Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

*УДК 519.612*

# О методах декомпозиции разреженных недоопределенных систем с матрицами полного и неполного ранга

Л.А. Пилипчук

В конструктивных методах решения экстремальных неоднородных задач линейного и нелинейного потокового программирования с дополнительными ограничениями применяются принципы декомпозиции ограничений. Это позволяет представить систему уравнений (часть ограничений) в виде независимых разреженных систем и систем общего вида. Решение разреженных систем линейных алгебраических уравнений неполного ранга осуществляется без использования обращения матриц на основе биективного отображения между множествами узлов (за исключением одного узла) и дуг дерева. Для нахождения невырожденной подматрицы полного ранга с целью определения решения системы общего вида используется свойство диагонального преобладания. Рассматриваемый подход может использоваться в задачах оптимального расположения сенсоров в узлах графа (мультиграфа), а также для вычислений в параллельной среде.
**Ключевые слова:** мультиграф, поток, разреженная система, недоопределенная система, переопределенная система, биективное отображение, матрица полного ранга, диагональное преобладание, декомпозиция.

In the constructive methods for solving the extremal inhomogeneous linear and nonlinear network flow programming problems with additional restrictions the decomposition principles for the restrictions are applied. This makes it possible to present the system of equations (part of the restrictions) as the sparse independent systems and systems of general form. Solution of sparse systems of linear algebraic equations of not full rank is carried out without use of the inverse matrix and based on the bijective mapping between the sets of nodes (except of one node) and arcs of the tree. Diagonal dominance property to find a non-degenerate submatrix of full rank for determining the decisions for the system of general type is used. This approach can be used in the problems of optimal location of sensors in the nodes of the graph (multigraph), as well as in parallel computing environment.
**Keywords:** multigraph, flow, sparse system, underdetermined system, overdetermined system, bijective mapping, full rank matrix, diagonal dominance, decomposition.

При разработке конструктивных методов решения неоднородных сетевых задач линейной оптимизации с взаимосвязью потоков [1]–[3], дробно-линейных неоднородных сетевых задач с линейными ограничениями [4] применяются принципы декомпозиции ограничений, которые основаны на использовании теоретико-графовых свойств графов, представляющих собой опорные множества [3]. Рассмотрим алгоритмы декомпозиции основных ограничений, которые представлены системой линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = b_i^k, i\in I^k, k\in K, \tag{1}$$

$$\sum_{(i,j)\in U}\ \sum_{k\in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^k = z_{ij}, (i,j)\in U_0, \tag{3}$$

где $G = I,U$ – конечная ориентированная связная мультисеть (мультиграф) с множеством мультидуг $U$, определенных на $I\times I$ $(|I|<\infty, |U|<\infty)$. Мультисеть $G = I,U$ представлена в виде множества $|K|$ связных сетей $k\in K = 1,2,...$ $k\in K = 1,2,...$ , $|K|<\infty$. Каждая связная сеть $G^k=(I^k,U^k)$ соответствует некоторому типу $k$ потока в мультисети $G= I,U$ , $x_{ij}^k$ – дуговой поток $k$-го типа по мультидуге $(i,j)\in U$. Определим множество $K(i)= k\in K : i\in I^k$ типов потоков, проходящих через узел $i\in I$ в мультисети $G$. Также определим множество типов потоков $K(i,j)= k\in K:(i,j)\in U^k$ , проходящих через мультидугу $(i,j)\in U$. Пусть $U_0$ – множество таких мультидуг $(i,j)\in U_0 \subseteq U$, для которых выполняется неравенство: $|K_0(i,j)|>1$, $\lambda_{ij}^{kp}$ – коэффициенты матрицы ограничений (2), где $b=(b_i^k, i\in I^k, k\in K), b=(b_i^k, i\in I^k, k\in K)$, $\alpha=(\alpha_p, p=\overline{1,l}), \alpha=(\alpha_p, p=\overline{1,l})$,

$z= z_{ij}, (i,j)\in U_0$ $-z= z_{ij}, (i,j)\in U_0$ – векторы правых частей систем (1), (2), (3) соответственно, $I_i^-(U^k)= j\in I^k:(j,i)^k\in U^k$ $I_i^-(U^k)= j\in I^k:(j,i)^k\in U^k$,

