

## Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия

А. А. Галеев, С. С. Мусеев, Р. З. Сагдеев

Дан обзор теории устойчивости плазмы малого давления ( $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$ ), удерживаемой магнитным полем, относительно раскачки «дрейфовых» волн, связанных с неоднородностью плазмы. В первой части рассмотрены дрейфовые волны в низкотемпературной плазме, когда справедливо ее гидродинамическое описание. Показано, что важную роль в устойчивости плазмы играют диссипативные эффекты (в частности, эффект конечного электрического сопротивления). На базе строгой линейной теории устойчивости проведено полуквантовое рассмотрение нелинейных эффектов в неустойчивой плазме и аномальной диффузии. На этом пути удалось получить естественное объяснение явления бомовской диффузии и «критического» значения магнитного поля. Результаты сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

Во второй части статьи рассмотрены дрейфовые волны в высокотемпературной плазме. Анализ линейной теории устойчивости проведен с помощью кинетического уравнения без столкновений. Для учета влияния дрейфовых волн на диффузию частиц в неустойчивой плазме использован квазилинейный метод.

### Введение

Различные стороны теории устойчивости магнитного удержания плазмы, в частности и такая хорошо изученная проблема, как, например, устойчивость плазмы в модели идеальной магнитогидродинамической среды, к настоящему времени уже вошли в монографии [1] и обзоры [2]. Можно сказать, что основная причина, приводящая к неустойчивости магнитогидродинамического равновесия плазмы, — «эффективное» ускорение силы тяжести, причем в отсутствие реальной силы тяжести оно возникает из-за кривизны силовых линий магнитного поля.

Экспериментальные результаты по изучению устойчивости плазмы, однако, не всегда можно объяснить в рамках идеализированных теоре-

тических моделей. Поэтому в последние годы интенсивно изучались вопросы, связанные с влиянием диссипативных эффектов на устойчивость плазмы. На этом пути была создана, например, теория устойчивости так называемого положительного столба газового разряда, давшая возможность объяснить ряд аномальных явлений в области низкотемпературной слабоионизованной плазмы [3], когда причиной неустойчивости был электрический ток, идущий вдоль силовых линий магнитного поля, в которое помещалась плазма.

Однако до последнего времени оставался неразгаданным своего рода «experimentum crucis» магнитного удержания — явление так называемой аномальной бомовской диффузии плазмы поперек магнитного поля. В 1949 г. было экспериментально обнаружено [4], что коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля существенно превышает значение, получаемое из классической кинетической теории. Бом предположил, что причина такой аномалии — неустойчивость неизвестной природы, приводящая к переходу плазмы в турбулентное состояние, и постулировал, что коэффициент аномальной диффузии

$$D_{\perp} = \frac{cT}{16eH}, \quad (1)$$

где  $H$  — напряженность магнитного поля;  $T$  — температура плазмы;  $c$  — скорость света в вакууме;  $e$  — заряд электрона. С тех пор многочисленные попытки установить природу неустойчивости и характер вызываемой ею турбулентности не привели к разъяснению этой аномалии (в лучшем случае за счет привлечения дополнительных гипотез удавалось получить численно (!) близкие значения коэффициента

диффузии в определенных условиях [5]). С другой стороны, непрекращающиеся эксперименты по изучению диффузии плазмы (см. [6]) часто приводили к противоречивым результатам, иногда обнаруживая удовлетворительное согласие с классической теорией. Мы покажем, в частности, что в полностью ионизованной плазме малого давления, помещенной в сильное магнитное поле ( $H^2 \gg 8\pi p$ , где  $p$  — давление плазмы), действительно существует неустойчивость, когда магнитное поле имеет прямые силовые линии и однородно по длине. Единственная причина такой неустойчивости — наличие градиента плотности плазмы. Рассмотрение турбулентности, возникающей вследствие такой неустойчивости, приведет к коэффициенту диффузии, близкому к (1). Будет показано также, что закон (1) не является универсальным и что существуют режимы, в которых коэффициент диффузии может меняться, в частности, пропорционально  $1/H^2$ .

Известно, что термодинамически неравновесная плазма неустойчива по отношению к возбуждению различного рода колебаний. Такие колебания часто оказывают существенное влияние на перераспределение частиц в пространстве скоростей и обычном пространстве. В однородной плазме, помещенной в магнитное поле, существует семь ветвей колебаний (альфиевские, ленгмюровские и др.). В неоднородной плазме диэлектрические свойства могут существенно измениться даже при появлении небольших пространственных градиентов. Это больше всего относится к низкочастотным колебаниям (с частотами, малыми по сравнению с циклотронной частотой ионов). Здесь появляются ветви колебаний, фазовая скорость которых совпадает с дрейфовой скоростью плазмы в магнитном поле за счет градиентов давления, — дрейфовые волны (см., например, [7]). «Медленность» дрейфовых волн позволяет ожидать, что они оказывают существенное влияние на устойчивость плазмы. Например, для их раскачки может оказаться достаточной уже относительно небольшая скорость пучка частиц, проходящего через плазму. Систематическому изложению теории устойчивости плазмы относительно раскачки дрейфовых волн естественно во введении предпослать нестрогое качественное рассмотрение. Выберем одномерную геометрию исходного равновесия плазмы в магнитном поле:  $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$  — магнитное поле направим по оси  $z$ . Пусть градиенты невозмущенных величин направлены по оси  $x$ ;  $n_0 = n_0(x)$  — плотность;  $T_0 = T_0(x)$  — температура;  $E =$

$= \{E_{0x}, 0, 0\}$  — напряженность электрического поля, определяющаяся из условия

$$-\frac{d}{dx} n_0 T_0 = -en_0 E_{0x},$$

которое выражает отсутствие макроскопической скорости ионов в равновесии.

Качественно свойства дрейфовых волн можно получить следующим образом. Дисперсионные уравнения для частот дрейфовых волн проще всего найти в системе координат, где невозмущенное электрическое поле равно нулю ( $E_{0x} = 0$ ). Пусть фазовая скорость волны больше ионной тепловой скорости  $V_{Ti}$  и меньше электронной  $V_{Te}$ . Тогда при потенциальных возмущениях ( $\text{rot } \mathbf{E} \approx 0$ ) электроны, двигаясь вдоль силовых линий, успевают перераспределяться по закону Больцмана:  $n = n_0(x)e^{\phi}$  ( $n$  — возмущение плотности плазмы,  $\phi$  — электрический потенциал возмущений). Выбирая возмущения в виде  $\exp(i\omega t + ik_y y + ik_z z)$  и пользуясь условиями потенциальности, квазинейтральности, а также уравнением непрерывности для ионов

$$i\omega n + c \frac{E_y}{H_0} n'_0(x) = 0, \quad (2)$$

получим

$$\omega = \omega_e \equiv k_y \frac{cTn'_0}{eH_0 n_0}. \quad (3)$$

С увеличением  $k_z$  эти волны переходят в так называемые ионные звуковые волны.

Из формулы (3) следует, что частота колебаний растет с уменьшением длины волны. Однако, как только длина волны становится порядка ларморовского радиуса ионов, рост прекращается. Причина этого заключается в том, что эффективное электрическое поле, усредненное по орбите частицы, уменьшается, поэтому средняя скорость дрейфа частиц  $c \frac{E_y}{H}$  в уравнении (2) падает. Точный расчет показывает, что это уменьшение поля как раз компенсирует рост частоты за счет увеличения  $k_y$ , так что  $\omega \approx \frac{V_{Ti} n'_0}{n}$  для  $k_y r_i \gg 1$ . В дальнейшем будет показано, что эти дрейфовые волны раскачиваются в неоднородной разреженной плазме даже при отсутствии градиента температуры и наличии лишь одного градиента плотности. Причем в случае высокотемпературной плазмы, когда столкновениями между частицами можно пренебречь, механизм раскачки дрейфовых волн заключается в резонансном взаимодействии волны с электронами, движущимися вдоль силовых линий магнитного поля со скоростью, равной фазовой скорости волны  $\omega/k_{\parallel}$ .

В низкотемпературной плазме, для которой применима гидродинамика, мнимая часть частоты обязана своим происхождением различным диссипативным эффектам, таким, как вязкость, теплопроводность и т. п. В однородной плазме эти факторы приводят к затуханию волн. В неоднородной плазме ситуация может измениться. Рассмотрим, например, влияние конечного электрического сопротивления, связанного с силой трения между электронами и ионами. Оказывается, что это может служить причиной раскачки дрейфовых волн (3). В самом деле, воспользовавшись предположениями, при которых существуют колебания (3), считая для простоты ионы холодными и учитывая трение электронов об ионы, для движения электронов вдоль, а ионов поперек магнитного поля получим уравнения

$$-ik_z n T_0 - en_0 E_z - m_e n_0 V_{ez} v_e = 0; \quad (4)$$

$$m_i n_0 \frac{dV_i}{dt} = en_0 E_{\perp} + \frac{e}{c} n_0 [V_i H_0]. \quad (5)$$

Здесь  $v_e$  — эффективная частота соударений электронов с ионами.

Используя также условие потенциальности и уравнения непрерывности (2) и квазинейтральности

$$ik_y \left( i \frac{\omega}{\omega_H} \cdot \frac{cE_y e n_0}{H_0} + \frac{\omega}{\omega_H} \cdot \frac{k_y c T n}{e H_0} \right) + ik_z j_z = 0, \quad (6)$$

получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - i\omega_s \omega + i\omega_s \omega_e = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } \omega_s = \frac{\left(\frac{k_z}{k_y}\right)^2 \omega_{He} \omega_{Hi}}{v_e}.$$

Отсюда видно, что в плазме переменной плотности с конечной проводимостью существует неустойчивость. Если  $\omega_s \gg \omega_e$  (трение мало), то  $\text{Re } \omega \approx \omega_e$ ;  $\text{Im } \omega \approx \frac{\omega_s^2}{\omega_s}$ . В противоположном случае ( $\omega_e \gg \omega_s$ )  $\text{Re } \omega \approx \text{Im } \omega \approx \sqrt{\omega_e \omega_s}$ .

Нетрудно понять физическую роль сил трения в рассмотренном примере. В отсутствие трения электроны в случае «промежуточных» частот ( $V_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll V_{Te}$ ), двигаясь вдоль силовых линий, успевают перераспределяться по закону Больцмана, а силы давления и электрическое поле работы не совершают. При наличии трения подвижность электронов падает. В результате возникшая флуктуация плотности продолжает нарастать, что и приводит к развитию неустойчивости. Теперь уже работа сил давления расширяющейся плазмы за период колеба-

ний положительна и, что легко проверить, превышает работу сил трения.

