Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

Математика

УДК 512.542

О пересечении не $\mathfrak{F}$-подгрупп, выделяемых подгрупповым функтором

Р.В. Бородич, М.В. Селькин

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер ненильпотентных максимальных A-допустимых θ-подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.
Ключевые слова: конечная группа, абнормальная подгруппа, подгруппа Фиттинга.

The structure of a subgroup equal to the intersection of kernels Non-nilpotent Maximal A-admissible θ-subgroups that do not contain a subgroup Fitting is analyzed. The influence of the corresponding generalized subgroup Frattini on the structure of the group itself was established.
Keywords: finite group, abnormal subgroup, Fitting subgroup.

1. Введение. Все рассматриваемые нами группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп является классической задачей. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 г. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографию М.В. Селькина [2]). Одной из задач этого направления является исследование пересечений максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп. Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [2], Л.И. Шидова [3], В.В. Шлыка [4], А. Гилотти и У. Тиберио [5]–[6]. К данному направлению относится и настоящая работа.

2. Определения и обозначения. Максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

В дальнейшем для каждой группы G будем фиксировать некоторую ее группу операторов. Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [5] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-

функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

В случае, когда θ тривиальный функтор, то подгруппа $\Phi_{\theta}(G, A)$ совпадает с подгруппой $\Phi(G, A)$, некоторые свойства которой были описаны Л.Я. Поляковым в [6]. Если функтор θ абнормальный, то подгруппу $\Phi_{\theta}(G, A)$ будем обозначать $\Delta(G, A)$ (операторный аналог подгруппы Гашюца $\Delta(G)$, введенной в [2]). Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Пусть θ – некоторый подгрупповой функтор и $\mathfrak{X}$ – класс групп. Для любой группы G положим $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{X}}(G, A)$ совпадает с пересечением ядер A-допустимых θ-подгрупп, не принадлежащих классу $\mathfrak{X}$. Если в группе G нет максимальных подгрупп M с отмеченным выше свойством, то полагаем $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{X}}(G, A) = G$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{X}}(G, A) = \Phi_{\theta}(G, A)$ для любой группы G. Если $\theta(G)$ содержит все максимальные подгруппы группы G, не принадлежащие $\mathfrak{X}$, то положим $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{X}}(G, A) = \Phi^{\mathfrak{X}}(G, A)$.

3. Вспомогательные результаты.

3.1 Лемма [6]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если G обладает свойством C_{π}, то G содержит A-допустимую S_{π}-подгруппу.*

3.2 Лемма [7]. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Если K – A-допустимая подгруппа группы G, то $N_G(K)$ является A-допустимой подгруппой группы G.*

3.3. Лемма [2]. *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

3.4 Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа $\Phi_{\theta}(G, A)$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(\Phi_{\theta}(G, A))$. По лемме 3.1 в $\Phi_{\theta}(G, A)$ существует A-допустимая p-силовская подгруппа P. По лемме Фраттини

$$G = N_G(P)\Phi_{\theta}(G, A).$$

По лемме 3.2 подгруппа $N_G(P)$ A-допустима. Если $N_G(P) = G$, то P нормальна в G, а значит, нормальна и в $\Phi_{\theta}(G, A)$. Пусть $N_G(P) \neq G$, тогда по лемме 3.3 $N_G(P)$ является абнормальной подгруппой. Следовательно, $N_G(P)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой θ-подгруппе M. Из леммы Фраттини и определения $\Phi_{\theta}(G, A)$ следует, что $\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq M$, а значит, $M = G$. Получили противоречие с предположением. Итак, любая силовская подгруппа из $\Phi_{\theta}(G, A)$ нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа $\Phi_{\theta}(G, A)$ нильпотентна. Лемма доказана.

3.5 Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, N и K – A-допустимые подгруппы группы G и $K \subseteq \Phi_\theta(G,A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $F_p(N/K)=F_p(N)/K$;

2) $F(N/K)=F(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную p-подгруппу H/K. Так как $K \subseteq \Phi_\theta(G,A)$, то по лемме 3.4 K нильпотентна. Нетрудно заметить, что p'-подгруппа R из K является p'-подгруппой в H. По теореме Силова H содержит p-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По обобщенной лемме Фраттини $G=N_G(S)H$. С учётом того, что $H=SR$, получаем, $G=N_G(S)R$. Так как S есть p-подгруппа в N, а подгруппа N A-допустима, то S A-допустима. Тогда по лемме 3.2 подгруппа $N_G(S)$ A-допустима и по лемме 3.3 является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой максимальной A-допустимой θ-подгруппе M из G. Поэтому $G=MR$. Так как $R \subseteq \Phi_\theta(G,A) \subseteq M$, то $G=M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

3.6 Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор и $\Phi_\theta(G,A) \neq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $\Phi_\theta(G,A) \subseteq F(G)$;

2. если G – разрешимая неединичная группа, то $\Phi_\theta(G,A) \subset F(G)$.