$x=\left(x_{ij}^k, (i,j)\in U, k\in K(i,j)\right)$ – вектор неизвестных. Предположим, что выполняется неравенство

$$\sum_{k\in K}\left|I^k\right|+l+\left|U_0\right| \square \sum_{k\in K}\left|U^k\right|.$$

В [5] получено общее решение разреженной недоопределенной линейной системы (1) для фиксированного типа потока $k\in K$, которое имеет следующий вид:

$$x_{ij}^k=\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k} x_{\tau\rho}^k\delta_{ij}^k(\tau,\rho)+\left(\tilde{x}_{ij}^k-\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k}\tilde{x}_{\tau\rho}^k\delta_{ij}^k(\tau,\rho)\right), (i,j)^k\in U_T^k,$$
$$x_{\tau\rho}^k\in R, \quad (\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k, \tag{4}$$

где $\tilde{x}= \tilde{x}_{ij}^k, (i,j)\in U, k\in K(i,j)$ – любое частное решение системы (1), $U_T^k$ – остовное дерево графа $G^k= I^k, U^k$, $x_{\tau\rho}^k$ – независимые переменные, соответствующие дугам $(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k$. Множество векторов $\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}$ является фундаментальной системой решений однородной системы, порожденной системой (1), $k\in K.k\in K$.

*Замечание 1.* В практических приложениях при построении частного решения $\tilde{x}= \tilde{x}_{ij}^k, (i,j)\in U, k\in K(i,j)$ полагаем: $\tilde{x}_{\tau\rho}^k=0$, $(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k, k\in K$.

Таким образом, формула (4) примет вид:

$$x_{\tau\rho}^k\in R, \quad (\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k.x_{\tau\rho}^k\in R, \quad (\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k. \tag{5}$$

В [6], [7] разработаны эффективные алгоритмы построения фундаментальной системы решений $\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}$, $k\in K$ однородной системы, порожденной системой (1), и частного решения $\tilde{x}= \tilde{x}_{ij}^k, (i,j)\in U, k\in K(i,j)$. Применение конструктивных методов декомпозиции для решения одной нелинейной задачи сетевой оптимизации рассмотрено в [8].

Методы декомпозиции позволяют представить систему уравнений (часть ограничений задачи) в виде независимых систем: разреженных систем линейных алгебраических уравнений и системы общего вида. Это позволяет также находить решение разреженных систем линейных алгебраических уравнений на надлежащих структурах для представления базисов (опор) без использования обращения разреженных матриц [6], [7].

Для каждого $k\in K$ подставим общее решение (5) системы (1) в систему (2) и преобразуем ее к следующему виду:

$$\sum_{k\in K}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k} R_p(L_{\tau\rho}^k)x_{\tau\rho}^k=\alpha_p-\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)^k\in U_T^k}\lambda_{ij}^{kp}\tilde{x}_{ij}^k, \ p=\overline{1,l}, \tag{6}$$

где $L_{\tau\rho}^k - L_{\tau\rho}^k -$ фундаментальный цикл, порожденный дугой $\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}-\{\delta^k(\tau,\rho),(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k\}-$ фундаментальная система решений однородной системы, порожденной системой (1), $k\in K.k\in K$.

Аналогичные преобразования применим к системе (3) и учтем свойства ее разреженности. В результате система (3) примет следующий вид:

$$\sum_{k\in K_0(i,j)}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k\setminus U_T^k}\delta_{\xi(i,j)}(L_{\tau\rho}^k)x_{\tau\rho}^k=z_{ij}-\sum_{\substack{k\in K_0(i,j),\\ (i,j)^k\in U_T^k}}\tilde{x}_{ij}^k, \quad (i,j)\in U_0, \tag{7}$$

где

$$\delta_{\xi(i,j)}(L^k_{\tau\rho}) = \begin{cases} \delta^k_{ij}(\tau,\rho),\, (i,j)^k \in L^k_{\tau\rho}, \\ 0,\, (i,j)^k \notin L^k_{\tau\rho}, \end{cases} \qquad (i,j)\in U_0, k\in K_0(i,j).$$

Итак, исходная система (1)–(3) представлена в виде следующих независимых систем линейных алгебраических уравнений:

– недоопределенной системы (6)–(7) общего вида для определения неизвестных $x^k_{\tau\rho}, (\tau,\rho)^k \in U^k_C \subseteq U^k \setminus U^k_T, k\in K$;

– $|K|$ независимых разреженных недоопределенных систем вида (1) для определения неизвестных $x^k_{ij}, (i,j)^k \in U^k_T$ для каждого $k \in K$.