Из приведенного здесь рассмотрения следует, что в обоих предельных случаях — высокотемпературной и низкотемпературной плазме — существуют физические причины, приводящие к нарастанию во времени дрейфовых колебаний (появляются инкременты у частот дрейфовых волн).

Детальное исследование аномалий в явлениях переноса, возникающих из-за дрейфовых неустойчивостей, встречает большие трудности, но в то же время именно результаты такого исследования должны быть конечной целью. Сделана попытка получить аномальный коэффициент диффузии, комбинируя результаты линейной теории устойчивости и некоторые разумные (на наш взгляд) нелинейные оценки. Это приведет, как уже отмечалось, к естественному объяснению коэффициента диффузии Бома (в низкотемпературной плазме). В случае высокотемпературной плазмы, когда столкновения редки, для нахождения коэффициента диффузии использован так называемый квазилинейный метод [8, 9], учитывающий обратное влияние волн, возникших из-за неустойчивости, на функцию распределения частиц.

Волны, возникшие вследствие неустойчивости, стремятся так исказить функцию распределения электронов, что неустойчивость подавляется. Если редкие столкновения между электронами все же успевают восстанавливать максвелловское распределение по скоростям, то неустойчивость не подавляется, но вызываемая ею аномальная диффузия существенно уменьшается.

## 1. Гидродинамическая теория устойчивости неоднородной низкотемпературной плазмы

### 1. Линеаризованные уравнения. Исследование задачи на собственные значения

Для исследования устойчивости неоднородной плазмы с конечной проводимостью используем систему уравнений двухжидкостной гидродинамики для электронов и ионов в сильном магнитном поле ( $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$ ). Как и в рассмотренном выше примере, будем исходить из предположения, что возмущенное движение не нарушает квазинейтральности плазмы ( $n_{oi} = n_{oe}$ ,  $n_i = n_e$ ). Кроме того, в уравнениях Максвелла для электрических и магнитных полей возмущений пренебрежем возмущением  $H_z$ , что справедливо при  $8\pi n_0 T_0 \ll H_0^2$ .



Для характерных частот задачи ( $V_{Te} \gg \frac{\omega}{k_z} \gg V_{Ti}$ ) пренебрежем движением ионов вдоль  $H_0$  и инерцией электронов; последнее также означает, что мы ограничиваемся колебаниями с частотами, много меньшими частоты соударений электронов с нейтралами и ионами. Тогда линеаризованная система уравнений двухжидкостной гидродинамики [10] для этого случая в системе отсчета, где невозмущенное электрическое поле  $E_0 = 0$ , имеет вид

$$ik_y E_z - ik_z E_y = -\frac{i\omega}{c} H_x, \quad ik_y E_x - \frac{dE_y}{dx} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{dH_y}{dx} - ik_y H_x = \frac{4\pi j_z}{c}, \quad \frac{dH_x}{dx} + ik_y H_y = 0 \quad (9)$$

$$(\text{div } \mathbf{j} = 0);$$

$$-ik_z (n_0 T_e + n T_0) - en_0 E_z - 0,71 ik_z n_0 T_e + R_{||} + \frac{eV_{0y} H_x}{c} = 0; \quad (10)$$

$$-\nabla_{\perp} p_e - e \mathbf{E}_{\perp} n_0 - \frac{en_0}{c} [\mathbf{V}_e \mathbf{H}] - \frac{en}{c} [\mathbf{V}_0 \mathbf{H}_0] = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} n_0 (i\omega T_e + V_{0e} T_e ik_y + V_{xe} T'_{0e}) - \\ & - T_{0e} (i\omega n + ik_y V_{0e} n + V_{xe} n') = \\ & = -k_z^2 \kappa T_e + \frac{5}{2} \cdot \frac{cT_0}{eH_0} ik_y (nT'_{0e} - T_e n'); \end{aligned} \quad (12)$$

$$i\omega n + \text{div} (n \mathbf{V}_0) + \text{div} (n_0 \mathbf{V}) = 0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} m_i n_0 [i\omega \mathbf{V}_i + (\mathbf{V}_{0i} \nabla) \mathbf{V}_i] &= en_0 \mathbf{E} + \frac{en}{c} [\mathbf{V}_{0i} \mathbf{H}_0] + \\ & + \frac{en_0}{c} [\mathbf{V}_i \mathbf{H}_0] - \nabla p_i - \text{div} \pi_{\perp} + R_i; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3n_0}{2} (i\omega T_i + V_{0i} T_i ik_y + V_{xi} T'_{0i}) - \\ & - T_{0i} (i\omega n + ik_y V_{0i} n + V_{xi} n') = \\ & = \frac{5}{2} \cdot \frac{cT_{0i}}{eH_0} (T_i n' - n T'_{0i}); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\pi_{yy} = \pi_{xx} = \frac{nT_{0i}}{2\omega_{Hi}} \left( \frac{\partial V_{xi}}{\partial y} + \frac{\partial V_{yi}}{\partial x} \right); \quad (16)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{nT_i}{2\omega_{Hi}} \left( \frac{\partial V_{xi}}{\partial x} - \frac{\partial V_{yi}}{\partial y} \right).$$

Здесь  $j$  — возмущение плотности тока. В уравнении движения электронов (10) вдоль магнитного поля учтены термосила  $0,71 ik_z n_0$ , возникающая при наличии градиента температуры, и  $R_{||}$  — сила трения электронов с ионами (или нейтралами в случае слабоионизованной плазмы). В уравнении движения электронов поперек магнитного поля сила трения не учи-

тывается, что соответствует случаю  $\omega_{He} v_e^{-1} \gg 1$ . Поскольку при наличии начального градиента температуры  $T'_{0e}$  возникает также возмущение температуры  $T_e$ , то в систему уравнений включено уравнение теплового баланса (12) для электронов, где  $\kappa$  — коэффициент электронной теплопроводности. Уравнение (13) — уравнение непрерывности для ионов. Движение ионов поперек магнитного поля описывается уравнением (14), в котором удержан тензор вязкости с компонентами, приведенными в (16). Отметим, что вид тензора вязкости (16) соответствует гидродинамическому описанию движений поперек магнитного поля даже в случае пренебрежения соударениями между ионами, если ларморовский радиус ионов мал по сравнению с характерными поперечными размерами (см., например, [11]). Величина  $R_i$  — сила трения между ионами и нейтралами (трение между ионами и электронами мало влияет на движение ионов). Уравнение (15) — уравнение теплового баланса для ионов;  $V_{0i}$ ,  $V_{0e}$  — невозмущенные скорости ионов и электронов.

Рассмотрим прежде всего полностью ионизованную плазму, когда  $R_i = 0$ . При этом

$$R_{||} = \frac{en_0 j_z}{\sigma_{||}} - \frac{1}{\sigma_{||}^2} \cdot \frac{d\sigma_{||}}{dT_e} T_e en j_0, \quad (17)$$

где  $j_0$  — начальный продольный ток. Второй член в (17) соответствует добавочной силе трения за счет изменения проводимости вдоль магнитных силовых линий.

Выбирая возмущения в виде  $\varphi(x) \times \exp(ik_y y + ik_z z + i\omega t)$ , из (8) — (15) получим следующее уравнение для потенциальных длинноволновых возмущений ( $k_{\perp} r_i \ll 1$ ) в системе координат, где ионы находятся в покое:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left[ \left( 1 - \frac{\omega_e}{\omega - \omega_i} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1+\alpha) \omega_T - i\omega_0}{\omega - \frac{2}{3} i \chi k_z^2} \right] \right\} k_y^2 \varphi = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\omega_T = k_y \frac{cT_{0e}}{eH_0} \cdot \frac{T'_{0e}}{T_{0e}}; \quad \omega_i = \frac{k_y cT_{0i}}{eH_0} \cdot \frac{n'_0}{n_0};$$

$$\chi = \frac{\kappa}{n_0}; \quad \omega_0 = \frac{k_y}{k_z} \cdot \frac{j_0 c \frac{d\sigma_{||}}{dx}}{\sigma_{||}^2 H_0}; \quad \alpha = 0,71. \quad (19)$$

Анализ (19) при отсутствии продольного тока проведен в работе [12]. В общем случае



строгое решение дифференциального уравнения типа (18) требует точного знания профиля плотности. Здесь ограничимся случаем, когда  $\omega_i, \omega_0, \omega_T \ll \omega_e$ , а плотность меняется настолько медленно, что величину  $\omega_s$  можно считать постоянной. Вблизи точки, где  $n'_0/n_0$  максимально,  $\omega_e$  можно представить в виде

$$\omega_e = \omega_{e0} - \beta_e x^2. \quad (20)$$

Используя (20), для (18) получим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (2E - Kx^2)k_y^2\varphi = 0, \quad (21)$$

где

$$E = -\frac{1}{2} \left[ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left( 1 - \frac{\omega_e}{\omega} \right) \right] k_y^2; \quad (22)$$

$$K = -i \frac{\omega_s \beta_e}{\omega^2} k_y^2. \quad (23)$$

Решение уравнения (21) аналогично решению уравнения Шредингера для линейного гармонического осциллятора. В результате для собственных значений и собственных функций имеем

$$\frac{E}{\gamma^2} = \frac{n+1}{2}; \quad (24)$$

$$\varphi(x) \sim H_n(\gamma x) \exp(-\gamma^2 x^2/2). \quad (25)$$

Здесь  $H_n(\gamma x)$  — полиномы Эрмита, а

$$\gamma^2 = k_y \frac{\sqrt{\omega_s \beta_e/2}}{\Omega^2 + \nu^2} [(\Omega + |\nu|) - i(\Omega - |\nu|)]. \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует, что существуют конечные решения. В квазиклассическом приближении, когда  $\gamma$  мало, из (24) получим (7). Существование локальных решений свидетельствует о том, что комплексный потенциал уравнения (18) (т. е. функция, стоящая при  $-\varphi$ ) имеет характер «ямы». Хотя уравнение (21) справедливо лишь в достаточной близости от дна ямы, при медленном изменении плотности результаты, полученные из (21), качественно останутся верными во всей области существования локального решения (подробнее см. [25]). В случае переменной температуры необходимо учитывать влияние теплопроводности на инкремент. Однако, как нетрудно видеть, при  $\omega \gg \omega_s$ , если

$$\omega_s \gg k_z^2 \chi, \quad (27)$$

этим влиянием можно пренебречь. Используя выражения для  $\omega_s$ ,  $\text{Im } \omega$  и  $\chi$ , из (27) получим

$$k_y r_i \ll 1, \quad (28)$$

т. е. в данном случае для длинноволновых возмущений теплопроводность мало меняет инкременты.

