Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

*УДК 519.21*

# О свойствах одномерной квадратичной модели временной структуры доходности

Д.А. Павлив

Представлены результаты аналитического исследования одномерной квадратичной модели временной структуры доходности. Найдено аналитическое представление кривой доходности и форвардной кривой модели. Исследован частный случай одномерной модели, когда стационарное среднее процесса состояния рынка равно нулю в риск-нейтральной мере. Проведен анализ зависимости формы форвардной кривой от начального значения мгновенной процентной ставки, в результате которого сформулированы и доказаны три утверждения. Установлена линейная зависимость между значениями наклона форвардной кривой и волатильностью кривой доходности.
**Ключевые слова:** форвардная кривая, кривая доходности, волатильность, уравнение Риккати.

The paper presents the result of an analytical study of one-dimensional quadratic model of the term structure of yields. An analytical representation of the yield curve and the forward rate was found. A special case of one-dimensional model was investigated, when the steady state average of the market process is zero for the risk-neutral measure. The dependency analysis between the shape of the forward rate and initial value of the interest rate process was made, in the result of which three assertions were formulated and proved. A linear relationship between the slope of the forward curve and volatility of the yield curve was established.
**Keywords:** forward rate, yield curve, volatility, Riccati equation.

**Введение.** На текущий момент существует множество различных математических моделей, описывающих поведение процентных ставок. Наиболее популярными и изученными из них являются так называемые аффинные модели временной структуры доходности. Несмотря на свою популярность, данные модели оказываются неспособными описать поведение процентных ставок в реальном мире с необходимой точностью. Многие авторы, например, [1] или [2], предполагают, что более точные результаты можно получить, используя модели неаффинного класса. Одной из таких моделей является квадратичная модель, изучение свойств которой может представлять как теоретический, так и практический интерес.

**Определение модели.** Пусть состояние финансового рынка описывается неким одномерным процессом $X$, чье поведение определяется диффузионным уравнением [1]:

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(X)\mathrm{d}t + \sigma(X)\mathrm{d}W(t), \quad t > t_0,\ X(t_0) = x_0,$$

с функцией дрейфа $\mu(X)$ и волатильностью $\sigma(X)$, $W(t)$ – винеровский процесс. Предполагается, что краткосрочная ставка доходности $r(t)$ связана с состоянием финансового рынка $X(t)$ соотношением

$$r(X) = r_{\min} + \varphi X^2, \quad r_{\min} \in \mathrm{R}^1, \varphi \in \mathrm{R}^1. \tag{1}$$

Так как по экономическому смыслу процентная ставка должна быть положительной, справедливо ограничение $\varphi > 0$. В этом случае ветви параболы уравнения для $r(X)$ направлены вверх, что, в совокупности с ограничениями на коэффициент $r_{min}$, нижней границы возможных значений мгновенной процентной ставки, может гарантировать неотрицательность значений мгновенной процентной ставки. При этом следует отметить, что сам процесс $X(t)$ является ненаблюдаемым и, на текущий момент, ни в одной из известных работ авторы не предложили экономического обоснования данной величины. В то же время значения процесса процентной ставки $r(X)$ являются наблюдаемыми величинами.

Рассмотрим квадратичную модель для класса диффузионных процессов с линейной функцией дрейфа $\mu(X) = k(\theta - X)$ и постоянной волатильности $\sigma(X) = s$, [1]:

$$\mathrm{d}X(t) = k(\theta - X)\mathrm{d}t + s\mathrm{d}W(t), \quad t > t_0,\ X(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Отметим, что для того, чтобы процесс $X(t)$ был стационарным, коэффициент $k$ должен быть положительными.

