



Диффузия плазмы в магнитном поле, обусловленная кулоновскими соударениями

С. Г. Алиханов, В. Е. Захаров, Г. Л. Хорасанов

С помощью сверхвысокочастотной методики изучалась диффузия распадающейся гелиевой плазмы. Исследования проводились при параметрах, когда диффузионный поток поперек магнитного поля обуславливался электрон-ионными столкновениями. Измеренные коэффициенты диффузии в магнитных полях напряженностью до 700—800 э согласуются с коэффициентами, выведенными на основе классической теории парных кулоновских соударений. В диапазоне магнитных полей 1000—5000 э наблюдается значительное отклонение от теории, причем коэффициент диффузии пропорционален $1/H$. Найдено асимптотическое решение уравнения диффузии, описывающего распадающуюся полностью ионизованную плазму в осесимметричном случае.

Введение

В последнее время большой интерес вызывает вопрос о характере диффузии полностью ионизованной плазмы в магнитном поле. В связи с этим ставятся опыты с термически равновесной цезиевой плазмой [1, 2]. Однако коэффициенты, определяющие диффузию в полностью ионизованной плазме, могут быть измерены и при существенно малых степенях ионизации, если создать такие условия, при которых кулоновские столкновения будут играть основную роль в установлении диффузионного потока поперек магнитного поля. Эти условия можно получить в распадающейся плазме благодаря тому, что при достаточно низких температурах электронного газа сечение столкновений электронов с ионами на много порядков больше сечения столкновений электронов с нейтральными атомами [3, 4].

Зависимость области диффузии, обусловленной кулоновскими столкновениями в трехкомпонентной плазме, от концентрации электронов n и напряженности магнитного поля показана на рис. 1. Рассмотрен характерный случай распада гелиевой плазмы, образованной импульсным сверхвысокочастотным разрядом. Нижнее значение концентрации определяется равенством частот столк-

новений электронов с ионами и электронов с нейтральными атомами. Верхняя граница отделяет область кулоновской диффузии от

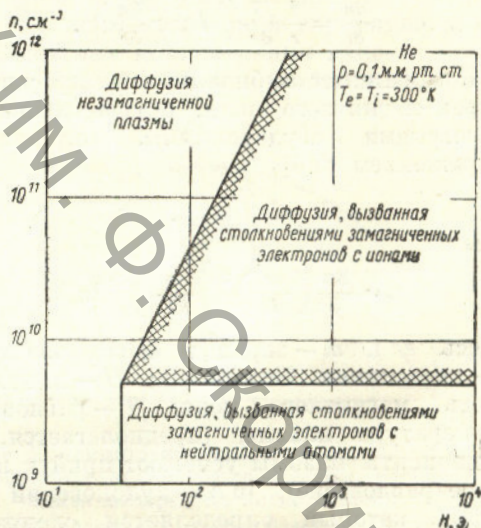


Рис. 1. Диаграмма типов диффузии в трехкомпонентной плазме.

области диффузии, определяемой столкновениями ионов с нейтральными атомами. Этот переход осуществляется тогда, когда коэффициент кулоновской диффузии поперек маг-

нитного поля D_{ei}^{\perp} возрастает с увеличением концентрации электронного газа настолько, что он становится сравнимым с коэффициентом диффузии в отсутствие магнитного поля D_{ia}^{\parallel} . Как видно из рис. 1, имеется довольно значительная область диффузии, обусловленная кулоновскими столкновениями, доступная для экспериментирования.

Теория эксперимента

Изменение концентрации заряженных частиц плазмы, в которой отсутствуют объемные процессы (ионизация, рекомбинация и т. д.), описывается обычным уравнением диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla (D \nabla n). \quad (1)$$

Исследование распада плазмы проводилось в длинной тонкой трубке ($L \gg R$), находящейся в постоянном продольном магнитном поле.