Рассмотрим теперь случай, когда вдоль силовых линий магнитного поля течет ток [13]. Если  $\omega_e, \omega_i, \omega_T \ll \omega_0$ , уравнение (18) принимает вид

$$\varphi'' - \left[ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left( 1 + \frac{i\omega_0}{\omega - \frac{2}{3} i \chi k_z^2} \right) \right] k_y^2 \varphi = 0. \quad (29)$$

Пусть  $\omega_0 \gg \omega_s$ ,  $\chi k_z^2$ . Это эквивалентно выполнению следующих неравенств:

$$V_{z0} \gg V_{Te} (\omega_{He} \tau_e) \left( \frac{k_z^2}{k_y k_R} \right) \frac{l}{\lambda_z}, \quad (\omega_0 \gg \chi k_z^2); \quad (30)$$

$$V_{z0} \gg \frac{\omega_H i}{k_R} (\omega_{He} \tau_e)^2 \left( \frac{k_z}{k_y} \right)^3, \quad (\omega_0 \gg \omega_s). \quad (31)$$

Здесь  $V_{z0} = \frac{j_0}{en_0}$ ;  $l$  — длина свободного пробега электронов;  $\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$ ;  $k_R \approx \frac{2\pi}{r}$  ( $r$  — поперечный размер системы). (Обратим внимание, что для однородного начального магнитного поля необходимо рассматривать  $k_z > \frac{k_0 k_y}{k_x}$ , где  $k_0 \approx \frac{2\pi j_0}{cH_0}$ ; однако это не противоречит малости  $k_z$ , так как  $k_0$  мало, если согласно критерию Крускала — Шафранова исключим из рассмотрения гидродинамические неустойчивости идеальной плазмы.)

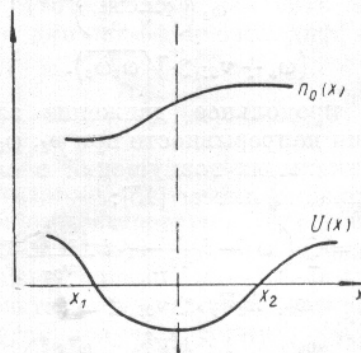


Рис. 1. График для  $U(x)$  при  $\omega_0 \gg \omega_s, \chi k_z^2$ .

В случае справедливости условий (30) и (31) уравнение (29) имеет чисто действительный потенциал

$$U = 1 - \frac{\omega_s \omega_0}{\nu^2}, \quad \omega = i\nu. \quad (32)$$

На рис. 1 показан график  $U(x)$  для указанного изменения температуры  $T_0(x)$ . Сравнивая инкременты для данного случая ( $\text{Im } \omega \approx \sqrt{\omega_0 \omega_s}$ ) с инкрементами для неустойчивости, развиваю-

щейся на дрейфовых волнах ( $\text{Im } \omega \approx \sqrt{\omega_e \omega_s}$ ), видим, что при

$$V_{z0} > V_{Te} \frac{l}{\lambda_z} \quad (33)$$

токовая неустойчивость развивается быстрее. Случай  $\omega_e \ll \omega_0 \ll \omega_s$  соответствует токово-конвективной неустойчивости, рассмотренной в работе [14]. Если  $\omega_s \gg \omega_e$ ,  $\omega_0$  и теплопроводность малы, но  $\omega_0 \gtrsim \omega_e$ , то  $\omega = \omega_e - i\omega_0$ . При этом неустойчивость также развивается на дрейфовых волнах, но с инкрементом  $\sim \omega_0$ , т. е. начальный продольный ток играет основную роль в развитии неустойчивости.

В слабоионизованной плазме необходимо учитывать влияние нейтрального газа. Когда  $\omega_0, \omega_T, \omega_i \ll \omega_e$ , уравнение для потенциальных возмущений принимает вид [13]

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left[ 1 + \frac{\omega_s}{i\omega + \nu_{oi}} \left( 1 - \frac{\omega_e}{\omega} \right) \right] k_y^2 \varphi = 0. \quad (34)$$

Здесь  $\nu_{oi}$  — частота соударений ионов с нейтралами. Для частоты и инкремента тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega \equiv \Omega &= \frac{\omega_e}{1 + \frac{\nu_{oi}}{\omega_s}}; \\ \text{Im } \omega \equiv \nu &= \frac{\omega_e^2}{\omega_s \left( 1 + \frac{\nu_{oi}}{\omega_s} \right)^3} \\ & \left( \omega_s + \nu_{oi} \gg \sqrt{\omega_e \omega_s} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Учитывая продольное движение электронов в уравнении непрерывности при  $\omega_s, \omega_0, \omega_T \ll \omega_e$  для потенциальных возмущений в слабоионизованной плазме имеем [15]

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \omega_e - i \frac{\omega_s^2}{4\nu_{oi}} + i \frac{k_z^2 V_{Te}^2}{\nu_{oe}} \right), \quad (36a)$$

$$\omega_e, k_z V_{Ti} \ll \nu_{oi} \ll \omega_s;$$

$$\omega = \frac{\omega_e \omega_s}{\nu_{oi}} + i \left( \frac{k_z^2 V_{Te}^2}{\nu_{oe}} - \frac{\omega_e^2 \omega_s^2}{\nu_{oi}^3} \right); \quad (36b)$$

$$\nu_{oi} \gg \omega_s; k_z^2 V_{Ti}^2 \ll \omega_{Hi}^2; V_i = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}};$$

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2;$$

$\nu_{oe}$  — частота соударений электронов с нейтралами.

Продольное движение ионов оказывает меньшее стабилизирующее действие, чем учтенный нами в (36) стабилизирующий фактор.

В сильно ионизованной плазме при  $\omega_s \gg \omega_0$  ионно-звуковые колебания ( $\Omega = k_z V_i$ ) нарастают с инкрементом  $\omega_e$ .

Выше рассмотрен один из возможных диссипативных процессов — трение между различными сортами частиц — и показано, что учет его оказывает дестабилизирующее действие. Отметим теперь вкратце особенности влияния теплопроводности и вязкости. Так, если удерживать в дисперсионном уравнении члены, учитывающие конечность ларморовского радиуса, и член  $\chi k_z^2$ , и считать трение малым [что справедливо при нарушении условия (28)], то неоднородная плазма оказывается неустойчивой даже в отсутствие градиента температуры [7]. Для длинноволновых возмущений теплопроводность незначительно меняет инкременты и частоты, а вязкость за счет поперечного движения ионов оказывает стабилизирующее действие [13].

Обсудим, к каким результатам приводит эффект непараллельности силовых линий (НСЛ) магнитного поля при исследовании устойчивости неоднородной плазмы. Рассмотрим прежде всего токовую неустойчивость. Пусть силовые линии магнитного поля лежат в плоскости  $(y, z)$  и представляют собой прямые линии, угол наклона которых  $\theta(x)$  (относительно оси  $z$ ) зависит от  $x$ . Этот поворот силовых линий обеспечивается током, текущим вдоль них, так что угол наклона  $\theta$  согласно уравнению

Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  связан с  $V_{e0}$  соотношением  $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{4\pi en_0 V_{e0}}{cH_0}$ ,  $V_{i0} = 0$ . Если ход

изменения плотности и температуры одинаков, а теплопроводностью можно пренебречь, то график для  $U$  подобен изображенному на рис. 1. При непараллельных магнитных силовых линиях  $k_{\parallel} = k_z + k_y \int \frac{d\theta}{dx} dx$  ( $k_{\parallel}$  — составляющая волнового вектора вдоль магнитного поля). С ростом  $k_{\parallel}$  необходимо учитывать теплопроводность; при этом также  $\omega_s$  растет, а  $\omega_0$  падает. Как видно из (29), яма уменьшается. При  $\omega_s \gg \omega_0$  неустойчивость вообще пропадает, если  $\chi k_{\parallel}^2 \gtrsim \omega_0$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $\omega_e \gg \omega_T, \omega_0, \omega_i$ . С ростом  $k_{\parallel}$  может возникнуть ситуация, при которой  $\omega_s \gg \omega_e$ , что приводит к сужению ямы [последнее обстоятельство следует из анализа (18)], а также может нарушиться условие  $\frac{\omega_e}{k_{\parallel}} \gg V_i$ . В обратном предельном случае в полностью ионизованной плазме, как уже указывалось, нарастают ионно-звуковые колебания с инкрементом  $\omega_e \ll k_{\parallel} V_{Ti}$ . Отметим, что рост  $k_x$  и появление малого параметра  $\omega_e/k_z V_i$

существенно уменьшают коэффициент диффузии [см. формулу (41)]. В слабоионизованной плазме, как следует из (36а), рост  $k_{||}$  вызывает стабилизацию неустойчивости.

В заключение рассмотрим, к чему приводит нарушение условия потенциальности возмущений. Пренебрегая теплопроводностью из-за столкновений, при отсутствии внешнего продольного тока и градиента температуры из системы (8) — (15) получим уравнение (в лабораторной системе координат)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - k_y^2 \left[ 1 - i\omega_s \frac{\omega - \omega_i - \omega_e}{\omega(\omega - \omega_i)} \left( 1 - \frac{\omega(\omega - \omega_i)}{k_z^2 V_A^2} \right) \right] \varphi = 0. \quad (37)$$

Если возмущения непотенциальные ( $\omega \gg k_z V_A$ ), то из качественного критерия устойчивости находим

$$\text{Im } \omega = \text{Re } \frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} \cdot \frac{k_z^2 V_A^2}{\omega_s} > 0,$$

т. е. возмущения затухают во времени. Заметим, что с ростом температуры стабилизирующий эффект за счет нарушения потенциальности возрастает.

## 2. Обсуждение нелинейных эффектов. Влияние неустойчивостей на аномальную диффузию

Развитие неустойчивости должно приводить к возникновению турбулентного режима в плазме и появлению турбулентной диффузии. Проведем размерностные оценки коэффициента возникающей диффузии так, как это делается обычно в теории турбулентности.

Коэффициент диффузии можно записать в виде

$$D \approx V_{\Pi}^2 \tau. \quad (38)$$

Здесь  $V_{\Pi}$  — пульсационная скорость плазмы;  $\tau$  — характерное время исчезновения корреляции. В данном случае  $\tau \approx \frac{1}{|v|}$ , поскольку здесь нет другого масштаба времени, характеризующего необратимость турбулентного режима. Амплитуду пульсаций определим из следующих соображений. С одной стороны, неустойчивость приводит к нарастанию амплитуды пульсаций и  $\frac{\partial V_{\Pi}}{\partial t} \sim v V_{\Pi}$ , с другой, — нелинейные члены типа  $\text{div}(nV)$  вызывают перекачку энергии в коротковолновую часть спектра, где флуктуации затухают. Из условия баланса между этими двумя процессами и определяется стационарное значение амплитуды пульсаций.

$$|v| \cdot n \approx \frac{V_{\Pi}}{\lambda_{\perp}} n, \quad (39)$$

где  $\lambda_{\perp}$  — характерный размер турбулентных пульсаций в направлении оси  $x$ .