Для определения ранга матрицы системы (6)–(7) воспользуемся свойством диагонального преобладания. Квадратная $m\times m-$матрица $A=(a_{ij}, i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,m})$ называется матрицей с диагональным преобладанием, если для всех $i=1,2,\ldots,m,$ справедливы соотношения

$$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|. \tag{8}$$

Как известно, матрицы с диагональным преобладанием неособенны, и этот результат составляет содержание признака Адамара [9] (нередко его называют также теоремой Леви-Деспланка, см. [10]). Если в $m\times n-$матрице системы (6)–(7), $n=\sum_{k\in K}|U^k\setminus U^k_T| n=\sum_{k\in K}|U^k\setminus U^k_T|$ найдётся квадратная подматрица размера $m=l+|U_0|$ с диагональным преобладанием, то эта матрица имеет полный ранг. При перестановках строк матрицы свойство диагонального преобладания не сохраняется, при этом ранг матрицы не изменяется. В связи с этим имеет смысл искать в матрице не подматрицы с диагональным преобладанием, а подматрицы, в которых диагонального преобладания можно добиться с помощью подходящей перестановки строк. Нахождение этой перестановки – комбинаторная задача, но её свойства таковы, что решение может быть найдено относительно несложными средствами. В работе [11] приведён алгоритм выявления диагонально преобладающей матрицы для переопределенной системы. В [11] также приведено определение диагонального преобладания (8) на основе свойств псевдообратной матрицы и спектрального радиуса. Для $m\times n-$матрицы $A$ псевдообратной матрицей [9], [12] называется такая вещественная $n\times m-$матрица $A^+$, что матрицы $AA^+$ и $A^+A$ являются симметричными матрицами и выполнены равенства:

$$AA^+A=A, \quad A^+AA^+=A^+.$$

Если $A-$матрица полного ранга и $m\geq n$, то $A^+=(A^TA)^{-1}A^T$ [9]–[10], [12]. В этом случае $A^+A-$это единичная $n\times n-$матрица. Если $A-$матрица полного ранга и $m\leq n$, то $A^+=A^T(AA^T)^{-1}$ [11]. Тогда $AA^+-$это единичная $m\times m-$матрица.

Пусть $U^k_C \subseteq U^k\setminus U^k_T, k\in K$ – множество дуг, которым соответствуют столбцы невырожденной подматрицы порядка $m=l+|U_0|$ матрицы недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений (6)–(7). Сгруппируем переменные $x^k_{\tau\rho}, (\tau,\rho)^k\in U^k_C, k\in K$ и $x^k_{\tau\rho}, (\tau,\rho)^k \in U^k_N, k\in K$, где $U^k_N=U^k\setminus (U^k_T \bigcup U^k_C), k\in K$.

$$\sum_{k\in K}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_C} R_p(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho} = \alpha_p - \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)^k\in U^k_T}\lambda^{kp}_{ij}\tilde{x}^k_{ij} - \sum_{k\in K}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_N} R_p(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho},\ p=\overline{1,l},$$
$$\sum_{k\in K_0(i,j)}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_C}\delta_{\xi(i,j)}(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho} = z_{ij} - \sum_{\substack{k\in K_0(i,j),\\ (i,j)^k\in U^k_T}}\tilde{x}^k_{ij} - \sum_{k\in K_0(i,j)}\sum_{(\tau,\rho)^k\in U^k_N}\delta_{\xi(i,j)}(L^k_{\tau\rho})x^k_{\tau\rho},\ (i,j)\in U_0. \tag{9}$$

Подматрица системы (9), столбцы которой соответствуют неизвестным $x^k_{\tau\rho}, (\tau,\rho)^k\in U^k_C, k\in K$, имеет ранг $m=l+|U_0|$ (является подматрицей полного ранга). Из (9) вычислим неизвестные $x_{\tau\rho}^k, (\tau,\rho)^k \in U_C^k, k \in K$. Обозначим $\psi_{ij}^k = \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_C^k} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho), (i,j)^k \in U_T^k, k \in K$.

