

УДК 539.374

## Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины

Д.В. ЛЕОНЕНКО

Рассмотрен изгиб симметричной круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины. Для описания кинематики симметричного по толщине пакета используются гипотезы ломаной линии. Приведена постановка соответствующей краевой задачи. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Решение краевой задачи сведено к нахождению двух искоемых функций на каждом участке – прогиба и сдвига срединной плоскости заполнителя. Граничные условия соответствуют жесткому защемлению контура пластины. Проведен параметрический анализ полученного решения.  
**Ключевые слова:** сэндвич-пластина, изгиб, упругость, ступенчатая толщина.

The bending of symmetrical circular sandwich-plate of stepped thickness is considered. To describe kinematics of symmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken line are accepted. The formulation of the corresponding boundary value problem is presented. Equilibrium equations are obtained by the variational method of Lagrange. The solution of the boundary value problem is reduced to finding two required functions in each section - deflection and shear of the middle plane of the filler. The boundary conditions correspond to rigid pinching of the plate contour. A parametric analysis of the obtained solution is carried out.

**Keywords:** sandwich plate, bending, elasticity, step thickness.

**Введение.** Все более широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение) находят слоистые элементы конструкций, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета [1]. Динамическое и статическое деформирование трехслойных пластин и оболочек изучено в монографии [2]. Однослойные круглые пластины переменной толщины рассмотрены в работе [3]. Динамическое нагружение круговых трехслойных пластин постоянной толщины на упругом основании исследовано в статьях [4], [5]. Изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей рассмотрен в [6]. Здесь получено решение осесимметричного поперечного изгиба круговой сэндвич-пластины со ступенчатой толщиной.

**Постановка задачи.** Пластина состоит из трех слоев. Во внешних несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, во внутреннем слое (заполнителе) – гипотеза Тимошенко. Толщины несущих слоев равны между собой ( $h_{1l} = h_{2l} = h_l$ ) и могут изменяться вдоль радиуса пластины ступенчато (рисунок 1). Заполнитель ( $h_{3l} = 2c$ ) считаем легким, т. е. пренебрегаем его работой в тангенциальном направлении. В целом для пакета выполняется гипотеза ломаной линии. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. На границах слоев перемещения непрерывны.

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной со срединной плоскостью заполнителя. На внешнюю поверхность первого несущего слоя действует осесимметричные распределенные поперечные нагрузки  $q_1(r), q_2(r)$ . За искоемые величины принимаются прогиб пластины  $w_l(r)$  и относительный сдвиг в заполнителе  $\psi_l(r)$  на каждом участке  $l$ , которые не зависят от окружной координаты  $\varphi$ .

Исходя из принятых гипотез для каждого из двух участков радиальные перемещения в слоях  $u_{rl}^{(k)}$  выражаются через искоемые функции ( $l = 1, 2$  – номер участка):

$$u_{rl}^{(1)} = c\psi_l - zw_{l,r} \quad (c \leq z \leq c + h_l),$$

$$\begin{aligned} u_{r_l}^{(3)} &= z\psi_l - zw_{l,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_{r_l}^{(2)} &= -c\psi_l - zw_{l,r} \quad (-c - h_l \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемой точки до срединной плоскости заполнителя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

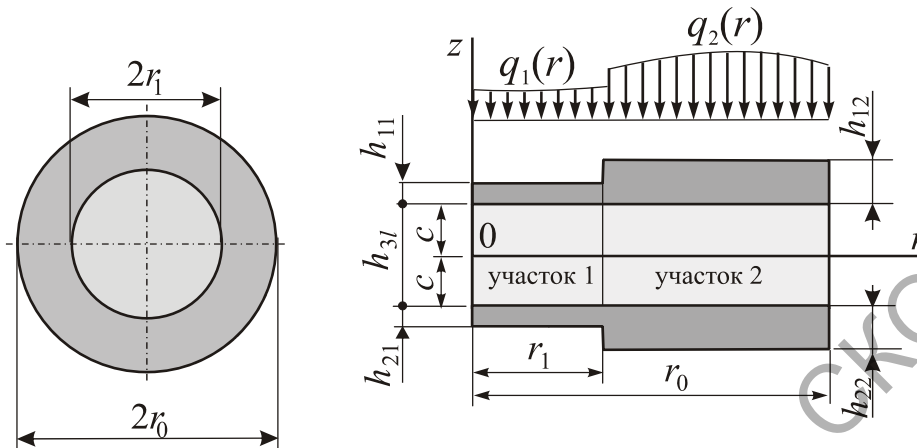


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

Деформации в слоях следуют из выражений (1) из соотношений Коши [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)l} &= c\psi_{l,r} - zw_{l,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(1)l} = \frac{1}{r}(c\psi_l - zw_{l,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)l} = 0; \\ \varepsilon_r^{(2)l} &= -c\psi_{l,r} - zw_{l,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)l} = -\frac{1}{r}(c\psi_l + zw_{l,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)l} = 0; \\ \varepsilon_r^{(3)l} &= z(\psi_{l,r} - w_{l,rr}), \quad \varepsilon_\varphi^{(3)l} = \frac{z}{r}(\psi_l - w_{l,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)l} = \frac{1}{2}\psi_l. \end{aligned} \quad (2)$$