Определяя из (39)  $V_{\Pi} \approx |v| \lambda_{\perp}$ , получим

$$D \approx |v| \lambda_{\perp}^2. \quad (40)$$

Естественно в качестве  $\lambda_{\perp}$  взять длину волны неустойчивости  $\lambda_x$ . При наличии малого параметра  $\left(\frac{v}{\Omega} \ll 1\right)$  удается развить достаточно

строгий подход к исследованию турбулентных пульсаций и их влияния на функцию распределения частиц [9, 16]. Последнее учитывается с помощью так называемого квазилинейного метода [9], сущность которого заключается в том, что функцию распределения разбивают на медленно меняющуюся и быстро осциллирующую части и в уравнении для «медленной» части учитывают усредненный квадратичный эффект быстрых осцилляций. Выделение двух «времен» (или частот) предполагает, что в плазме с самого начала идут два процесса с разными масштабами времени: быстрые осцилляции с медленно меняющейся амплитудой. Это сводится к вышеупомянутому условию  $v \ll \Omega$ . Распространяя квазилинейный метод на неоднородную плазму в гидродинамическом приближении и используя кинетическое уравнение для волн [16], можно получить следующее выражение для коэффициента диффузии [15]:

$$D \approx \frac{v^2}{\omega k_{\perp}^2}. \quad (41)$$

Если  $v k_{\perp} \approx \Omega_k$ , то возмущения с разными длинами волн длительные промежутки времени будут сильно взаимодействовать между собой и указанный здесь подход уже нельзя будет применить. Можно, однако, для оценки диффузии воспользоваться выражением (41), приняв в нем  $v \approx \Omega$ . Тогда получим формулу (40). Найдем в качестве примера  $D$ , когда ионы холодные, продольный ток отсутствует, а  $T_e = \text{const}$ . Тогда для  $\omega_e \gg \omega_s$  из (18) следует, что  $k_x \approx k_y$ . Пользуясь выражением для  $\text{Im } \omega$ , получим

$$D \approx \frac{V \omega_s \omega_e}{k_y^2}. \quad (42)$$

Нас интересует максимальный коэффициент диффузии, и поэтому возьмем минимально допустимые  $k_y \approx \frac{2\pi}{r}$ , где  $r$  — характерный поперечный размер системы. В  $V \omega_s$  еще входит отношение  $k_z/k_y$ , которое также должно быть



взято максимальным; из условия  $\omega_e \gg \omega_s$  имеем предельно допустимое значение для  $k_z/k_y$ :

$$\left(\frac{k_z}{k_y}\right)_{\text{макс}} \approx \frac{c}{V_A} \sqrt{\frac{\omega_e}{4\pi\sigma_{\parallel}}}, \quad (43)$$

где 
$$V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 m_i}}.$$

Окончательно получим

$$D_{\perp} \approx \frac{cT_{0e}}{2\pi e H_0}. \quad (44)$$

Заметим, что коэффициент диффузии, принятый в гипотезе Бома, имеет такой же порядок величины [4]. При этом необходимо учитывать следующее. С ростом магнитного поля значение  $(k_z/k_y)_{\text{макс}}$  согласно (43) будет уменьшаться. Может оказаться, что при  $k_y \sim \frac{2\pi}{r}$  величина  $k_z$  станет порядка  $2\pi/L_{\parallel}$  ( $L_{\parallel}$  — продольный размер системы). Нетрудно видеть, что теперь с дальнейшим ростом  $H_0$  для  $k_y \sim \frac{2\pi}{r}$  получился бы меньший коэффициент диффузии. В самом деле, при неизменном  $k_y$  и ограниченном снизу  $k_z \gg \frac{2\pi}{L_{\parallel}}$  с ростом  $H_0$  значение  $\omega_s$  станет больше  $\omega_e$ . Если  $\omega_s \gg \omega_e$ , то, как легко видеть из (18),  $D$  растет с увеличением  $k_y$ . Но, как показано, при  $\omega_e \gg \omega_s$   $D$  падает с ростом  $k_y$ , т. е. при  $\omega_e \approx \omega_s$  значение  $D$  достигает максимума. Итак, для магнитных полей, больших

$$H^* \approx \frac{L_{\parallel}^{2/3} c (m_i m_e v_e T_e)^{1/3}}{r^{4/3} \omega_e} \quad (45)$$

(при  $H \approx H^*$ ,  $k_z \approx \frac{2\pi}{L_{\parallel}}$ , а  $k_y \sim \frac{2\pi}{r}$ ), минимальное значение  $k_y$  по-прежнему получим из (43), где теперь  $k_z \approx \frac{2\pi}{L_{\parallel}}$ . Тогда выражение для коэффициента диффузии принимает вид,

$$D_{\perp} \approx \frac{cT}{2\pi e H_0} \cdot \frac{H^*}{H_0}. \quad (46)$$

В изложенных здесь рассуждениях радиус плазменного шнура считался заданным, не зависящим от магнитного поля. Отметим также, что неустойчивость на дрейфовых волнах приводит к коэффициенту диффузии  $\sim 1/H^2$ , в частности, когда  $v_{0i} \geq \omega_e$ ,  $\omega_s$  [15], а в случае токовой неустойчивости [13] подобная ситуация возникает при  $H > H^{**}$ , где

$$H^{**} \approx \frac{L_{\parallel}}{r} \cdot \frac{(k_R V_{z0})^{1/3} c m_i^{1/3} m_e^{2/3}}{e v_e^{2/3}}. \quad (47)$$

Обилие экспериментальных данных, в которых часто наслаивается влияние самых разнообразных факторов, затрудняет детальный анализ всех экспериментов по диффузии плазмы. По крайней мере этот вопрос требует отдельного подробного рассмотрения. Здесь ограничимся анализом некоторых из тех экспериментов, где, по-видимому, влияние продольного тока несущественно.

В экспериментах [4] ( $r \approx 0,3$  см,  $H \approx (3 \div 4) \times 10^3$  гс,  $p \approx 5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст.,  $T_e \approx T_i \approx 2$  эв)  $v_{0i} \ll \omega_s$ ,  $\omega_e \approx \omega_s$ . Поэтому, как следует из формулы (35), выражение для коэффициента диффузии близко к (46), что и подтверждено в данных экспериментах. В этой же работе [4] обнаружено присутствие низкочастотных колебаний, которые по порядку величины имеют частоты дрейфовых волн.

В ряде экспериментов аномальная диффузия начинается выше некоторого критического поля  $H_{кр}$ . Так, в эксперименте Жаринова [17] с разрядом в аргоне при концентрации нейтрального газа  $7 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>, концентрации плазмы  $10^{11}$  см<sup>-3</sup>,  $T_e \approx T_i \approx 1$  эв,  $L_{\parallel} \approx 10$  см аномальные явления начинались при  $H_0 \approx 2300$  э. Наличие нижней границы магнитного поля легко понять, если учесть, что аномальная диффузия не будет «замаскирована» классической, когда

$$\frac{cT}{2\pi e H_0} > D_{i\perp} \quad (48)$$

( $D_{i\perp}$  — классическая диффузия ионов).

Из (48) имеем

$$\omega_{Hi} > 2\pi v_{0i}, \quad (49)$$

что указывает на правильное качественное и удовлетворительное количественное согласие с рассматриваемым экспериментом.

Если воспользоваться выражением (366) для инкремента и учесть, что радиус плазменного шнура определяется классической диффузией (если только он не поддерживается заданным в силу условий эксперимента), то получим следующее условие неустойчивости:

$$\omega_{Hi}^2 \frac{\sigma_{0e}}{\sigma_{0i}} \cdot \frac{l_e^2}{L_{\parallel}^2} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} > v_{0i}^2, \quad (50)$$

где  $l_e$  — длина свободного пробега электронов;  $\sigma_{0e}$ ,  $\sigma_{0i}$  — соответственно эффективные сечения соударений ионов и электронов с нейтралами.

Любопытно отметить, что измеренный коэффициент диффузии на стеллараторе совпадает с (46) [18]. Анализ кривых времени удержания плазмы, приведенных в работе [18], показывает,

что при  $H_0 \geq 2 \cdot 10^4$  гс бомовская диффузия, очевидно, сменяется диффузией  $\sim 1/H^2$ . Из формулы (45) получим, что при параметрах стелларатора ( $n \approx 10^{14}$  см<sup>-3</sup>,  $L_{||} \approx 1$  м,  $r \approx 1$  см,  $T_e \geq 5$  эв) магнитные поля, при которых меняется характер диффузии, оказываются именно такого порядка. Продольный ток не оказывает определяющего действия на режим неустойчивости стелларатора (электрические поля 0,3—0,06 в/см). Действительно, в этом случае критические поля, при которых токовая неустойчивость вызывает диффузию  $\sim 1/H^2$ , имеют значение  $H^* \leq 10^4$  гс, т. е. смена режима происходит раньше, чем в случае бомовской диффузии. Отметим, что с уменьшением температуры плазмы, как видно из формул (45) и (47), бомовская диффузия может смениться диффузией  $\sim 1/H^2$  раньше, чем возникнет подобный режим ( $D \approx \frac{1}{H^2}$ ) для токовой неустойчивости. Возможно, с этим связан тот факт, что в случае «холодной» плазмы ( $T \approx 0,4$  эв) при пропускании достаточно большого продольного тока (порядка нескольких ампер) в экспериментах Мотли скорость диффузии резко возрастала [19].

Приведенная здесь теория, строго говоря, неприменима, когда ларморовский радиус частиц сравнивается с поперечными размерами системы, а характерные частоты задачи порядка  $\omega_{Hi}$  (так, в случае  $r_{Hi} \approx r$  необходимо, в частности, учитывать конечность ларморовского радиуса для невозмущенного движения). Мы поэтому не претендуем на объяснение, например, эксперимента Ринна и Анжелло [20], где указанные параметры близки к предельным. Любопытно, однако, что в работе [20] диффузия цезиевой плазмы протекает в соответствии с классической теорией. Заметим также, что в настоящей работе рассмотрены дрейфовые и токовые неустойчивости лишь в условиях замагниченной неоднородной плазмы. Иногда, однако, наблюдаются подобные неустойчивости и в отсутствие условия замагниченности ионов [21]. Можно ожидать, что неустойчивости плазмы, описываемой системой (8) — (15), не исчерпываются рассмотренными в данной работе.