Неизвестные $x_{ij}^k, (i,j)^k \in U_T^k, k \in K,$ соответствующие дугам $(i,j)^k \in U_T^k, k \in K$ (дуги остовных деревьев), вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_{ij}^k = \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_N^k} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau,\rho) + \psi_{ij}^k + \tilde{x}_{ij}^k, (i,j)^k \in U_T^k, \\ &x_{\tau\rho}^k \in R, (\tau,\rho)^k \in U_N^k = U^k \setminus \left(U_C^k \bigcup U_T^k\right), k \in K. \end{aligned} \qquad (10)$$

Частное решение $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j)\right)$ системы (1) построено по правилам *Замечания 1*.

*Замечание 2.* Если в матрице недоопределенной системы (6)–(7) не существует квадратной подматрицы полного ранга, то для определения ранга матрицы системы (6)–(7) требуется дополнительное исследование.

*Замечание 3.* Матрица системы (1) является разреженной матрицей неполного ранга. Для нахождения неизвестных $x_{ij}^k, (i,j)^k \in U_T^k$, соответствующих множеству дуг $(i,j)^k \in U_T^k$ остовного дерева не используется обращение матриц, $k \in K$. Используются концепции декомпозиции графов, учитывается структура системы, свойства и тип ее разреженности. Применяются вычислительные методы и технологии разреженного матричного анализа [6], [7].

Полученные результаты могут быть применены для построения оптимальных решений экстремальных задач линейного и нелинейного потокового программирования с дополнительными ограничениями [1], [4], [8] и в задачах оптимального расположения сенсоров в узлах графа (мультиграфа) [6]–[7], [13]. Изложенный подход к построению общего решения разреженной недоопределенной системы (1)–(3) может использоваться для вычислений в параллельной среде.

## Литература

1. Пилипчук, Л.А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2009. – 222 с.

2. Йенсен, П. Потоковое программирование / П. Йенсен, Д. Барнес ; Пер. с англ. – М., 1984. – 392 с.

3. Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск : БГУ, 1980. – Ч. 3. Специальные задачи. – 368 с.

4. Пилипчук, Л.А. Дробно-линейные экстремальные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2013. – 235 с.

5. Pilipchuk, L.A. Solution of Large Linear Systems with Embedded Network Structure for a Non-Homogeneous Network Flow Programming Problem / L.A. Pilipchuk, E.S. Vecharynski, Y.H. Pesheva. – Mathematica Balkanica. – 2008. – Vol. 22, Fasc. 3–4. – P. 235–254.

6. Пилипчук, Л.А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2012. – 260 с.

7. Pilipchuk, L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L.A. Pilipchuk. – Minsk : BSU, 2013. – 235 p.

8. Пилипчук, Л.А. Применение конструктивных методов декомпозиции для решения одной нелинейной задачи сетевой оптимизации / Л.А. Пилипчук. – Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2015. – № 2 (192). – С. 54–61.

9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Физматлит, 2010. – 580 с.

10. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

11. Шарый С.П. Об интервальных матрицах полного ранга / С.П. Шарый // Сибирский Журнал вычислительной математики. – 2014. – Т. 17, №3. – С. 273–288.

12. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – М. : Ижевск: Изд-во РХД, 2008. – 288 с.

13. Pilipchuk L.A. Sensor Location Problem for a Multigraph / L.A. Pilipchuk, T.S. Vishnevetskaya, Y.H. Pesheva. – Mathematica Balkanica. New Series. – 2013. – Vol. 27. – Fasc. 1–2. – P. 65–75.

Белорусский государственный университет Поступила в редакцию 29.04.2016