Как правило, временную структуру доходности находят с помощью так называемого уравнения временной структуры для цен бескупонных облигаций [3], $P(r(X), t; T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial X}k(\theta-X)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}s^2-r(X)P(r(X),t;T)=\frac{\partial P}{\partial X}s\lambda(X),\ \ P(r(X),T,T)=1, \tag{3}$$

где $T$ обозначает дату погашения облигации, а $\lambda(X)$ – рыночная стоимость за риск, которая задается линейным соотношением $\lambda(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X$ [2]. Такой выбор является необходимым условием представления решения уравнения (3) в следующем виде [1]:

$$P(r(X),t;t+\tau)=\exp\left(-X^2A(\tau)-XB(\tau)-C(\tau)\right), \tag{4}$$

где для удобства введено обозначение $\tau = T - t$, определяющее срок до погашения облигации, а функции $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$ являются решением системы дифференциальных уравнений, получаемой подстановкой решения (4) в уравнение (3):

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-2A^2(\tau)s^2-2A(\tau)\kappa+\varphi, & A(0)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\left(A(\tau)s^2+\kappa\right)B(\tau)+2A(\tau)q, & B(0)=0\ ,\\ \dfrac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=r_{\min}+A(\tau)s^2-\dfrac{1}{2}B^2(\tau)s^2+B(\tau)q, & C(0)=0\end{cases} \tag{5}$$

где $\kappa = k + s\lambda_1$, а $q = k\theta - s\lambda_0$. Далее будем рассматривать случай, когда $\kappa > 0$.

**Исследование модели.** В системе (5) первое уравнение является уравнением Риккати, второе – линейным неоднородным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, а третье – решается простым интегрированием правой части. Рассмотрим первое уравнение системы (5). Поскольку его коэффициенты являются константами, используя метод разделения переменных, можно показать, что с учетом начального условия $A(0) = 0$ решение будет выглядеть следующим образом

$$A(\tau)=\frac{\varphi}{\kappa+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)}, \tag{6}$$

где для простоты введено обозначение $\nu = (\kappa^2 + 2s^2\varphi)^{1/2} > \kappa > 0$. С учетом введенных выше логических ограничений на параметры модели, из вида (6) следует, что функция $A(\tau)$ является монотонно возрастающей от 0 для $\tau = 0$ и до $\varphi/(\kappa + \nu)$ при $\tau \to \infty$. Используя (5), можно также заметить, что

$$\frac{\partial A(\tau)}{\partial\tau}=\frac{\varphi\nu^2\left(\mathrm{cth}^2(\tau\nu)-1\right)}{\left(\kappa+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)^2}. \tag{7}$$

При этом анализируя знак второй производной функции $A(\tau)$

$$\frac{\partial^2 A(\tau)}{\partial\tau^2}=-\frac{2\varphi\nu^3\left(\nu+\kappa\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)}{\mathrm{sh}^2(\tau\nu)\left(\kappa+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)^3},$$

можно сделать вывод, что функция $A(\tau)$ является вогнутой, а ее первая производная (7) – монотонно убывающей для $\tau \geq 0$.

Решение второго уравнения системы (5), которое, как было отмечено выше, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, с учетом начального условия $B(0) = 0$ принимает вид

$$B(\tau)=\frac{2q\varphi\left(\mathrm{ch}(\tau\nu)-1\right)}{\nu\left(\kappa\,\mathrm{sh}(\tau\nu)+\nu\,\mathrm{ch}(\tau\nu)\right)}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) во второе уравнение системы (5), получаем выражение для производной

$$\frac{\partial B(\tau)}{\partial\tau}=\frac{2q\varphi\left(\nu\,\mathrm{sh}(\tau\nu)+\kappa\,\mathrm{ch}(\tau\nu)-\kappa\right)}{\left(\kappa\,\mathrm{sh}(\tau\nu)+\nu\,\mathrm{ch}(\tau\nu)\right)^2}. \tag{9}$$

Из вида (8) и (9) можно сказать, что при условии $q > 0$ ($q < 0$), функция $B(\tau)$ будет возрастающей (убывающей) от 0 для $\tau = 0$ до $-2q\varphi/(\nu(\kappa + \nu))$ для $\tau \to \infty$.