## II. Кинетическая теория устойчивости неоднородной высокотемпературной плазмы

В предыдущем разделе рассмотрена устойчивость плазмы с учетом конечной проводимости в рамках двухжидкостной гидродинамики плазмы и показано, что неустойчивость относительно потенциальных возмущений вызывает

аномальную диффузию плазмы с коэффициентом диффузии, в частности, порядка бомовского. Если же возмущения потенциальны ( $\omega > k_z V_A$ ), то неустойчивость стабилизируется. Учитывая, что для максимального коэффициента диффузии  $\omega \approx \omega_e(x)$ , а  $k_z$  определяется из (48), где  $k_y \approx \frac{2\pi}{r}$ , условие потенциальности переписываем в виде

$$\sigma_{||} \frac{V_{Ti}^2}{c^2} \ll \omega_{Hi}.$$

С ростом температуры плазмы проводимость увеличивается, и это условие должно в конце концов нарушиться. При этом плазма должна стать более устойчивой (точнее, менее неустойчивой). Однако может оказаться, что мы уже выйдем за область применимости гидродинамики, и задачу устойчивости следует рассматривать в рамках бесстолкновительной кинетики, так как длина свободного пробега возрастает еще быстрее, чем электропроводность. В этом разделе будет рассмотрена устойчивость бесстолкновительной плазмы [7, 22], причем удобно отдельно рассмотреть случаи, когда силовые линии магнитного поля параллельны и непараллельны.

### 1. Неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле с параллельными силовыми линиями

Все рассмотрение, как и в предыдущих разделах, будем вести на примере плоского слоя плазмы, помещенной в сильное магнитное поле  $H_z$  ( $H^2 \gg 8\pi n T \gg \frac{m_e}{m_i} H^2$ ), причем для простоты примем зависящей от координаты  $x$  только плотность  $n(x)$ , а  $T(x) = \text{const}^*$ . Во введении уже отмечено, что в высокотемпературной плазме неустойчивость проявляется в расщеплении дрейфовых волн резонансными электронами. Теперь подробнее остановимся на качественном анализе причин, приводящих к неустойчивости.

В однородной плазме основным источником мнимой части в дисперсионном уравнении является член типа  $\frac{eE_z}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z} \Big|_{v_z = \frac{\omega}{k_z}}$  [ $f_i, e(v, x)$  — функции распределения ионов и электронов в невозмущенной плазме]. В максвелловской

\* В данном обзоре мы не будем интересоваться эффектами, связанными с наличием поля тяжести, которые подробно рассмотрены в работе [23].

плазме он ответствен за затухание волны («затухание Ландау»). Естественно, что члены с такой структурой сохраняются и в слабо неоднородной плазме. Однако появляются еще и дополнительные слагаемые, получающиеся из члена  $v\nabla f$  в кинетическом уравнении. Например, при малых частотах ( $\omega \ll \omega_{Hi} = \frac{eH}{m_i c}$ ), когда движение ионов и электронов поперек  $H$  имеет вид дрейфа, член  $v\nabla f$  дает для «электрического» дрейфа вклад  $\frac{cE_y}{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ . Этот член, естественно, должен дать добавку к мнимой части за счет соответствующего полувычета ( $c \frac{E_y}{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{v = \frac{\omega}{k_z}}$ ). Если  $E_y \gg E_z$  (а это имеет место, например, для безвихревых возмущений ( $\text{rot } E \approx 0$ ) с пространственной зависимостью  $\exp i(k_y y + k_z z)$ ,  $k_y \gg k_z$ ), эта добавка даже при малых градиентах может превысить затухание Ландау и плазма окажется неустойчивой.

Для того чтобы убедиться в этом, оценим работу, совершаемую электрическим полем волны над частицами плазмы:

$$\begin{aligned} \int j_z \tilde{E}_z dr &= \int dr e v_z f_1 E_z \Big|_{v_z = \frac{\omega}{k_z}} \\ &\approx \int dr \frac{e\omega E_z}{k_z} \left( -\frac{eE_z}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{cE_y}{H} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \Big|_{v_z = \frac{\omega}{k_z}} = \\ &= \int dr \frac{e^2 E_z^2 \omega^2 f_0}{k_z^2 T} \left[ 1 - \frac{ck_y T}{eH_0 \omega} \left( \frac{n'_0}{n_0} - \frac{T'}{2T} \right) \right] \Big|_{v_z = \frac{\omega}{k_z}}, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$f_0 = \frac{n_0(x) m^{1/2}}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T(x)}\right).$$

Здесь интегрирование проводится по области локализации пакета волн. Как следует из (51), плазма будет неустойчива, если второе слагаемое в подинтегральном выражении превысит член, описывающий затухание Ландау. Последнее зависит от соотношения между пространственными градиентами  $n(x)$  и  $T(x)$  и величины частоты. Отсюда ясно, что плазма будет неустойчива относительно раскачки коротких дрейфовых волн  $\lambda < r_i$ , так как для них частота  $\omega$  мала по сравнению с  $\omega_n = \frac{ck_y T n'_0}{eH n_0}$ .

Из выражения для работы, совершаемой электрическим полем волны над частицами,

можно определить порядок величины инкремента неустойчивости. По определению  $\nu = \frac{1}{2\omega} \times \frac{d\omega}{dt}$  ( $\omega$  — энергия волнового пакета). Замечая, что для дрейфовых волн основной вклад в энергию волны вносит энергия, заключенная в флуктуациях плотности  $w = \int \frac{ne^2 \varphi^2}{2T} dr$ , получим

$$\nu = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega [\omega - \omega_n (1 - \eta/2)]}{|k_z| V_{Te}}. \quad (52)$$

Формула (52) справедлива лишь для потенциальных возмущений ( $\text{rot } E \approx 0$ , что имеет место при  $\omega \lesssim k_z V_A$ ). Однако, как можно показать, непотенциальные возмущения, искривляющие силовые линии магнитного поля, затухают в отсутствие градиента температуры [ $T(x) = \text{const}$ ] и могут раскачиваться лишь при наличии градиента температуры определенного знака ( $\eta = \frac{d \ln T}{d \ln n} < 0$ ). Это налагает ограничения на величину фазовой скорости  $\omega/k_z$

$$V_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll V_A, \quad (53)$$

где левое неравенство получено из условия пренебрежения затуханием Ландау на ионах. Максимальное для данной длины волны  $\lambda_{\perp}$  значение инкремента  $\nu_{\text{макс}} \approx \sqrt{\frac{\pi m_e}{\beta m_i}} (\omega - \omega_n)$  достигается как раз при  $\frac{\omega}{k_z} \approx V_A$  и растет с уменьшением  $\lambda_{\perp}$ . Инкремент сравнивается с частотой  $\omega \approx \frac{V_{Ti} n'}{n}$  (см. 56) для коротковолновых возмущений  $\lambda_{\perp} \approx r_e \beta^{-1/2}$ ,  $\lambda_{\parallel} \approx \frac{n}{n'} \beta^{-1/2}$ .

Проведенное здесь рассмотрение неустойчивости относительно раскачки дрейфовых волн существенно опирается на представление возмущения в виде пакета волн, так как здесь выражение (51) — «локальный» закон сохранения энергии в системе волна + частицы плазмы в пределах области локализации волнового пакета. В случае высокотемпературной плазмы пакеты действительно удастся построить благодаря тому, что область локализации пакета  $\Delta x \gg \lambda_x$  для рассматриваемых длин волн  $\lambda_x < r_i$  значительно меньше всей области «прозрачности» плазмы, по порядку величины равной поперечному размеру системы  $R \approx \frac{n}{n'}$ . Таким образом, все возмущения можно представить в виде пакета из волн:

$$\psi = \psi_0 \exp[ik_x(x) + ik_y y + ik_z z + i\omega t], \quad (54)$$



где пространственная зависимость  $\psi$  в направлении неоднородности  $n(x)$  должна определяться из соответствующего интегро-дифференциального уравнения для величины  $\psi(x)$  [24—26], которое в приближении (54) сводится к алгебраическому, в общем случае трансцендентному уравнению для  $k_x(x)$ . Так, в частности, для потенциальных дрейфовых волн уравнение для  $k_x(x)$  в системе координат, где невозмущенное электрическое поле  $E_0 = 0$ , имеет вид [7]

$$-k^2\psi = 4\pi \sum_j e_j^2 \left[ \frac{n}{T_j} - \frac{1}{T_j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega + \frac{k_{\perp} T_j}{m_j \omega_{Hj}} \cdot \frac{d}{dx}}{\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + l \omega_{Hj}} f_j^{(0)}(v_{\parallel}) F_l(k^2 r_j^2) \right] \psi, \quad (55)$$

где  $F_l(k^2 r^2) = I_l(k^2 r^2) e^{-k^2 r^2}$  (здесь  $I_l$  — функция Бесселя порядка  $l$  от мнимого аргумента);  $f_j^{(0)}(v_{\parallel}) = n_0(x) \sqrt{\frac{m_j}{2\pi T_j}} \exp\left(-\frac{m_j v_{\parallel}^2}{2T_j}\right)$  — невозмущенная функция распределения частиц по продольным скоростям.

Для рассмотренной низкочастотной ветви ( $\omega \ll \omega_H$ ) дрейфовых волн следует оставить в сумме по  $l$  в этом уравнении лишь основной член с  $l=0$  и разложить интегралы при условиях (53). В результате (55) сводится к следующему уравнению ( $T_e = T_i$ ,  $k_{\perp} r_e \ll 1$ ).

$$2 - \frac{\omega + \omega_n(x)}{\omega} F(k_{\perp}^2 r_i^2) - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - \omega_n(x)}{|k_z| \sqrt{T_e}} = 0, \quad (56)$$

из которого видно, что частота колебаний

$$\text{Re } \omega \approx \frac{\omega_n(x) F}{2 - F}, \quad (57)$$

как уже отмечалось, остается примерно постоянной для коротких волн  $\lambda_{\perp} < r_i$ , а инкремент определяется выражением (52).

Таким образом, как и в однородной плазме, для определения инкремента неустойчивости можно воспользоваться алгебраическим уравнением типа (55). Однако полученный инкремент, как уже указывалось, описывает раскочку волнового пакета лишь в данной точке пространства и меняется при его движении. Движение волновых пакетов согласно методу эйконала описывается с помощью уравнения [27, 16]

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} - \left( \frac{\partial n_k}{\partial x} + \frac{\partial n_k}{\partial k_x} \cdot \frac{\partial k_x}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega_k}{\partial k_x} = 2\nu_k n_k,$$

выражающего закон сохранения адиабатического инварианта  $n_k = \frac{w_k}{\omega_k}$  [ $w_k$  — спектральная плотность колебаний;  $\omega_k$  — частота;  $\nu_k$  — инкремент (или декремент) нарастания волнового пакета из-за резонансного взаимодействия его с частицами]. Суммарный эффект нарастания или затухания волны, естественно, зависит от суммарной работы частиц на протяжении всей траектории пакета. Таким образом, если пакет, не успев достаточно нарасти, попадает в область затухания, то он может полностью затухнуть.