Доказательство. Из леммы 3.3 следует, что $\Phi_\theta(G,A)$ является нильпотентной подгруппой. Следовательно, $\Phi_\theta(G,A) \subseteq F(G)$. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $G/\Phi_\theta(G,A)$ разрешима и неединична. Пусть $B/\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$. Так как $B/\Phi_\theta(G,A)$ – p-группа для некоторого простого p, то по лемме 3.5 B является нильпотентной, а это значит, что $B \subseteq F(G)$. Следовательно, $\Phi_\theta(G,A) \subset F(G)$.

3.7. Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – подгрупповой функтор, $\mathfrak{X}$ – гомоморф. Если $N \lhd G$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)N/N \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G/N,A)$.*

Доказательство. Если M/N – максимальная A-допустимая подгруппа из $\theta(G/N)$, не принадлежащая $\mathfrak{X}$, то из регулярности функтора θ следует, что M – максимальная A-допустимая θ-подгруппа группы G, не принадлежащая гомоморфу $\mathfrak{X}$. Следовательно, $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)N/N \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G/N,A)$. Лемма доказана.

3.8. Лемма. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{X}$ – гомоморф, θ – подгрупповой функтор. Если $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$, то выполняются следующие утверждения:*

1) $G=\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)M$, где M – A-допустимая θ-подгруппа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}$;

2) если G разрешима и θ – абнормально полный подгрупповой функтор, то $G=QM$, где Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа группы G, q – простое число и M A-допустимая θ-подгруппа группы G, принадлежащая классу $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Так как $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$, то найдётся максимальная A-допустимая подгруппа M из $\theta(G)$, принадлежащая $\mathfrak{X}$ такая, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$ не содержится в М. Следовательно, $G=M\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G,A)$.

Докажем второе утверждение. Пусть G разрешима. Рассмотрим $G/\Phi_{\theta}(G,A)$. Применяя лемму 3.7, так как $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{X}}(G,A)/\Phi_{\theta}(G,A)$ разрешима, то в $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{X}}(G,A)/\Phi_{\theta}(G,A)$ найдётся неединичная характеристическая q-подгруппа $Q/\Phi_{\theta}(G,A)$ для некоторого простого $q\in\pi(\Phi_{\theta}^{\mathfrak{X}}(G,A)/\Phi_{\theta}(G,A))$. Если предположить, что $Q/\Phi_{\theta}(G,A)$ содержится во всех максимальных A-допустимых θ-подгруппах, принадлежащих $\mathfrak{X}$, то $Q/\Phi_{\theta}(G,A)\subseteq\Phi_{\theta}(G,A)/\Phi_{\theta}(G,A)$. Получили противоречие. Значит, найдется максимальная A-допустимая θ-подгруппа $M/\Phi_{\theta}(G,A)$, принадлежащая $\mathfrak{X}$ такая, что $M/\Phi_{\theta}(G,A)\cdot Q/\Phi_{\theta}(G,A)=G/\Phi_{\theta}(G,A)$. Отсюда получаем, что $G=MQ$. Из регулярности функтора θ следует, что $M\in\theta(G)$. Если предположить, что $M\notin\mathfrak{X}$, то $M\supseteq Q$ и $G=M$, значит, $M\in\mathfrak{X}$. Далее $Q=Q_1\Phi_{\theta}(G,A)$, где Q_1 – A-допустимая силовская q-подгруппа в Q.

По лемме Фраттини $G=QN_G(Q_1)=Q_1\Phi_{\theta}(G,A)N_G(Q_1)=\Phi_{\theta}(G,A)N_G(Q_1)$. Предположим, что $N_G(Q_1)\neq G$, тогда $N_G(Q_1)$ содержится в некоторой максимальной A-допустимой абнормальной подгруппе K группы G. Ввиду того, что θ – абнормально полный подгрупповой функтор, имеем $G=\Phi_{\theta}(G,A)K=K$. Получили противоречие. Следовательно, Q_1 – A-допустимая нормальная q-подгруппа группы G. Лемма доказана.

3.9. Лемма [9]. *Пусть p – простое нечётное число. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P, характеристической в некоторой силовской p-подгруппе группы G, $N_G(P)/C_G(P)$ p-подгруппа.*

3.10. Теорема [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N\cap\Phi_{\theta}(G,A)\in\mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N=N_1\times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $N_2\subseteq\Phi_{\theta}(G,A)$.

3.11. Теорема [11]. *Suppose that G has a group of operators A such that $(|G|,|A|)=1$ and $p>2$, θ is an abnormal complete functor. Then either G has no p-nilpotent maximal A-admissible θ-subgroups and $\overline{\Phi}_{\theta}^{p}(G,A)=\Phi_{\theta}(G,A)$ or G is p-solvable.*

4. Основные результаты.