Наконец, подставляя полученные выражения для $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в третье уравнение системы и интегрируя его, находим

$$C(\tau)=\tau\left(r_{\min}-\frac{\kappa}{2}+\frac{q^2\varphi}{\nu^2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\nu\mathrm{ch}\;\;\tau\nu\;\;+\kappa\mathrm{sh}\;\;\tau\nu}{\nu}\right)+$$

$$+q^2\varphi\;\;2q-s^2\;\;\frac{\kappa^2-2s^2\varphi\;\;\mathrm{sh}\;\;2\tau\nu\;\;-4\kappa\left(2\nu\mathrm{sh}^4\left(\frac{\tau\nu}{2}\right)+\kappa\mathrm{sh}\;\;\tau\nu\right)}{\nu^5\left(1+2\dfrac{s^2\varphi}{\nu^2}\mathrm{sh}^2\;\;\tau\nu\right)}. \qquad (10)$$

При этом производная $C(\tau)$ находится путем подстановки значений $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в третье уравнение системы (5):

$$\frac{\partial C(\tau)}{\partial\tau}=r_{\min}+\frac{\varphi s^2}{\kappa+\nu\mathrm{cth}\;\;\tau\nu}+\frac{2q^2\varphi\;\;\mathrm{ch}(\tau\nu)-1}{\nu\;\;\nu\mathrm{ch}(\tau\nu)+\kappa\mathrm{sh}(\tau\nu)}\left(1-\frac{s^2\varphi\;\;\mathrm{ch}(\tau\nu)-1}{\nu\;\;\nu\mathrm{ch}(\tau\nu)+\kappa\mathrm{sh}(\tau\nu)}\right). \qquad (11)$$

Теперь, когда значение всех функций (6), (8), (10) и их первых производных (7), (9), (11) найдено в явном виде, мы можем записать выражения в замкнутой форме для кривой доходности и форвардной кривой соответственно:

$$y(\tau,X)=-\frac{\ln P(X,t,t+\tau)}{\tau}=\frac{A(\tau)X^2+B(\tau)X+C(\tau)}{\tau}, \qquad (12)$$

$$f(\tau,X)=-\frac{\partial\ln P(x,t,t+\tau)}{\partial\tau}=\frac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}X^2+\frac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}X+\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}. \qquad (13)$$

Из соотношения

$$f(\tau,X)=y(\tau,X)+\tau\frac{\partial y(\tau,X)}{\partial\tau},$$

связывающего форвардную кривую с кривой доходности и ее производной, видно, что график форвардной кривой будет всегда выше (ниже) графика кривой доходности, когда последняя возрастает (убывает), а пересекаться они будут в точках, подозрительных на экстремум для кривой доходности. Наклон форвардной кривой связан с наклоном кривой доходности следующим соотношением

$$\frac{\partial f(\tau,X)}{\partial\tau}=2\frac{\partial y(\tau,X)}{\partial\tau}+\tau\frac{\partial^2 y(\tau,X)}{\partial\tau^2},$$

при этом, если кривая доходности является возрастающей и выпуклой (убывающей и вогнутой), то соответствующая ей форвардная кривая обязательно будет возрастающей (убывающей), причем абсолютное значение наклона форвардной кривой будет не менее чем в два раза больше наклона кривой доходности. Отметим, что данные наблюдения будут справедливыми для всех моделей временной структуры доходности процентных ставок.