При $\frac{D_{ei}^{\perp}}{R^2} \gg \frac{D_{ia}^{\parallel}}{L^2}$, что выполняется достаточно хорошо в описываемом эксперименте, потоками вдоль оси можно пренебречь и уравнение диффузии в цилиндрическом случае запишется в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_{ei}^{\perp} r \frac{\partial n}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Коэффициент амбиполярной диффузии поперек магнитного поля, обусловленный кулоновскими соударениями, определяется выражением [5,6]

$$D_{ei}^{\perp} = \alpha n, \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{ce}{H} \right)^2 \left(\frac{m}{kT} \right)^{1/2} \ln \Lambda.$$

Здесь e и m — заряд и масса электрона; k — постоянная Больцмана; H — напряженность магнитного поля; T — равновесная температура плазмы (предполагается, что компоненты плазмы успевают прийти в тепловое равновесие); $\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм, который определяется следующим образом [6]:

$$\ln \Lambda = \ln \left[\frac{3}{2} \frac{1}{e^3} \left(\frac{k^2 T^3}{\pi n} \right)^{1/2} \right]. \quad (4)$$

В нашем случае величину α с достаточно хорошей степенью точности можно считать не зависящей от координат и времени.

Переходя к безразмерным переменным

$$y = \frac{n}{N_0}; \quad x = \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{t}{\tau_0}; \quad \tau_0 = \frac{R^2}{\alpha N_0}; \quad (5)$$

$$N_0 = n|_{r=0, t=0},$$

запишем уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(xy \frac{\partial y}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Для уравнения (6) ставятся граничные условия

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad y|_{x=1} = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда по четным степеням x :

$$y = y_0 + y_1 x^2 + \dots + y_k x^{2k} + \dots \quad (8)$$

(легко показать, что в силу условия $\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ коэффициенты при нечетных степенях обратятся в нуль).

Для функций $y(\tau)$ получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} &= 4y_0 y_1; \\ \frac{\partial y_1}{\partial \tau} &= 8(2y_0 y_2 + y_1^2); \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial y_k}{\partial \tau} &= 2(k+1)^2 \sum_{i=0}^{k+1} y_i y_{k+1-i}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Теперь произвольно задавая $y_0(\tau)$, получим последовательно все $y_k(\tau)$. Исследуем возможный асимптотический вид функции $y_0(\tau)$.

Если $y_0(\tau) \sim e^{-\nu \tau}$, то $y_k(\tau)$ начиная с $k=2$ отрицательны и экспоненциально растут при больших τ . Следовательно, $y_0(x, \tau)$ при некоторых значениях x растет при $\tau \rightarrow \infty$, что физически бессмысленно.

Пусть $y_0(\tau) = a\tau^q$. Тогда можно показать методом индукции, что $y_k(\tau) = \beta_k \tau^{-k(1+q)+q} a^{1-k}$, где β_k не зависит от a . При этом ряд (8) можно свернуть в виде функции:

$$y(x, \tau) = a\tau^q G\left(\frac{x^2}{a\tau^{1+q}}\right), \quad (10)$$

где G — некая функция.

Если $q \neq -1$, то решениями типа (10) невозможно удовлетворить граничным условиям. Действительно,

$$y|_{x=1} = a\tau^q G\left(\frac{1}{a\tau^{1+q}}\right) = 0 \text{ при всех } \tau, \text{ т. е. } y \equiv 0.$$

В случае $q = -1$

$$y(x, \tau) = \frac{a}{\tau} F\left(\frac{x^2}{a}\right). \quad (11)$$

Функцию F можно найти из уравнений (9) в виде ряда

$$F = 1 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4}{64} - \frac{\lambda^6}{288} - \frac{\lambda^8}{1024} - \dots, \quad (12)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{x^2}{a}.$$

Эта функция положительна для достаточно малых λ и равна нулю при $\lambda = \lambda_0$.