4.1 Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – гомоморф, θ – абнормально полный регулярный m-функтор и G – разрешимая группа такая, что $\Phi_{\theta}(G,A)\subset\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\subset G$. Если все максимальные подгруппы из $\theta(G)$ принадлежащие $\mathfrak{F}$, сопряжены, то $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)=QN$, где Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа, q – простое число, а N – A-допустимая нильпотентная подгруппа.*

Доказательство. По лемме 3.8, $G=QM$, где M – A-допустимая θ-подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$, Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа (q – некоторое простое число) группы G, содержащаяся в $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)$.

Пусть M_0 – добавление к Q в G. Тогда по лемме 11.1 из [8] $Q\cap M_0\subseteq\Phi(M_0)$. По тождеству Дедекинда получаем, что

$$\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)=\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap QM_0=Q(\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap M_0).$$

Если T = $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) \cap M_0$ не содержится в $\Delta(M_0)$ то найдётся абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа H в M_0 такая, что $M_0 = TH$. Покажем, что QH – A-допустимая максимальная подгруппа группы G. Предположим противное. Пусть в G имеется A-допустимая максимальная подгруппа S такая, что $QH \subset S \subset G$. Тогда $S = QM_0 \cap S = Q(M_0 \cap S)$. Так как $M_0 \cap S \supseteq H$ и H – A-допустимая максимальная подгруппа группы M_0, получаем, что $M_0 \cap S = H$ или $M_0 \cap S = M_0$. В первом случае $S = QH$, во втором $S = G$. Противоречие с выбором S. Следовательно, QH – A-допустимая максимальная подгруппа в G. Так как H абнормальна в M_0, то QH абнормальна в G, а значит, $QH \in \theta(G)$. Из того, что Q не содержится в M по теореме Оре следует, что QH не сопряжена с M. Поэтому $QH \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, $QH \supseteq \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) \supseteq T$. Поэтому $G = QM_0 = QTH = QH$, получили противоречие. Значит, $T \subseteq \Delta(M_0, A)$. По лемме 3.4 T нильпотентна. Теорема доказана.

В случае, когда $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, получаем следующее:

4.1.1 Следствие. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – гомоморф, G – разрешимая группа такая, что $\Phi(G,A) \subset \Phi^{\mathfrak{F}}(G,A) \subset G$. Если все максимальные A-допустимые подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, сопряжены, то $\Phi^{\mathfrak{F}}(G,A) = QN$, где Q – A-допустимая нормальная q-подгруппа, q – простое число, а N – A-допустимая нильпотентная подгруппа.*

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп, а группа операторов A тривиальна, то получаем теорему 2 из [6].

Если в теореме 4.1 $\theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп, то имеет место следующее:

4.1.2 Следствие. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – гомоморф, G – разрешимая группа такая, что $\Delta(G,A) \subset \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) \subset G$. Если все абнормальные A-допустимые максимальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, сопряжены, то $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) = QN$, где Q – нормальная q-подгруппа, а N – A-допустимая нильпотентная подгруппа.*

4.2 Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если G – разрешимая группа и $\Phi_{\theta}(G,A) \subset \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq F(G) \subset G$, то $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) / \Phi_{\theta}(G,A)$ – главный фактор группы G, дополняемый A-допустимой максимальной подгруппой, принадлежащей формации $\mathfrak{F}$. В частности, $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) = G^{\mathfrak{F}}\Phi_{\theta}(G,A)$.*

Доказательство. Пусть разрешимая группа G удовлетворяет условиям теоремы. Если $G \in \mathfrak{F}$, то нетрудно видеть, что $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) = G$, что противоречит $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq F(G) \subset G$. Будем считать, что G не принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $H / \Phi_{\theta}(G,A)$ – минимальная нормальная A-допустимая подгруппа группы $G / \Phi_{\theta}(G,A)$, содержащаяся в $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) / \Phi_{\theta}(G,A)$. Тогда найдется A-допустимая максимальная подгруппа M в группе G такая, что $M \in \theta(G)$, $G = HM$ и $H \cap M = \Phi_{\theta}(G,A)$. Так как $G = \Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)M$, $M \in \mathfrak{F}$, то $G / H = MH / H \simeq M / (M \cap N) \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K / \Phi_{\theta}(G,A)$ – минимальная нормальная A-допустимая подгруппа в $G / \Phi_{\theta}(G,A)$, также содержащаяся в $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A) / \Phi_{\theta}(G,A)$, и отличная от $H / \Phi_{\theta}(G,A)$. Рассуждая, как и выше, получаем, что $G / K \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G / (K \cap H) = G / \Phi_{\theta}(G,A) \in \mathfrak{F}$. Из теоремы 3.10 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $H/\Phi_\theta(G,A)$ – единственная минимальная A-допустимая нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G,A)$, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$. Учитывая согласно лемму 3.6 и то, что $\Phi(G)\subseteq\Phi_\theta(G,A)$ и $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq F(G)$, получаем, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ – абелева p-группа для некоторого простого числа p.