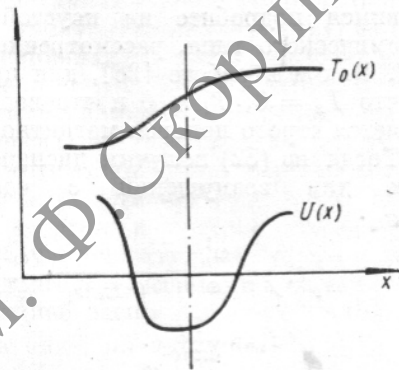


Рис. 2. Возможная область локализации ( $U(x) < 0$ ) для длинноволновых колебаний.

Детальное рассмотрение показывает, что для достаточно длинных потенциальных дрейфовых волн ( $\lambda_{\perp} \gg r_i$ ) возможная область прозрачности ограничена с двух сторон для распределения частиц плазмы по координате, изображенного на рис. 2, и во всей этой области электроны раскочивают волну [26]. Поэтому пакет из длинноволновых возмущений, двигаясь между двумя точками поворота, т. е. точками, где  $U(x) = 0$ , нарастает до тех пор, пока не скажутся нелинейные эффекты. Коротковолновые возмущения, наоборот, всегда могут попасть в область, где очень сильно затухание Ландау на ионах. Тем не менее из-за большого инкремента  $\nu \approx \omega$  эти возмущения успевают нарасти до нелинейных эффектов прежде, чем попадут в область затухания.

В отличие от неустойчивости относительно низкочастотных дрейфовых волн ( $\omega \ll \omega_H$ ), существующей при сколь угодно малых градиентах плотности, неустойчивость дрейфовых волн с частотами вблизи гармоник циклотронной полной частоты возникает лишь начиная с определенного критического значения градиента плотности. Мы не будем здесь останавли-

ваться на неустойчивости (возникающей за счет того же механизма резонансного взаимодействия частиц с волной), дисперсионное уравнение для которой легко получить из (53) заменой в знаменателе второго члена частоты  $\omega$  на  $\omega - l\omega_H$ . Отметим лишь, что максимальный инкремент неустойчивости по-прежнему дается формулой  $\nu \sim \frac{\omega - l\omega_H}{|k_z| V_{Te}} (\omega - \omega_n)$  при  $\frac{\omega - l\omega_H}{|k_z|} \approx V_A$ , а сама неустойчивость существует при градиентах  $r_i \frac{n'}{n} > \frac{1}{k_{\perp} r_i} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}$  для  $\nu \approx \omega - l\omega_H$ .

Остановимся подробнее на неустойчивости гидродинамического типа, рассмотренной в работе [28]. Как и в работе [28], для простоты примем, что  $T_e = 0$ ,  $T_i \neq 0$  и что волна распространяется строго поперек магнитного поля ( $k_z = 0$ ). Тогда из (52) получим дисперсионное уравнение для возмущений с частотами  $\omega \approx -l\omega_H$

$$1 + k^2 \left( d_i^2 + \frac{m_e}{m_i} r_i^2 \right) + \frac{\omega_n^i}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k r_i}} \cdot \frac{\omega + \omega_n^i}{\omega + l\omega_H},$$

$$d_i^2 = \frac{T_i}{4\pi n e^2}.$$

Здесь заменим функцию  $F(k_{\perp}^2 r_i^2)$  ее асимптотическим выражением  $F \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi k r_i}}$  для  $k r_i \gg 1$ . Решая это квадратное относительно  $\omega$  уравнение, получим инкремент и частоту возмущений

$$\omega = \frac{l\omega_H(1+\theta) + \omega_n^i - \frac{V_{Ti}}{\sqrt{2\pi R}} \pm \sqrt{\left[ l\omega_H(1+\theta) + \omega_n^i - \frac{V_{Ti}}{\sqrt{2\pi R}} \right]^2 - 4 \left( 1 + \theta - \frac{1}{\sqrt{2\pi k r_i}} \right) l\omega_H \omega_n^i}}{2 \left( 1 + \theta - \frac{1}{\sqrt{2\pi k r_i}} \right)}, \quad (58)$$

где

$$R^{-1} \approx \frac{n'}{n}; \quad \theta = k^2 \left( \frac{m_e}{m_i} r_i^2 + d_i^2 \right).$$

Отсюда легко найти, что инкремент достигает своего максимального значения  $\nu \approx 2 \sqrt{\frac{m_e k r_i}{m_i}} \times \omega_H (1 + \theta)^{-1}$  при  $l\omega_H (1 + \theta) - \omega_n^i = -\frac{V_{Ti}}{\sqrt{2\pi R}}$ .

Приравнивая частоту  $\omega \approx -\omega_n^i (1 + \theta)^{-1}$  к ее наименьшему по абсолютной величине значению  $\omega_H$  (при  $l = 1$ ), получим критическую величину градиента плотности, при которой наступает неустойчивость

$$r_i R^{-1} \geq 2 \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \text{ для } k r_i \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}. \quad (59)$$

Максимальный инкремент для таких коротковолновых возмущений с длиной волны порядка  $\lambda \approx r_i \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$  равен

$$\nu \approx \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/4} l\omega_H, \quad (60)$$

а интервалы частот, где имеется неустойчивость  $\nu \neq 0$ , составляют

$$\Delta \text{Re} \omega \approx \frac{V_{Ti}}{R} \approx \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} l\omega_H,$$

т. е. неустойчивость почти чисто аperiodическая.

В заключение этого раздела коротко остановимся на случае, когда число столкновений уже настолько велико, что для электронов справедливо гидродинамическое описание ( $\lambda_{\parallel} > l_e$ ), а для ионов столкновениями еще можно пренебречь ( $\nu > \nu_{i/i} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \nu_{e/i}$ ) [29]. Тогда движение электронов вдоль магнитного поля описывается уравнением

$$-ik_z n T_0 - en_0 E_z - m_e n_0 V_{ez} \nu_e = 0. \quad (61)$$

Как и в первом разделе, мы удержали здесь член  $m_e n_0 V_{ez} \nu_e$  в уравнении движения электронов, ответственный за трение между ионами и электронами. Поэтому физический механизм неустойчивости полностью соответствует рассмотренному во введении для случая низкотемпературной плазмы.

Используя уравнение непрерывности

$$i\omega n + \frac{cE_y}{H} n_0' + ik_z n_0 V_{ez} = 0$$

и вытекающую из кинетического уравнения для ионов связь возмущения плотности с возмущением электрического поля  $E = -\nabla\phi$  для промежуточных частот возмущений [ $k_z V_{Ti} < \omega < k_z V_A$ , см. (52)]

$$n = \frac{e\phi}{T} n_0 \left[ 1 - F \left( 1 + \frac{\omega_n}{\omega} \right) \right], \quad \omega \ll \omega_H,$$

получим частоту  $\omega$  и инкремент  $\nu$  неустойчивости

$$\omega = \frac{\omega_n F}{2 - F}; \quad \nu \approx -\frac{\nu_e \omega_n (\omega_n - \omega) F}{k_z^2 V_{Te}^2 (2 - F)^2} \text{ при } \nu \ll \omega. \quad (62)$$

Как и для раскачки низкочастотных дрейфовых волн ( $\omega \ll \omega_H$ ) в высокотемпературной плазме, описываемой кинетическими уравнениями для ионов и электронов, рассматриваемая неустойчивость становится почти аperiодической для возмущений с определенными длинами волн, значения которых легко найти из (62) и условия потенциальности (53).

Суммируя результаты этого раздела, следует отметить, что действительно универсальная неустойчивость, имеющая место при сколь угодно малых градиентах плотности, наблюдается лишь относительно низкочастотных ( $\omega \ll \omega_H$ ) потенциальных возмущений в области частот  $k_z V_{Ti} < \omega \ll k_z V_A$ . Неустойчивость же относительно возмущений с частотами вблизи гармоник ионной ларморовской частоты  $l\omega_H$  может существовать лишь начиная с определенных критических градиентов  $r_i \frac{n'}{n} > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$  и в отличие от низкочастотных мод не связана с резонансным механизмом раскачки.

Поскольку в этом разделе изучалась устойчивость относительно сильно вытянутых вдоль силовых линий возмущений ( $\lambda_{||} < \frac{\omega}{V_{Ti}}$  или даже  $\lambda_{||} = \infty$ ), то в дальнейшем разумно рассмотреть влияние малой непараллельности силовых линий магнитного поля, которая вызывает нарушение этого необходимого для существования неустойчивости условия.

2. Устойчивость неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле с непараллельными силовыми линиями

Примем, что силовые линии магнитного поля лежат в плоскости  $(y, z)$  и малый угол наклона их  $\theta(x)$  (по отношению к оси  $z$ ) меняется с координатой  $x$ . Тогда непараллельность силовых линий (ниже для краткости обозначим НСЛ) может привести к двум стабилизирующим эффектам:

1. Благодаря тому, что при движении волнового пакета вдоль оси  $x$  его фазовая скорость вдоль силовых линий  $\omega/k_{||}(x)$  ( $k_{||} = k_z + k_y \int \frac{d\theta}{dx} dx$ ) сильно уменьшается и становится сравнимой с тепловой скоростью ионов  $V_{Ti}$ , пакет подвержен сильному затуханию Ландау на ионах. Условие стабилизации можно записать просто в виде\*

$$\int \frac{d\theta}{dx} dx \gtrsim \frac{\omega}{k_{\perp} V_{Ti}} \sim \frac{r_i}{R} \quad (63)$$

\* Стабилизация дрейфовой неустойчивости была предложена Розенблютом [30]. Подробное исследование этого вопроса содержится в работе [26].

2. В области локализации пакета для некоторых длин волн всегда можно пренебречь ионным затуханием Ландау ( $\frac{\omega}{k_{||}} \gg V_{Ti}$ ), но из-за НСЛ область прозрачности плазмы  $\Delta X$ , сильно зависящая от величины  $k_{||}(x)$ , сужается настолько, что в ней не умещается ни одна длина волны колебания  $\lambda_x$ , и существование подобных возмущений становится полностью невозможным. Это приводит к стабилизации неустойчивости при условии

$$\Delta X \lesssim \lambda_x \quad (64)$$

(данный механизм стабилизации полностью аналогичен «выдавливанию уровня» из-за сужения потенциальной ямы в обычной квантовой механике при том же условии).