При $F=0$ ряд (12) сходится весьма медленно, так что непосредственно из него трудно найти λ_0 . Чтобы найти λ_0 , подставим $y = \frac{1}{\tau} F(x^2)$ в уравнение (6). Для функции F получим уравнение

$$-F = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} F^2 \right). \quad (13)$$

Умножим это уравнение на $2x$ и проинтегрируем в пределах $(0, x)$, затем разделим на x и проинтегрируем в пределах $(0, \lambda_0)$. Получим

$$-2 \int_0^{\lambda_0} \frac{dx}{x} \int_0^x x F dx = F^2|_{\lambda_0} = -1.$$

Подставляя сюда F в виде ряда (12), получим уравнение для λ_0 :

$$-1 + \frac{\lambda_0^2}{2} - \frac{\lambda_0^4}{32} - \frac{\lambda_0^6}{1152} - \frac{\lambda_0^8}{9216} - \dots = 0. \quad (14)$$

Этот ряд сходится достаточно быстро. Ограничиваясь первыми тремя членами, найдем, что $\lambda_0^2 = 2,4$. Следующие члены дают поправку $\sim 1\%$.

Чтобы удовлетворить граничным условиям, мы должны положить $a = \frac{1}{\lambda_0^2}$. Окончательно получим

$$y(x, \tau) = \frac{1}{\lambda_0^2 \tau} F(\lambda_0^2 x^2). \quad (15)$$

Исследование функции $F(x)$ показывает, что вблизи точки $x=1$ она имеет вид $F \simeq \text{const} \sqrt{1-x}$ так, что $\frac{\partial F}{\partial x}|_{x=1} = \infty$. Это имеет простой физический смысл.

Вблизи $x=1$ концентрация равна нулю и для существования не равного нулю потока необходимо, чтобы градиент концентрации был бесконечным.

По-видимому, широкий класс физически разумных решений краевой задачи (7) для уравнения (6) будет иметь такое же асимптотическое поведение. Это связано с тем фактом, что в областях пространства, где n велико, происходит быстрое выравнивание концентрации, тогда как у стенок устанавливается бесконечный градиент.

Заметим, что функция

$$y(x, \tau) = \frac{1}{\lambda_0^2 \tau + C} F(\lambda_0^2 x^2),$$

где C — произвольная константа — является точным решением уравнения (6) при граничных условиях (7) и начальном условии

$$y(x, \tau)|_{\tau=0} = \frac{1}{C} F(\lambda_0^2 x^2).$$

В частности, при $C=1$ получается функция, описывающая процесс диффузии, когда начальная концентрация на оси трубки равна N_0 . В этом случае изменение концентрации на оси трубки $n_0(t)$ задается формулой

$$\frac{1}{n_0(t)} - \frac{1}{N_0} = \frac{\alpha t}{\Lambda^2}, \quad (16)$$

где $\Lambda^2 = \frac{R^2}{2,4}$ — квадрат диффузионной длины.

На рис. 2 дан вычисленный с помощью ряда (12) асимптотический вид радиального распределения концентрации плазмы в случае диффузии поперек магнитного поля,

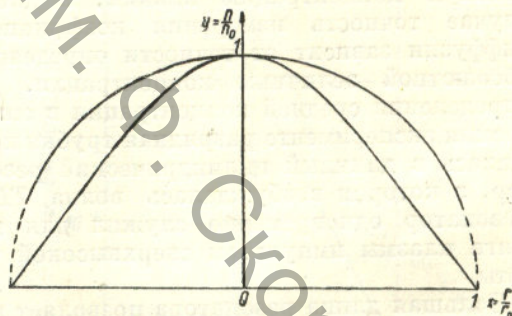


Рис. 2. Асимптотический вид радиального распределения концентрации плазмы, распадающейся поперек магнитного поля: верхняя кривая — $D_{\perp} = \alpha n$, нижняя — $D_{\perp} = \text{const}$.