Усилия и напряжения в слоях пластины связаны интегральными соотношениями:

$$M_\alpha^{(k)l} = \int_{h_{kl}} \sigma_\alpha^{(k)l} z dz; \quad T_\alpha^{(k)l} = \int_{h_{kl}} \sigma_\alpha^{(k)l} dz. \quad (3)$$

Уравнения равновесия пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где  $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$  – вариация суммарной работы внешних нагрузок  $q_l(r)$  и контурных усилий  $H_r^0$ ,  $M_r^0$ ,  $Q^0$

$$\delta A_1 = \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} q_1 \delta w_1 r dr d\varphi + \int_{r_1}^{r_0} \int_0^{2\pi} q_2 \delta w_2 r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \int_0^{2\pi} (H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\varphi,$$

$\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \sum_{l=1}^2 \iint_{S_l} \left( \sum_{k=1}^3 \int_{h_{kl}} (\sigma_r^{(k)l} \delta \varepsilon_r^{(k)l} + \sigma_\varphi^{(k)l} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)l}) dz \right) dS. \quad (5)$$

Здесь интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя на каждом участке  $S_1$ ,  $S_2$ .

Подставив выражение (5) в формулу (4) с учетом деформаций (2), перемещений (1) и внутренних усилий (3), получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую упругое деформирование круговой трехслойной пластины с легким заполнителем ступенчато-переменной толщины:

$$H_{r,r}^l + \frac{1}{r}(H_r^l - H_\varphi^l) = 0, \quad M_{r,rr}^l + \frac{1}{r}(2M_{r,r}^l - M_{\varphi,r}^l) = -q_l, \quad (6)$$

и граничные условия на контуре ( $r = r_0$ )

$$H_r^2 = H_r^0, \quad M_r^2 = M_r^0, \quad M_{r,r}^2 + \frac{1}{r}(M_r^2 - M_\phi^2) = Q^0. \quad (7)$$

Здесь обобщенные силы и моменты ( $\alpha = r, \phi$ ):

$$M_\alpha^l \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)l}, \quad H_\alpha^l = M_\alpha^{(3)l} + c(T_\alpha^{(1)l} - T_\alpha^{(2)l}), \quad Q_r^l = M_{r,r}^l + \frac{1}{r}(M_r^l - M_\phi^l). \quad (8)$$

**Решение задачи.** После выражения внутренних усилий (8) через искомые перемещения (1) и подстановки их в (6), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях для каждого участка:

$$\psi_l = \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r} + C_{1l} r + C_{2l} / r, \quad w_{l,rrrr} + \frac{2}{r} w_{l,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{l,rr} + \frac{1}{r^3} w_{l,r} = \frac{q_l}{D}, \quad D_l = b_{3l} - \frac{b_{2l}^2}{b_{1l}} \quad (9)$$

где  $C_{1l}, C_{2l}$  – константы интегрирования.

Коэффициенты  $b_{il}$  на каждом участке  $l$

$$b_{1l} = 2c^2 \left( h_l \left( K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c \left( K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right),$$

$$b_{2l} = 2c \left[ h_l \left( c + \frac{1}{2} h_l \right) \left( K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c^2 \left( K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right],$$

$$b_{3l} = 2h_l \left( c^2 + ch_l + \frac{1}{3} h_l^2 \right) \left( K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{2}{3} c^3 \left( K_f + \frac{4}{3} G_f \right),$$

где  $K_b, G_b$  – модули объемной деформации и сдвига материала несущих слоев,  $K_f, G_f$  – модули объемной деформации и сдвига материала заполнителя.

Для определения перемещений в каждой точке пластины необходимо решить дифференциальные уравнения (9) на каждом из участков. Тогда искомые перемещения будут

$$\psi(r) = \psi_1(r) + (\psi_2(r) - \psi_1(r)) H_0(r - r_1),$$

$$w(r) = w_1(r) + (w_2(r) - w_1(r)) H_0(r - r_1), \quad (10)$$

где  $H_0(r)$  – функция Хевисайда [8].