Вычисление предельных равенств для функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$ дает

$$\lim_{\tau\to0}\frac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to0}\frac{A(\tau)}{\tau}=\varphi,\quad \lim_{\tau\to0}\frac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to0}\frac{B(\tau)}{\tau}=0,\quad \lim_{\tau\to0}\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to0}\frac{C(\tau)}{\tau}=r_{\min}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{A(\tau)}{\tau}=0,\quad \lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{d}B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{B(\tau)}{\tau}=0$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{C(\tau)}{\tau}=r_{\min}+\frac{\varphi s^2}{\kappa+\nu}\left(1-\frac{2q^2\varphi}{\nu^2(\kappa+\nu)}\right),\quad \lim_{\tau\to\infty}A(\tau)=\frac{\varphi}{\kappa+\nu},\quad \lim_{\tau\to\infty}B(\tau)=\frac{2q\varphi}{\nu(\kappa+\nu)}$$

При этом предельные значения кривой доходности и форвардной кривой совпадают, а при $\tau\to\infty$ также и не зависят от начального значения $X(t)$:

$$\lim_{\tau\to0}y(\tau,X)=\lim_{\tau\to0}f(\tau,X)=r=r_{\min}+\varphi X^2,$$

$$\lim_{\tau\to\infty}y(\tau,X)=y(\infty)=\lim_{\tau\to\infty}f(\tau,X)=f(\infty)=r_{\min}+\frac{\varphi s^2}{\kappa+\nu}\left(1-\frac{2q^2\varphi}{\nu^2(\kappa+\nu)}\right)$$

К сожалению, выражения (12) и (13) являются слишком громоздкими для проведения аналитического анализа в общем виде. Однако при известных значениях параметров модели, проделать такой анализ не составит труда. Рассмотрим более простой частный случай одномерной модели, когда параметр $q = 0$. Этот случай соответствует тому, что процесс $X(t)$ имеет нулевое стационарное среднее в риск-нейтральной мере. Многие авторы допускают аналогичное ограничение для объективной меры [1], [2]. В этом случае функция $B(\tau)$ становится тождественно равной нулю. Вследствие чего, кривая доходности и форвардная кривая в действительности будут зависеть не от значения процесса $X(\mathrm{t})$, а от его квадрата $X^2(t)$, что, учитывая вид (1), позволяет рассматривать эти кривые как функции мгновенной краткосрочной процентной ставки, $r(X)$:

$$y(\tau,r)=r_{\min}-\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{\tau}\left(\frac{r-r_{\min}}{\kappa+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\nu\,\mathrm{ch}(\tau\nu)+\kappa\,\mathrm{sh}(\tau\nu)}{\nu}\right)\right), \tag{14}$$

$$f(\tau,r)=r_{\min}+\frac{s^2\varphi\,\mathrm{sh}(\tau\nu)}{\nu\,\mathrm{ch}(\tau\nu)+\kappa\,\mathrm{sh}(\tau\nu)}+\frac{(r-r_{\min})\nu^2\left(\mathrm{cth}^2(\tau\nu)-1\right)}{\left(\kappa+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)^2}. \tag{15}$$

При малых сроках до погашения производные кривых принимают следующий вид:

$$\left.\frac{\partial y(\tau,r)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f(\tau,r)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\frac{1}{2}\left(s^2\varphi-2\kappa(r-r_{\min})\right),$$

откуда видно, что скорость изменения кривой доходности в два раза ниже скорости изменения форвардной кривой, а также что эта скорость и ее направление зависит от мгновенной процентной ставки, $r$.

В литературе часто отмечается, что кривая доходности и форвардная кривая могут относится к одному из четырех известных типов (например, [4]) – кривым «нормального» типа, т. е. монотонно возрастающим до некоторого конечного предельного значения, «перевернутого» типа – монотонно убывающим до некоторого конечного предельного значения, кривым, имеющим максимумы либо минимумы («humped shaped» кривые), а также плоским кривым доходности («flat yield curve»). Попробуем выяснить при каких значениях процентной ставки, $r$, форвардная кривая принимает тот или иной тип.

