Г. Н. Казимиров
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Одна из основных задач теории приближений состоит в нахождении связей между структурными свойствами функций (дифференцируемостью, условием Липшица и т. п.) и порядком стремления к нулю последовательности её наилучших приближений тригонометрическими или алгебраическими многочленами. Первые результаты в этом направлении появились в начале прошлого века (в работах Д. Джексона, С. Н. Берштейна и других авторов). В этих работах для непрерывных 2π- периодических функций были доказаны прямая и обратная теоремы теории приближений для модулей непрерывности степенного типа. В дальнейшем для периодических функций прямая и обратная теоремы теории приближений были доказаны в равномерной метрике для общих модулей гладкости (С. Б. Стечкин). В начале прошлого века была также обнаружена существенная разница между периодическим и непериодическим случаями. А в 1946 году С. М. Никольский показал, что прямая теорема теории приближений для непериодических непре-

[1] Mathematics Subject Classification (2010): 20D10, 20D20, 20D30, 20D35.

рывных функций допускает усиление. И в дальнейшем было показано, что для непрерывных непериодических функций также справедливы прямая и обратная теоремы теории приближений, однако, в отличие от периодического случая они доказаны не для наилучшего, а для поточечного приближения. Аналогичные задачи для непериодического случая рассматривались и в интегральной метрике и было показано, что на интегральную метрику нельзя перенести результаты о поточечном приближении. В то же время оказалось, что прямые и обратные теоремы теории приближений справедливы и для непериодических функций, если обычный модуль гладкости заменить некоторым обобщённым модулем гладкости. Некоторые из таких модулей были предложены Потаповым М. К. (см. [1, с. 223–224]). Им же были доказаны прямые и обратные теоремы для модулей гладкости (модулей непрерывности) порядка $k=1$. Для случая $k>1$ эти теоремы получены Казимировым Г. Н. (см. [2], [3]) Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. Хотелось бы получить такие же теоремы и для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом. В настоящей работе сделан первый шаг в этом направлении.

Основные определения.

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и,

$\|f\|_p = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty$, а для $p=\infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1\le x\le x} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha} = \left\| f(x)(1-x^2)^\alpha \right\|_p$.

Рассмотрим один из операторов обобщённого сдвига, предложенных в [1]. Положим

$$T_t(f,x,\nu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int\limits_{-1}^{1} f\left(x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\sin t\right)(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dy,$$

где $\gamma(\nu) = \int\limits_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu-(1/2)} dy$.

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f,x,\nu) = T_t(f,x,\nu) - f(x),$$

$$\Delta_t^k(f,x,\nu) = \Delta_t^1(\Delta_t^{k-1}(f,x,\nu),x,\nu),\ k=2,3,\ldots,$$

$$\omega_k(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} = \sup_{|t|\le\delta} \left\| \Delta_t^k(f,x,\nu) \right\|_{p,\alpha},$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем n-1, в метрике $L_{p,\alpha}$, т. е. $E_n(f)_{p,\alpha} = \inf\limits_{P_n\in P} \left\| P_n(x) - f(x) \right\|_{p,\alpha}$, где P-множество алгебраических многочленов степени не выше, чем n-1, $n=1,2,\ldots$.

Основной результат.

Теорема. Пусть даны числа p, ν, k такие, что $1 \le p \le \infty, \nu > -(1/2), k = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть число α выбрано по правилу: $-(1/2) < \alpha \le \nu$ при $p=1$, $-(1/2p) < \alpha < \nu + (1/2) - (1/2p)$ при $1 < p < \infty$, $0 \le \alpha < \nu + (1/2)$ при $p = \infty$. Тогда, если существует функция g, такая, что

$$\sup_{|t| \le \pi} |g(t)| < +\infty \text{ и } T_t(f, x) = f(x) g(t) \quad \forall x \in [-1, 1], \ \forall t \in [-\pi, \pi],$$

то для $f \in L_{p,\alpha}$ справедливы неравенства:

$$C_1 E_n(f)_{p,\alpha} \le \omega_k\left(f, \frac{1}{n}, \nu\right)_{p,\alpha} \le \frac{C_2}{n^{2r}} \sum_{m=1}^{n} m^{2r-1} E_m(f)_{p,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и $n (n=1,2,3,\ldots)$.

Список использованных источников

1 Потапов, М. К. Об условиях совпадения некоторых классов функций / М. К. Потапов // Труды семинара имени И. Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 223–238.

2 Казимиров, Г. Н. О теоремах Джексона для *k-го* обобщённого модуля гладкости / Г. Н. Казимиров // Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.1994 № 3054-В94 – С. 1–40.

3 Казимиров, Г. Н. Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г. Н. Казимиров // – Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – №3(4). – С. 49–51.