Несложно заметить, что $(\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A))\cap(M/\Phi_\theta(G,A))=(\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap M)/\Phi_\theta(G,A)$ – нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$.

Так как H не содержится в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap$M, то $\Phi_\theta(G,A)^{\mathfrak{F}}\cap M=\Phi_\theta(G,A)$. Следовательно, $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)=H$.

Из предыдущих рассуждений следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $(G/\Phi_\theta(G,A))^{\mathfrak{F}}=G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ совпадает с $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$, то есть $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)=G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G,A)$. Теорема доказана.

Если $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, группа операторов A тривиальна и $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп, то из теоремы 4.2 вытекает теорема 4 из [6].

В случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп, будем вместо $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)$ использовать обозначение $\Phi_\theta^{p}(G)$.

4.3 Теорема. *Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если $\Phi_\theta^{p}(G,A)$ не является p-нильпотентной группой для некоторого нечётного $p\in\pi(G)$, то $G=O_p(\Phi_\theta^{p}(G,A))M$, где M – максимальная A-допустимая p-нильпотентная θ-подгруппа.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.11, нетрудно видеть, что G является p-разрешимой группой. Пусть $D=\Phi_\theta^{p}(G,A)$. Так как D не p-нильпотентна, то по лемме 3.9 существует характеристическая подгруппа P^* в силовской p-подгруппе P группы D такая, что $N_D(P)/C_D(P)$ не является p-группой. Можно считать, что P^* – максимальная подгруппа с указанными выше свойствами.

Учитывая, что подгрупповой функтор θ является абнормально полным и $N_G(P^*)$ – абнормальная подгруппа в G, то $N_G(P^*)=G$. Отсюда следует, что $P^*\subseteq O_p(D)$. Предположим, что $P^*\subset O_p(D)$, тогда $N_D(O_p(D))/C_D(O_p(D))$ – p-группа, а значит, $D/C_D(O_p(D))$ – p-группа. Из $C_D(O_p(D))\subseteq O_p(D)$ получаем, что $D/O_p(G)$ – p-группа, значит D – p-группа, противоречие. Следовательно, $P^*=O_p(D)$.

Если $D/O_p(D)$ – p-нильпотентна, то в $D/O_p(D)$ имеется нормальная холловская p'-подгруппа $K/O_p(D)$. Тогда K нормальна в G и $O_p(D)$ нормальна в K. По теореме Шура-Цассенхауза существует холловская p'-подгруппа T из K такая, что $K=O_p(D)A$. По лемме Фраттини $G=KN_G(A)$.

Если $O_p(D)\subseteq\Phi_\theta^{p}(G,A)$, то $G=KN_G(A)=O_p(D)TN_G(T)=N_G(T)$. Следовательно, T нормальна в G. Но T – холловская p'-подгруппа из D, значит D – p-нильпотентна, противоречие. Следовательно, $O_p(G)$ не содержится в $\Phi^{p}(G,A)$ и получаем $G=O_p(D)M$, где M – A-допустимая максимальная p-нильпотентная θ-подгруппа группы G. Теорема доказана.

Если $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, то из теоремы 4.3 получаем:

4.3.1 Следствие. *Если* $\Phi^p(G, A)$ *не является* p*-нильпотентной группой для некоторого нечётного* $p \in \pi(G)$, *то* $G = O_p(\Phi^p(G, A))M$, *где* M *– максимальная* A*-допустимая* p*-нильпотентная подгруппа.*

Если $\theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, а группа операторов A является тривиальной, то из теоремы 4.3 получаем теорему 2 из [5].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск :Беларуская навука, 1997. – 144 с.
3. Шидов, Л. И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л. И. Шидов // Сиб. матем. журнал. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 682–683.
4. Шлык, В. В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В. В. Шлык // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.
5. Gilotti, A. On the intersection of certain class of maximal subgroups of a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Arch. Math. – 1998. –№ 71. – P. 89–94.
6. Gilotti, A. On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Bollettino U.M.I. – 2000. – Serie 8, Vol. 3-B. – P. 691–698.
7. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
8. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. :Наука, 1978. – 272 с.
9. Thompson, J. G. Normal p-complements for finite groups / J. G. Thompson // J. Algebra. – 1964. – V. 1. – P. 43–46.
10. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. . Бородич // Укр. мат. журнал. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.
11. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2020. – DOI: 10.1142 / S1793557121500261.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 19.10.2020