вызванной кулоновскими соударениями. Для сравнения там же показано распределение концентрации плазмы в случае, когда коэффициент диффузии не зависит от концентрации заряженных частиц (нижняя кривая $y = J_0(\alpha_{01}x)$).

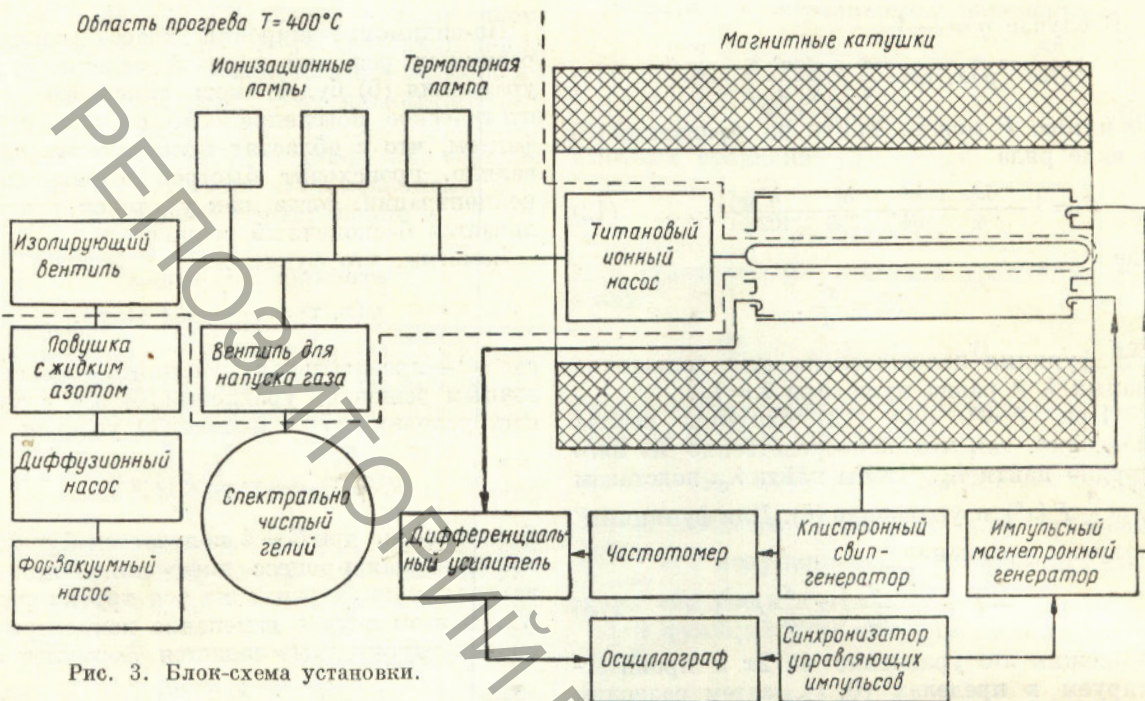


Рис. 3. Блок-схема установки.

Методика эксперимента

В отличие от измерений коэффициента диффузии (вызванной столкновениями заряженных частиц с нейтральными), для определения которого достаточно знать относительную концентрацию плазмы, в данном случае точность измерения коэффициента диффузии зависит от точности определения абсолютной величины концентрации. Для определения средней концентрации в описываемом эксперименте разрядная трубка помещалась в длинный цилиндрический резонатор, в котором возбуждалась волна TH_{01} . Резонатор одновременно служил для поджига плазмы импульсом сверхвысокой частоты.

Большая длина резонатора позволяет пренебречь влиянием концевых эффектов при расчете взаимодействия измерительной сверхвысокочастотной волны со столбом плазмы, а также дает возможность получать равномерный поджиг плазмы по всей длине трубки. Схема установки показана на рис. 3, подробное описание аппаратуры приведено в работе [7].

Определение коэффициента перехода от величины сдвига собственной частоты резо-

натора с плазмой к концентрации плазмы требует аналитического исследования взаимодействия TH_{01} волны с плазмой в магнитном поле.