Первый стабилизирующий эффект сказывается на универсальной неустойчивости относительно низкочастотных ( $\omega \ll \omega_H$ ) потенциальных возмущений в области частот  $k_z V_{Ti} < \omega \ll k_z V_A$ . Баланс энергии в системе волна + частицы плазмы с учетом затухания Ландау на ионах, описываемого полувывчетами в интегралах с ионной функцией распределения  $f_i^{(0)}$  в (51), записывается в виде, аналогичном (5),

$$\frac{d\omega}{dt} = \int dr \frac{e^2 E_z^2 \omega^2 n_0 m_e^{1/2}}{k_z^2 \sqrt{2\pi T^3}} \left[ 1 - \frac{\omega_n}{\omega} + F \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left( 1 + \frac{\omega_n}{\omega} \right) \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 V_{Ti}^2}\right) \right]$$

Отсюда непосредственно следует, что при  $\frac{\omega}{k_z V_{Ti}} \lesssim 1$  волна затухает. Как видно из (63), наиболее трудно стабилизируются возмущения с малой возможной областью локализации, такой, что в ней не успевает сильно уменьшиться длина волны  $\lambda_{||}(x)$ . Можно показать, что подобные малые области локализации находятся вблизи «точки поворота»  $x_1$ , где  $k_x(x_1) = 0$ , и имеют ширину  $\Delta x = r_i^{1/3} R^{2/3}$ , так что из (63) получаем критерий стабилизации универсальной неустойчивости [26]\*

$$R \frac{d\theta}{dx} > \frac{1}{4} \left(\frac{r_i}{R}\right)^{2/3} \quad (65)$$

Этот критерий справедлив и для неустойчивости, рассмотренной в конце предыдущего раз-

\* При малых  $\beta = \frac{8\pi n T}{H^2} < \left(\frac{r_i}{R}\right)^{2/3}$  для длинноволновых возмущений  $\lambda \gg r_i$  этот критерий несколько ослабляется вследствие случайных причин и имеет вид [26]

$$R \frac{d\theta}{dx} > \left(\frac{r_i}{R}\right)^{1/2} \beta^{1/4} \left(\ln \sqrt{\frac{m_i}{m_e \beta}} - 1\right)^{1/2}$$



дела, так как движение ионов описывается кинетическим уравнением, а их резонансное взаимодействие с волной приводит к ее затуханию.

Для непотенциальных возмущений с частотами  $\omega > k_z V_A$  в отличие от потенциальных во всей возможной области локализации пакетов волн можно пренебречь затуханием Ландау на ионах. Поэтому механизм стабилизации неустойчивости относительно непотенциальных возмущений, имеющей место при наличии градиента температуры  $\eta < 0$ , заключается в выдавливании уровней при условии (64), которое в этом случае принимает вид [26]

$$R \frac{d\theta}{dx} > \sqrt{|\beta| |\eta|}. \quad (66)$$

### 3. Обсуждение нелинейных эффектов

Результаты линейной теории устойчивости равновесия неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле показывают, что по крайней мере в магнитных ловушках с большим ларморовским радиусом ( $r_l/R$  не слишком мало) дрейфовые неустойчивости с длинами волн  $r_e \beta^{-1/2}$  трудно стабилизировать с помощью НСЛ и они по существу остаются универсальными. Важно знать, насколько возникающие вследствие этой неустойчивости пульсации ухудшают магнитное удержание плазмы.

Как и для низкотемпературной плазмы, влияние флуктуаций электрического и магнитного полей на перераспределение частиц учтем с помощью квазилинейного метода [9]. В наиболее интересном случае почти аperiодической неустойчивости ( $\nu \approx \omega$ ) разбиение в этом методе функции распределения ионов на быстро осциллирующую и медленно меняющуюся части не совсем строго, и рассмотрение носит качественный характер.

Для электронов пределы применимости метода несколько шире и даются выражением  $\nu \ll |k_z| V_{Te}$ .

Рассмотрим для простоты случай  $T_i(x) = T_e(x) = \text{const}$ . Удобно, кроме того, ограничиться дрейфовым приближением, в котором кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{[E\mathbf{H}]}{H^2} \nabla f + v_z \frac{H}{H} \nabla f + \frac{eE_z}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0.$$

Поля представим в виде

$$E_y = \sum_k E_{ky} e^{i\omega_k t + ikr} + \text{к.с.},$$

причем связь между  $E$ ,  $\mathbf{H}$  для неустойчивости (56) дается формулами:

$$E_{kx} = \frac{k_x}{k_y} E_{ky}; \quad E_{kz} = \left( 1 - \frac{\omega(\omega + \omega_n)}{k_z^2 V_A^2} \right) E_{ky};$$

$$H_{ky} = -\frac{k_x}{k_y} H_{kx}; \quad H_{kx} = \frac{c(\omega + \omega_n)}{k_z V_A^2} E_{ky}.$$

После обычной процедуры [8, 9] получаем усредненное уравнение для медленно меняющейся части

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_k & \left( \frac{c}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m} \cdot \frac{k_z}{k_y} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \\ & \times \frac{v_k |E_{ky}|^2}{(\omega + k_z V_z)^2 + \nu^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 + \omega \omega_n}{k_z^2 V_A^2} \right) \left( \frac{c}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{e}{m} \cdot \frac{k_z}{k_y} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \right) f_0 \equiv \text{St}_v \{f\}. \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь член  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_k \left( \frac{cE_{ky}}{H} \right)^2 \frac{v_k}{(\omega + k_z V_z)^2 + \nu^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 + \omega \omega_n}{k_z^2 V_A^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} f_0 \right]$  описывает «аномальную» диффузию. «Перекрестный» член, содержащий  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v_z}$ , тоже дает поток частиц по  $x$ . Можно

показать, что он в оптимальном случае вносит такой же вклад по порядку величины, как и член с  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ . Слагаемое с  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_z^2}$  ответственно за «диффузию» в пространстве скоростей. Назовем всю правую часть ( $\text{St}_v \{f\}$ ) Stoss членом «волны — частицы». Точное выражение этого квазилинейного Stoss — члена для общего случая произвольного соотношения длины волны пульсаций и ларморовского радиуса — получено в работе [31] методом интегрирования по траекториям частиц.

Основной вклад в аномальную диффузию будут вносить коротковолновые возмущения ( $kr_l \gg 1$ ) с длиной волны  $\lambda \approx r_e \beta^{-1/2}$ . Это обстоятельство связано с тем, что именно для таких возмущений инкремент достигает максимума, причем  $\nu \sim \omega$ . До сих пор предполагали, что распределение электронов по скоростям близко к максвелловскому. На самом деле, как следует из квазилинейного уравнения (67), как раз для резонансных электронов ( $v_z \approx \frac{\omega}{k_z}$ ) вид функции

распределения под действием волн может исказиться. Поэтому все выражения для инкремента, предполагающие существование максвелловского распределения электронов по ско-

ростам, справедливы лишь в том случае, если столкновения между электронами, хотя и редки, но успевают восстанавливать максвелловское распределение. Формально это означает, что в уравнении (67) нужно иметь в виду и обычный Stoss — член, учитывающий столкновения между электронами ( $St_e \{f\}$ ), причем  $St_e \{f\} > St_B \{f\}$ . В общем случае, когда член  $St_B \{f\}$  уже не мал по сравнению с кулоновским, вид функции распределения электронов в области скоростей  $v_z \approx \frac{\omega}{k_z} < V_A$  нужно определять из уравнения (67). Инкремент  $\nu$  в общем случае произвольного распределения  $f_e(v_z)$  имеет вид

$$\nu = \pi \frac{\omega T}{|k_z| e} \left( \frac{ek_z}{m} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial v_z} - \frac{ck_y}{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (68)$$

Выведем сначала общее выражение для коэффициента диффузии. Для этого уравнения (67) проинтегрируем по  $v_z$ . Если при этом воспользоваться формулой (68) для инкремента, то можно получить (для  $\nu \ll \omega$ ) уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_k \left( \frac{cE_{\perp y}}{H} \right)^2 \frac{v_k}{\omega_k^2} \cdot \frac{1}{kr_i} \right] \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (69)$$

Разумеется, при  $\nu \approx \omega$  выражение для коэффициента диффузии

$$D = \sum_k \left( \frac{cE_y}{H} \right)^2 \frac{v_k}{\omega_k^2} \cdot \frac{1}{kr_i} \quad (70)$$

становится неточным и пользоваться им будем лишь для оценки порядка величины.

Самый трудный этап решения задачи заключается в нахождении спектра турбулентности  $|E_k|^2$ . Квазистационарный спектр пульсаций, который устанавливается после развития неустойчивости, — результат действия двух факторов: 1) вследствие неустойчивости энергия непрерывно накачивается в те моды пульсаций, которые неустойчивы ( $\nu_k > 0$ ); 2) из-за нелинейного взаимодействия между модами энергия передается по спектру в область, где  $\nu_k < 0$ , и диссипируется. Строго описать этот процесс с помощью кинетического уравнения для взаимодействующих волн в принципе можно, лишь когда  $\nu \ll \omega$ . Здесь проведем нестрогую\* оценку порядка величины пульсаций, исходя из следующих наглядных физических соображений.

\* В наиболее интересном случае громоздкий подход, использующий кинетическое уравнение для волн, вряд ли может претендовать на большую точность.

Рассмотрим два случая:

1.  $St_e \{f\} > St_B \{f\}$ , когда для инкремента можно использовать выражение (52): Если предположить турбулентный «фон» как суперпозицию различных гармоник масштабов  $k$ , то процесс установления спектра на «языке» (рис. 3) будет

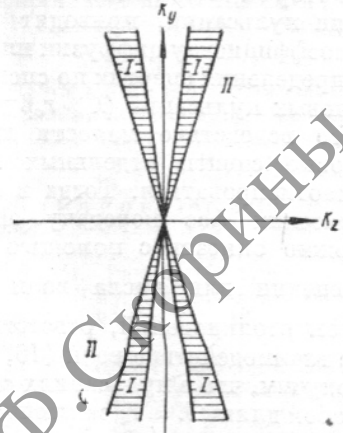


Рис. 3. Картина распределения турбулентных пульсаций в пространстве волновых векторов.

