вып. 7. – С. 76–85.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 16.10.2013

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