Решение системы (9) принимает вид [9]

$$\psi_l = \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r} + C_{1l} r + C_{2l} / r,$$

$$w_l = C_{3l} + C_{4l} r^2 + C_{5l} \ln(r) + C_{6l} r^2 \ln(r) + w_l^*, \quad w_l^* = \frac{1}{D_l} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int q_l r dr dr dr dr,$$

$$w_{l,r} = 2C_{4l} r + C_{5l} \frac{1}{r} + C_{6l} (2r \ln(r) + r) + w_{l,r}^*, \quad w_{l,r}^* = \frac{1}{D_l r} \int r \int \frac{1}{r} \int q_l r dr dr dr dr \quad (11)$$

Задача отыскания функций  $\psi(r), w(r)$  (10) замыкается присоединением к (9) граничных условий. При жесткой заделке контура пластины ( $r = r_0$ )

$$\psi_2 = w_2 = w_{2,r} = 0. \quad (12)$$

Кроме этого, должны быть удовлетворены условия конечности перемещений в начале координат при  $r = 0$  и условия на границе изменения толщин при  $r = r_1$ :

– кинематические условия

$$w_1(r_1) = w_2(r_1), \quad w_{1,r}(r_1) = w_{2,r}(r_1), \quad \psi_1(r_1) = \psi_2(r_1);$$

– силовые граничные условия

$$M_r^1 = M_r^2, \quad H_r^1 = H_r^2, \quad Q_r^1 = Q_r^2. \quad (13)$$

Покажем процесс определения констант интегрирования на каждом участке.

В связи с ограниченностью предполагаемого решения ( $w_1, \psi_1, Q_r^1$ ) в начале координат ( $r = 0$ ) необходимо положить

$$C_{51} = 0, \quad C_{61} = 0, \quad C_{21} = -\frac{b_{2l}}{b_{1l}D_l} \int r \int \frac{1}{r} \int q_1 r dr dr dr \Big|_{r=0}. \quad (14)$$

Условия жесткого закрепления на контуре (12) принимают вид:

$$\begin{aligned} w_{2,r} &= \left( 2C_{42}r + C_{52} \frac{1}{r} + C_{62}(2r \ln(r) + r) + w_{2,r}^* \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \\ 2C_{42}r_0 + C_{52} \frac{1}{r_0} + C_{62}r_0(2 \ln(r_0) + 1) + w_{2,r}^* &\Big|_{r=r_0} = 0; \\ \Psi_2 &= \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{2,r} + C_{12}r + \frac{C_{2l}}{r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad C_{12}r_0 + \frac{C_{22}}{r_0} = 0; \\ w_2 &= \left( C_{32} + C_{42}r^2 + C_{52} \ln(r) + C_{62}r^2 \ln(r) + w_2^* \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \\ C_{32} + C_{42}r_0^2 + C_{52} \ln(r_0) + C_{62}r_0^2 \ln(r_0) + w_2^* &\Big|_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

На границе изменения толщин ( $r = r_1$ ) потребуем выполнения кинематических граничных условий (13)

$$\begin{aligned} w_1(r_1) &= w_2(r_1), \\ C_{31} + C_{41}r_1^2 + C_{51} \ln(r_1) + C_{61}r_1^2 \ln(r_1) + w_1^* &\Big|_{r=r_1} = C_{32} + C_{42}r_1^2 + C_{52} \ln(r_1) + C_{62}r_1^2 \ln(r_1) + w_2^* \Big|_{r=r_1}; \\ w_{1,r}(r_1) &= w_{2,r}(r_1), \\ 2C_{41}r_1 + C_{51} \frac{1}{r_1} + C_{61}(2r_1 \ln(r_1) + r_1) + w_{1,r}^* &\Big|_{r=r_1} = 2C_{42}r_1 + C_{52} \frac{1}{r_1} + C_{62}(2r_1 \ln(r_1) + r_1) + w_{2,r}^* \Big|_{r=r_1}; \\ \Psi_1(r_1) &= \Psi_2(r_1), \quad \left( \frac{b_{21}}{b_{11}} w_{1,r} - \frac{b_{22}}{b_{12}} w_{2,r} \right) \Big|_{r=r_1} + (C_{11} - C_{12})r_1 + (C_{21} - C_{22}) \frac{1}{r_1} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для формулировки силовых граничных условий (13) выразим обобщенные усилия через искомые перемещения