Однако, учитывая то обстоятельство, что радиус плазмы в наших экспериментах мал по сравнению с радиусом резонатора, поперечными компонентами электрического поля можно пренебречь. Такое допущение возможно при $k_{\parallel} < k_{\perp}$ и $\omega \neq \omega_{ce}$, где $k_{\parallel} = \frac{l\pi}{L_0}$;

$k_{\perp} = \frac{\kappa_{01}}{R_0}$ (L_0 и R_0 — длина и радиус резонатора; κ_{01} — первый корень нулевой функции Бесселя); ω — собственная частота резонатора; ω_{ce} — циклотронная частота электронов.

В таком случае сдвиг собственной частоты резонатора в присутствии плазмы выражается обычной формулой, полученной с помощью теории возмущений [8]:

$$\Delta\omega = -\frac{1}{2\omega} \frac{\int_{\text{плазма}} \omega_0^2 E^2 dV}{\int_{\text{резонатор}} E^2 dV} \quad (17)$$

где ω_0 — плазменная частота.

Подставляя в формулу (17) выражения для распределения концентрации (12) и распре-

деления электрического поля TH_{01} волны, получим

$$\Delta\omega = -\frac{4e^2 n_0}{m\omega} \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{L_0} J_0^2(k_{\perp} r) \cos^2(k_{\parallel} z) \left[1 - \frac{3}{5} \frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{80} \frac{r^4}{R^4} - \dots \right] r dr d\varphi dz}{L_0 R_0^2 J_1(x_{01})} \quad (18)$$

Интегрируя для выбранных параметров эксперимента $R_0 = 4,25$ см, $L_0 = 75$ см, $R = 0,8$ см и $\omega = 2\pi \cdot 3,24 \cdot 10^9$ сек⁻¹, получим

$$n_0 = 2,1 \cdot 10^{12} \Delta\omega. \quad (19)$$

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Измерения концентрации распадающейся плазмы производились в диапазоне $10^{10} - 10^{11}$ см⁻³. Нижний предел измеряемых концентраций определялся границей области кулоновской диффузии (см. рис. 1), а верхний — временем остывания электронного газа и возможностями экспериментальной аппаратуры. Эксперименты проводились в стеклянной трубке, заполненной спектрально чистым гелием при давлении $5 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-1}$ мм рт. ст. Предварительно система длительное время обезгаживалась при температуре 400° С, после чего остаточный вакуум в системе был порядка 10^{-9} мм рт. ст. Кроме того, стенки трубки тренировались сверхвысокочастотным разрядом в условиях циклотронного резонанса электронов.

Некоторые из прямых, по которым определялись значения коэффициентов диффузии, приведены на рис. 4. Поскольку экспериментально наблюдаемое изменение концентрации во времени хорошо описывается уравнением (16), то несомненно, что процесс устранения заряженных частиц имеет квадратичную зависимость от их концентрации.

Расхождение с формулой (16) в начале распада (экстраполяция кривых $kt=0$ дает $N_0 < 0$) вызвано тем, что в начальном периоде распада плазмы, образованной сверхвысокочастотным пробоем, происходят такие процессы, как существенное изменение формы распределения плотности плазмы, охлаждение электронного газа и т. д., которые не описываются формулой (16).

На рис. 5 точками изображены измеренные значения коэффициентов α в зависи-

мости от напряженности магнитного поля. Сплошная линия на том же рисунке соот-

ветствует формуле (3) для коэффициента диффузии полностью ионизованного газа.