*Утверждение 1.* Достаточным условием монотонного возрастания форвардной кривой (15) для $\tau \geq 0$, является выполнение следующего условия

$$r<r_{\min}+\frac{s^2\varphi\kappa}{2\nu^2}.$$

Доказательство: найдем производную форвардной кривой (15) по $\tau$

$$\frac{\partial f(\tau,r)}{\partial\tau}=\frac{\nu^2\varphi\left(\kappa s^2-2\nu^2\dfrac{r-r_{\min}}{\varphi}+\nu\left(s^2-2\kappa\dfrac{r-r_{\min}}{\varphi}\right)\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)}{\mathrm{sh}^2(\tau\nu)\left(\kappa+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)^3} \tag{16}$$

Для того, чтобы форвардная кривая была монотонно возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была больше нуля, что эквивалентно

$$\kappa s^2-2\nu^2\frac{r-r_{\min}}{\varphi}+\nu\left(s^2-2\kappa\frac{r-r_{\min}}{\varphi}\right)\mathrm{cth}(\tau\nu)>0.$$

Перегруппировав слагаемые, получаем

$$\frac{r-r_{\min}}{\varphi}<\frac{s^2\left(\kappa+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)}{2\nu\left(\nu+\kappa\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)}<\frac{s^2\left(\kappa+\kappa\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)}{2\nu\left(\nu+\nu\,\mathrm{cth}(\tau\nu)\right)}=\frac{s^2\kappa}{2\nu^2},$$

где второе неравенство справедливо благодаря тому, что $\nu > \kappa$ и $\tau \geq 0$. Отсюда и следует требуемый результат.

*Утверждение 2.* Достаточным условием монотонного убывания форвардной кривой (15) для $\tau \geq 0$, является выполнение следующего условия

$$r>r_{\min}+\frac{s^2\varphi}{2\kappa}.$$

Доказательство: полностью повторяет доказательство утверждения 1.

*Утверждение 3.* Достаточным условием существования максимума (минимума) форвардной кривой (15) для $\tau \geq 0$, является выполнение следующего условия

$$r_{\min} + \frac{s^2\varphi}{2v} < r < r_{\min} + \frac{s^2\varphi}{2\kappa}.$$

Доказательство: Выясним, при каких условиях на $r$ производная форвадной кривой, (16), обращается в ноль для некоторого $\tau \geq 0$. Это эквивалентно тому, что

$$\mathrm{cth}(\tau v) = \frac{2v^2\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi} - \kappa s^2}{v\left(s^2 - 2\kappa\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi}\right)}.$$

Откуда,

$$\tau = \frac{1}{v}\mathrm{arcth}\left(\frac{2v^2\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi} - \kappa s^2}{v\left(s^2 - 2\kappa\dfrac{r - r_{\min}}{\varphi}\right)}\right).$$

Нас интересует решение, попадающее в область определения $\tau \geq 0$. Поэтому выясним, при каких условиях существует гиперболический арккотангенс, больший нуля.

По определению, $\mathrm{arcth}(x) = \ln((x + 1)/(x - 1))/2$, таким образом, существование гиперболического арккотангенса большего нуля равносильно существованию соответствующего логарифма, большего нуля, что, в свою очередь, равносильно выполнению условия $(x + 1)/(x - 1)) > 1$. Таким образом, необходимо проверить для каких $r$ выполняется неравенство

$$\left((v-\kappa)\left(2v\frac{r - r_{\min}}{\varphi} + s^2\right)\right)\bigg/\left((v+\kappa)\left(2v\frac{r - r_{\min}}{\varphi} - s^2\right)\right) > 1,$$

откуда и следует справедливость утверждения.

В силу более сложного вида (14), провести аналогичный анализ для кривой доходности в общем виде не удается.