происходить следующим образом. Неустойчивость раскачивает волны с  $k$ , лежащими внутри области I. Нелинейное взаимодействие между такими волнами приводит к «рождению» флуктуаций с  $k$ , лежащими в области II, где имеется сильное затухание из-за ионов. Когда скорости обоих процессов становятся одного порядка величины, устанавливается квазистационарная картина. Наибольший нелинейный член в кинетическом уравнении для ионов имеет вид  $\frac{eE_{\perp}}{m_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$ . Сравнивая его с линейным членом  $\nu f \approx \frac{eE_{\perp}}{m_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$  и принимая  $\frac{\partial f}{\partial v} \approx \frac{f}{V_{Ti}}$ , получим оценку для амплитуды электрического поля

$$E_{\perp} \approx \frac{\bar{\nu} m_i V_{Ti}}{e}, \quad (71)$$

где под  $\bar{\nu}$  разумно понимать максимальный инкремент [достигаемый при  $kr_i \approx \left(\frac{m_i}{m_e} \beta\right)^{1/2}$ ]. Теперь для коэффициента диффузии будем иметь

$$D_{(1)} \approx \sum_k \left( \frac{cE_{ky}}{H} \right)^2 \frac{v_k}{\omega_k^2} \cdot \frac{1}{kr_i} \approx \frac{c^2 E_{\perp}^2}{H^2} \cdot \frac{\bar{\nu}}{\omega^2} \cdot \frac{1}{kr_i} \approx \frac{cT}{eH} \cdot \frac{r_i}{R} \left( \frac{m_e}{m_i \beta} \right)^{1/2}, \quad (72)$$

где  $R^{-1} \approx \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dx}$ . Эта оценка, хотя и не претендует на точность численного коэффициента, по-видимому, правильно отражает буквенную зависимость. Интересно отметить, что турбулентные пульсации с характерным размером  $\lambda \approx r_i$ , в которых заключена основная доля всей энергии пульсаций, приводят к гораздо меньшему коэффициенту диффузии плазмы. Для оценки распределения энергии по спектру таких длинноволновых пульсаций ( $\lambda \gg r_e \beta^{-1/2}$ ) можно считать, что вследствие малости инкремента  $\nu \ll \omega$  фазовые сдвиги отдельных пульсаций успевают хаотизироваться. Тогда в приближении хаотических фаз передачу энергии по спектру можно описать с помощью кинетического уравнения для числа волн  $n_k = \frac{\omega_k}{\omega_h}$  с интегралом столкновений, ответственным за нелинейное взаимодействие волн [16, 27]. В результате получим, что в пульсациях с характерным масштабом длины  $\lambda \approx r_i$  заключена энергия

$$\omega \approx \frac{ne^2}{2T} \sum_k \Phi_k^2 \approx \frac{n_0 T_0}{200} \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \frac{\nu_k}{\omega_k}.$$

Подставляя это значение в (70), получим коэффициент диффузии

$$D \approx \frac{1}{100} \cdot \frac{cT}{eH} \cdot \frac{r_i}{R} \cdot \frac{m_e}{m_i \beta}.$$

2. Интересная ситуация возникает в противоположном предельном случае  $St_B \{f\} \gg St_C \{f\}$ , который осуществляется при достаточно больших температурах, когда кулоновские столкновения становятся очень редкими. Оказывается, в этом случае мы освобождаемся от самого трудного этапа — рассмотрения нелинейного взаимодействия волн. Действительно, в коэффициенте диффузии входит уже сильно заниженное значение инкремента  $\nu$

$$D \approx \frac{c^2 E_z^2}{4T^2} \cdot \frac{\bar{\nu}}{\omega^2} \cdot \frac{1}{kr_i}. \quad (73)$$

Чтобы найти  $\nu$ , надо знать вид функции распределения в области резонансных скоростей

$\nu_e \approx \frac{\nu}{k_z} \ll V_A$ . Так как  $St_B \{f\} \gg St_C \{f\}$ , будем искать решение для  $f$  в резонансной области в виде  $f = f_0 + f_1 + \dots$ , где нулевое приближение  $f_0$  удовлетворяет уравнению

$$St_B \{f_0\} = 0. \quad (74)$$

Решение этого уравнения дает установившееся плато в пространстве  $(x, v_z)$ , так что

$$\nu^0 \{f\} = \pi \frac{\omega T}{|k_z| e} \left( \frac{ek_z}{m_e} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \frac{ck_y}{H} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) = 0. \quad (75)$$

Находя  $f_1$  из уравнения

$$St_B \{f^{(1)}\} = St_C \{f_0\} = 0$$

и учитывая при этом, что сама величина  $f_0$  (а не ее производные по  $v_z$ ) мало отличается от максвелловской, получим

$$\nu^{(1)} = \frac{\nu_e \nu_M}{D_\nu(v_z)}, \quad (76)$$

где  $\nu_M$  — значение инкремента для максвелловской функции распределения  $D_\nu = \frac{e^2 E_z^2}{m^2 \omega}$ . Теперь из (73) и (76) получим коэффициент аномальной диффузии

$$D_{(2)} = \nu_e R^2 \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}. \quad (77)$$

Области применимости указанных двух предельных случаев можно сформулировать теперь так. В первом случае

$$D_{(1)} \gg D_{(2)}$$

и наоборот. Для параметров  $n \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $H = 6 \cdot 10^4 \text{ гс}$  граница, разделяющая оба случая, лежит в области  $T \approx 10^4 \text{ эв}$ , т. е. при больших температурах необходимо пользоваться формулами второго случая.

Все эти результаты применимы, если  $\beta$  заключено в интервале

$$\left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} > \beta > \frac{m_e}{m_i}.$$

В настоящем разделе рассмотрен лишь наиболее интересный случай диффузии плазмы из-за развития универсальной неустойчивости, имеющей место при любых градиентах плотности. Апериодическая неустойчивость относительно возмущений с частотами  $\omega$  вблизи гармоник ионной циклотронной частоты  $\omega_H$  [28] в некоторой области параметров плазмы  $\beta$ ,  $r_i$  и больших градиентах плотности может вносить сравнимый вклад в диффузию, но не превышает существенно вклада от универсальной неустойчивости. Мы не останавливались также на случае, промежуточном между гидродинамическим и кинетическим описаниями плазмы, так как это просто дало бы плавный переход между значениями коэффициента диффузии в этих двух предельных случаях.

Дрейфовые неустойчивости в известном смысле можно назвать универсальными. Они остаются и в плазме, в которой могут быть подавлены магнитогидродинамические неустойчивости. Однако, как мы видели, можно представить ситуацию, когда плазма устойчива и относительно



раскачки дрейфовых волн. В «холодной» плазме стабилизирующим фактором является присутствие нейтрального газа (что и приводит к явлению «критического» поля).

Другой стабилизирующий фактор связан с тем обстоятельством, что дрейфовые волны сильно «вытянуты» вдоль силовой линии магнитного поля. В случае, когда объем, занимаемый плазмой, ограничен вдоль  $H$ , она будет устойчивой. Так, если представить себе плазму в виде шнура вдоль  $H$ , то для устойчивости необходимо, чтобы длина такого шнура была меньше примерно десяти радиусов. Это условие нетрудно выполнить для плазмы в магнитных ловушках зеркального типа («в пробкотроне»). Гораздо труднее достичь его в ловушках типа топологического тора (в стеллараторе). Здесь для стабилизации может понадобиться заметный поворот силовых линий (НСЛ; см. разд. 2).

Поступила в Редакцию 17/VI 1963 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1960.
2. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. «Усп. физ. наук», **73**, 701 (1961).
3. В. В. Кадомицев, А. V. Nedospasov. Nucl. Energy, Part C, **1**, 230 (1960).
4. A. Guthrie, R. Wakerling. The Characteristics of Electrical Discharge in Magnetic Field. N. Y., 1949.
5. Б. Б. Кадомицев. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1688 (1962).
6. F. No. h. Rev. Mod. Phys., **34**, 267 (1962).
7. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 903 (1963).
8. У. Драммонд, Д. Пайнс. Доклад № 134, представленный на Международную конференцию по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Зальцбург, МАГАТЭ, 1961.
9. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. «Ядерный синтез», **1**, 82 (1962).
10. С. И. Брагинский. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 645 (1957).
11. Л. И. Рудаков. «Ядерный синтез», **2**, 107, (1962).
12. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 763 (1963).
13. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев. Препринт Института ядерной физики СО АН СССР и Новосибирского государственного университета. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963.
14. В. Б. Кадомицев. «Ж. техн. физ.», XXXI, 1209 (1961).
15. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, В. Н. Ораевский. Препринт Института ядерной физики СО АН СССР. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963.
16. А. А. Галеев, В. И. Карпман. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 592 (1963).
17. А. В. Жаринов. «Атомная энергия», **7**, 215, 229 (1959).
18. W. Stodiek, R. E. Ellis, J. Gorman. Nucl. Fusion, Suppl., Part I, 193 (1962).
19. R. Motley. Nucl. Fusion, Suppl., Part I, 199 (1962).
20. N. Angelo, N. Kuhn. Phys. of Fluids, **4**, 1303 (1961).
21. Geller. Phys. Rev. Lett., **15**, 286 (1962).
22. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев. «Докл. АН СССР», **138**, 581 (1961); см. [8], доклад № 220; Б. Б. Кадомицев, А. К. Тимофеев. «Докл. АН СССР», **135**, 581 (1962); А. Б. Михайловский, Л. И. Рудаков. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 912 (1963).
23. M. Rosenbluth, N. Krall, N. Rostoker. Nucl. Fusion, Suppl. part. 1, 75 (1962).
24. N. Krall, M. Rosenbluth. Low-Frequency Stability of Non-Uniform Plasmas. Preprint, 1962.
25. А. А. Галеев. «Докл. АН СССР», **150**, 503 (1963).
26. А. А. Галеев. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 1920 (1963).
27. M. Samas et al. Nucl. Fusion, Suppl., part II, 423, (1962).
28. А. Б. Михайловский, А. К. Тимофеев. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 919 (1963).
29. А. М. Фридман. «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», **6** (1963).
30. M. Rosenbluth, R. Sagdeyev. Discussion of Plasma stability., Conf., Harwell, 17—22 Sept., 1962.
31. В. Н. Ораевский. Диссертация. Новосибирск, 1963.



УДК 621.384.60

## Измерение апертуры пучка без его разрушения в камере ускорителя

И. П. Карабеков

### Введение

Описывается методика, позволяющая без разрушения пучка получать информацию о размерах его поперечного сечения. Экспериментальные результаты, полученные при измерениях поперечного размера электронного пучка, хорошо согласуются с расчетными данными.

В настоящее время исследуется возможность создания самоуправляющихся (кибернетических) ускорителей [1], в которых для коррекции магнитной и ускоряющей систем исполь-