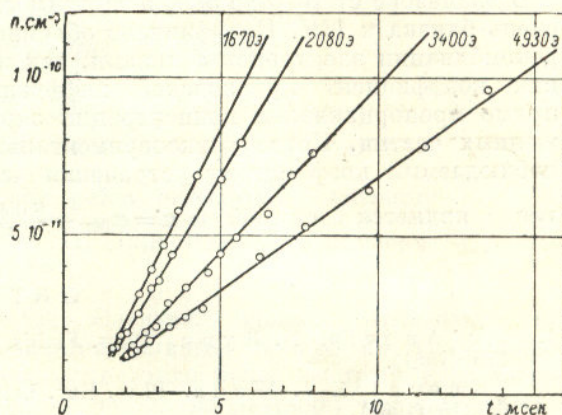


Рис. 4. Типичные экспериментальные прямые.

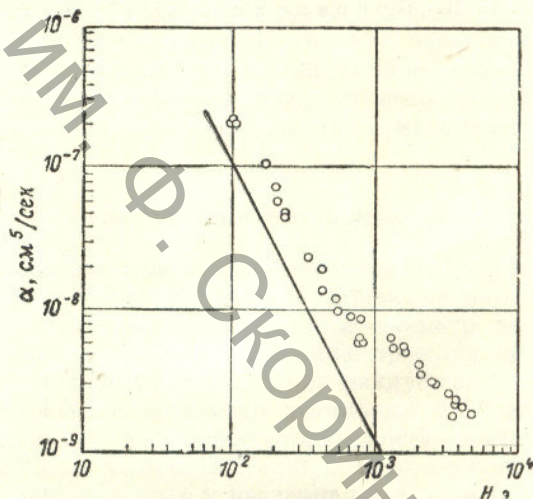


Рис. 5. Изменение коэффициента диффузии с напряженностью магнитного поля: точки — эксперимент; сплошная линия — теория Спитцера—Брагинского [5, 6].

Из рассмотрения экспериментальных результатов следует, что до напряженностей

магнитного поля 700—800 э наблюдается зависимость $D_{ei}^{\perp} \sim \frac{1}{H^2}$. Некоторое отклонение абсолютной величины коэффициента диффузии от теоретического значения, возможно, вызвано систематической ошибкой в определении концентрации. Произведенная оценка погрешности метода дает величину ошибки в пределах $\pm 30\%$, что несколько меньше наблюдаемого расхождения.

В диапазоне от 4000 до 5000 э зависимость очень близка к $1/H$. Коэффициент объемной рекомбинации электронов с ионами, так же как коэффициент кулоновской диффузии, прямо пропорционален концентрации заряженных частиц. Поэтому экспериментально наблюдаемый коэффициент устранения частиц является суммой $\alpha = \alpha_{рек} + \frac{\alpha_{диф}}{\Lambda^2}$.

Исходя из этих соображений, отклонение коэффициента α при $H > 1000$ э от теоретической зависимости ($\alpha_{диф} \sim \frac{1}{H^2}$) можно было бы легко объяснить влиянием объемных рекомбинаций (например, вида $He_2^+ + e$), если бы не удивительно близкая к $1/H$ зависимость от магнитного поля. В этом случае необходимо делать какие-то искусственные предположения о зависимости $\alpha_{рек}$ от напряженности магнитного поля.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность И. Ф. Кварцхава за поддержку и интерес к работе, Р. З. Сагдееву за полезное обсуждение теоретической части, а также Г. Г. Подлесному за помощь в осуществлении эксперимента.

Поступила в Редакцию 10/II 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. D' Angelo, N. Rynn. Phys. Fluids, 4, 275 (1961).
2. R. Knechtli, J. Wada. Phys. Rev. Lett., 6, 215 (1961).
3. A. Dougal, L. Goldstein. Phys. Rev., 109, 615 (1958).
4. В. Е. Голант, А. П. Жилинский. «Ж. техн. физ.», 30, 745 (1960).
5. С. И. Брагинский. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 178.
6. Л. Спитцер. Физика полностью ионизованного газа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
7. С. Г. Алиханов и др. «Ж. техн. физ.», 32, 1205 (1962).
8. Г. Сул, Л. Уокер. Вопросы волнового распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. М., Изд-во иностр. лит., 1955.



Ф. СКОРИНЫ