В [5] авторы предлагают использовать наклон форвардной кривой для предсказания значения волатильности кривой доходности. Позднее, анализ продолжен для аффинных моделей в [4], где показано, что корреляция между дисперсией кривой доходности и производной форвардной кривой всегда равна минус единице. Проведем аналогичный анализ для квадратичной модели и выясним как связаны волатильность доходности и наклон форвардной кривой между собой. Зафиксируем в (12) срок до погашения, $\tau$, и рассмотрим $y(\tau, X)$ как функциональное преобразование диффузионного процесса $X(t)$. В таком случае, используя формулу Ито для данного преобразования с учетом (2), можно заметить, что волатильность доходности до погашения равна

$$\sigma_y(\tau) = \frac{2s}{\tau}\left(A(\tau)X + B(\tau)\right).$$

Откуда, математическое ожидание и дисперсия квадрата волатильности равны соответственно

$$\mathrm{E}\left(\sigma_y^2(\tau)\right) = \frac{8s^2\varphi^2\left(\kappa^2 + 2\theta^2k\right)}{\tau^2k\left(\kappa + v\,\mathrm{cth}(v\tau)\right)^2}, \quad \mathrm{Var}\left(\sigma_y^2(\tau)\right) = \frac{128s^6\varphi^4\left(\kappa^2 + 4\theta^2k\right)}{\tau^4k^2\left(\kappa + v\,\mathrm{cth}(v\tau)\right)^4}.$$

Используя выражение (16), можно найти аналогичные вероятностные характеристики для производной форвардной кривой

$$\mathrm{E}\left\{\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}\right\} = -\frac{v^2\varphi\left(v^2\theta^2k + s^2\left(\kappa^2 - k\kappa\right) + v\left(\kappa^2\left(\kappa - k\right) + 2\theta^2k\kappa\right)\mathrm{cth}(v\tau)\right)}{k\left(\kappa + v\,\mathrm{cth}(v\tau)\right)^3\mathrm{sh}^2(v\tau)},$$

$$\mathrm{Var}\left\{\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}\right\} = \frac{2s^2v^6\varphi^2\left(\kappa^2 + 4\theta^2k\right)\left(v + \kappa\,\mathrm{cth}(v\tau)\right)^2}{k^2\left(\kappa + v\,\mathrm{cth}(v\tau)\right)^6\mathrm{sh}^4(v\tau)}.$$

Из полученных соотношений видно, что при сделанных предположениях относительно параметров модели математическое ожидание производной форвардной кривой по сроку до погашения является отрицательным. Отсюда следует, что для всех сроков погашения $\tau$ корреляция рассматриваемых функций равна минус единице при любых экономически обоснованных значениях параметров. Это означает, что рассматриваемые характеристики связаны между собой линейным соотношением.

**Заключение.** Одним из преимуществ аффинных моделей является возможность выражения основных функций временной доходности в аналитическом виде. Однако простота таких моделей не позволяет точно описывать поведение объектов реального мира. В данной работе рассмотрена более сложная, неаффинная одномерная квадратичная модель временной доходности процентных ставок, для которой найдены выражения для кривой доходности и форвардной кривой в аналитическом виде. Также исследована зависимость формы форвардной кривой для частного случая модели от начального значения процентной ставки. Одновременно с этим, показано, что наклон форвардной кривой и волатильность кривой доходности связаны линейным соотношением.

## Литература

1. Ahn, D. Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence. / D. Ahn, R. Dittmar, A. Gallant. – New Orleans : AFA, 2001. – 52 p.

2. Leipold, M. Asset Pricing under the Quadric Class / M. Leipold, L. Wu. – Journal Of Finance. – 2002. – № 37. – P. 271–295.

3. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure / O. Vasicek. – Journal Of Financial Economics. – 1977. – № 5. – P. 177–188.

4. Медведев, Г. Стохастические процессы финансовой математики / Г.А. Медведев. – Минск : БГУ, 2005. – 243 с.

5. Brown, R. Why Long Term Forward Interest Rates (Almost) Always Slope Down / R.H. Brown, S.M. Schaefer. – Working Paper : London Business School, 2000. – 42 p.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 18.09.2016