$$\begin{aligned} M_r^l &= b_{2l} \Psi_{l,r} + b_{2l}^- \frac{\Psi_l}{r} - b_{3l} w_{l,rr} - b_{3l}^- \frac{w_{l,r}}{r}, \quad H_r^l = b_{1l} \Psi_{l,r} + b_{1l}^- \frac{\Psi_l}{r} - b_{2l} w_{l,rr} - b_{2l}^- \frac{w_{l,r}}{r}, \\ Q_r^l &= b_{2l} \left( \Psi_{l,rr} + \frac{\Psi_{l,r}}{r} - \frac{\Psi_l}{r^2} \right) - b_{3l} \left( w_{l,rrr} + \frac{w_{l,rr}}{r} - \frac{w_{l,r}}{r^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_{1l}^- &= 2c^2 \left( h_l \left( K_b - \frac{2}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c \left( K_f - \frac{2}{3} G_f \right) \right), \\ b_{2l}^- &= 2c \left[ h_l \left( c + \frac{1}{2} h_l \right) \left( K_b - \frac{2}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c^2 \left( K_f - \frac{2}{3} G_f \right) \right], \\ b_{3l}^- &= 2h_l \left( c^2 + ch_l + \frac{1}{3} h_l^2 \right) \left( K_b - \frac{2}{3} G_b \right) + \frac{2}{3} c^3 \left( K_f - \frac{2}{3} G_f \right). \end{aligned}$$

С учетом выражений (13) получим еще 3 алгебраических уравнения для определения неизвестных констант интегрирования. В силу своей громоздкости они здесь не приводятся.

Объединяя выражения (14)–(16), получим систему линейных алгебраических уравнений 12 порядка, из которой определим константы интегрирования  $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{26}$ .

Таким образом, решение (11) с константами интегрирования (14)–(16) описывает упругие перемещения в круговой трехслойной симметричной пластине ступенчато-переменной толщины при жестком защемлении контура.

Напряжения в слоях пластины вычисляются в соответствии с законом Гука [7]

$$\sigma_r^{(k)l} = (K_k + \frac{4}{3}G_k)\varepsilon_r^{(k)l} + (K_k - \frac{2}{3}G_k)\varepsilon_\varphi^{(k)l}, \quad \sigma_\varphi^{(k)l} = (K_k - \frac{2}{3}G_k)\varepsilon_r^{(k)l} + (K_k + \frac{4}{3}G_k)\varepsilon_\varphi^{(k)l}.$$

Численное исследование проводилось для сэндвич-пластины с несущими слоями из сплава Д16Т и заполнителем фторопластом, упругие константы для которых взяты из [2]. На рисунке 2 показано изменение максимального сдвига и максимального прогиба срединного слоя пластины от координаты границы изменения толщины  $r_1$ :  $l - h_1 = 0,02$ ,  $h_2 = 0,03$ ,  $c = 0,2$ ;  $l - h_1 = 0,03$ ,  $h_2 = 0,02$ ,  $c = 0,2$ . С увеличением жесткости пластины перемещения уменьшаются, причем равенство перемещений достигается при  $r_1 = 0,415 r_0$ .

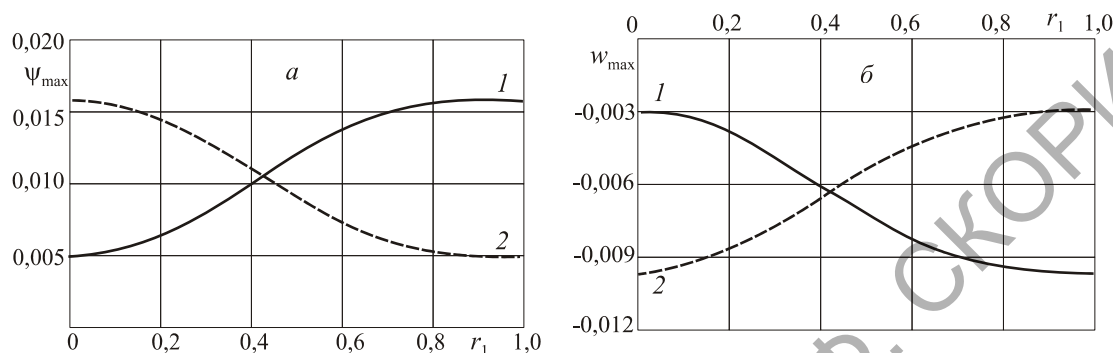


Рисунок 2 – Зависимость максимального сдвига (а) и максимального прогиба (б) пластины от длины ступеньки  $r_1$

**Заключение.** Предложенная методика позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние трехслойных симметричных круговых пластин ступенчато-переменной толщины.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.*

### Литература

1. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – Москва : Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Коваленко, А. Д. Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – Москва : Физматгиз, 1959. – 294 с.
4. Леоненко, Д. В. Свободные колебания трехслойной круговой пластины на инерционном основании при действии температуры / Д. В. Леоненко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2019. – № 6 (117). – С. 174–179.
5. Леоненко, Д. В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 3. – С. 42–47.
6. Старовойтова, Е. Э. Напряженное состояние металлополимерного трехслойного стержня прямоугольного сечения со ступенчато-переменной границей / Е. Э. Старовойтова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 1 (10). – С. 58–62.
7. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975 – 872 с.
8. Корн, Г. Справочник по математике для инженерных работников / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1973. – 832 с.
9. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва : Наука, 1976. – 576 с.