**В. И. Мурашко**
*г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины*

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О $\sigma$-НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ

Рассматриваются только конечные группы. В докладе через $\sigma = \{ \pi_i \mid i \in I$ и $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ для всех $i \neq j\}$ обозначается некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества. В работе [1] А. Н. Скиба положил начало $\sigma$-методу, суть которого заключается в том, чтобы изучать подгрупповое строение группы, не относительно простых делителей порядка группы, а относительно подмножеств простых делителей порядка группы из разбиения $\sigma$ множества простых чисел. Этот метод активно подхватили и начали разрабатывать как отечественные, так и зарубежные математики. С базовыми результатами и вопросами этого направления можно ознакомится в обзорах [2, 3].

Согласно [1], группа $G$ называется $\sigma$-нильпотентной, если она имеет нормальную холлову $\pi_i$-подгруппу для всех подмножеств простых чисел $\pi_i \in \sigma$ таких, что $\pi_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Класс всех $\sigma$-нильпотентных групп обозначается через $\mathfrak{N}_\sigma$. Пусть $\sigma_1 = \left\{\{p\} \mid p \in \mathbb{P} \right\}$. Тогда $\mathfrak{N}_{\sigma_1} = \mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп.

Отметим, что многие результаты $\sigma$-метода предполагают наличие холловых подгрупп. В данной работе обсуждаются результаты о $\sigma$-нильпотентных группах, для доказательства которых не предполагается наличие холловых подгрупп. В основном, вместо них используются $\mathfrak{G}_\pi$-максимальные подгруппы или $\mathfrak{G}_\pi$-проекторы.

Напомним (см. [4, с. 127–128]), что главный фактор $H/K$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$-центральным в $G$, если

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}.$$

Через $Z_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается $\mathfrak{X}$-гиперцентр группы $G$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа группы $G$ такая, что всякий главный фактор $H/K$ группы $G$ ниже нее является $\mathfrak{X}$-центральным. Если $\mathfrak{X}$ – формация, то $\mathfrak{X}$-гиперцентр существует в любой группе по [4, §14, лемма 14.1].

**Теорема 1**. *Пусть $G$ – группа. Следующие условия для $\pi_i$-элемента $g \in G$ эквивалентны*:

(1) $g \in Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$;

(2) $gx = xg$ *для всех* $\pi_i{}'$-*элементов* $x$ *из* $G$;

(3) $|G: C_G(\langle g \rangle^G)|$ – $\pi_i$-*число*;

(4) $|G: C_G(g)|$ – $\pi_i$-*число и* $G^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq C_G(g)$.

Из предыдущего результата получаем описание элементов гиперцентра.

**Следствие 1.1** (Р. Бэр [5]). *Следующие условия для* $p$-*элемента* $g \in G$ *эквивалентны:*

(1) $g \in Z_\infty(G)$;

(2) $gx = xg$ *для всех* $p'$-*элементов* $x$ *из* $G$;

(3) $|G: C_G(\langle g \rangle^G)|$ – $p$-*число*;

(4) $|G: C_G(g)|$ – $p$-*число и* $G^{\mathfrak{N}} \leq C_G(g)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Подгруппа $U$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$-максимальной в $G$ [6, гл. III, определение 3.1], если (a) $U \in \mathfrak{X}$, и (b) из $U \leq V \leq G$ и $V \in \mathfrak{X}$ следует, что $U = V$. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$-проектором $G$ [6, гл. III, определение 3.2], если $HN/N$ $\mathfrak{X}$-максимальна в $G/N$ для любой $N \trianglelefteq G$. Пусть $\pi$ – множество простых чисел. Напомним, что класс $\mathfrak{G}_\pi$ всех $\pi$-групп является насыщенной формацией. Согласно [6, гл. III, предложение 4.1], всякая насыщенная формация является классом Шунка. Тогда $\mathfrak{G}_\pi$-проекторы существуют в любой группе по [6, гл. III, теорема 3.10]. Будем говорить, что подгруппа $H$ $\pi$-максимальна в $G$, если она $\mathfrak{G}_\pi$-максимальна в $G$.

**Следствие 1.2.** *Пересечение нормализаторов всех* $\pi_i$-*максимальных подгрупп* $G$ *для всех* $i \in I$ *совпадает с* $Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$.

**Следствие 1.3** (Ф. Холл [7]). *В любой группе гиперцентр совпадает с пересечением всех нормализаторов силовских подгрупп.*

Заметим, что пересечение максимальных абелевых подгрупп группы $G$ совпадает с центром группы $G$.

**Следствие 1.4** (А.Н. Скиба [8])**.** *Пересечение всех* $\mathfrak{N}_\sigma$-*максимальных подгрупп* $G$ *совпадает с* $Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$.

**Следствие 1.5** (Р. Бэр [5])**.** *Пересечение всех максимальных нильпотентных подгрупп совпадает с гиперцентром.*

Известно, что пересечение максимальных сверхразрешимых подгрупп группы $G$ не обязательно совпадает со сверхразрешимым гиперцентром группы $G$ (см., например, [8]). Следуя [8], через $Int_{\mathfrak{F}}(G)$ будем обозначать пересечение всех $\mathfrak{F}$-максимальных подгрупп группы $G$. Л.А. Шеметков поставил следующую проблему на Гомельском алгебраическом семинаре в 1995: *Для каких* (*нормально*) *наследственных локальных* (*композиционных*) *формаций* $\mathfrak{F}$ *равенство* $Z_{\mathfrak{F}}(G) = Int_{\mathfrak{F}}(G)$ *верно для любой группы* $G$?

Решение этой проблемы для наследственных локальных формаций было получено А.Н. Скибой в [8]. Для нелокальных формаций эта проблема рассматривалась автором в [9], где она была решена для класса всех квази-$\mathfrak{F}$-групп, где $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация.

Важным классом формаций являются формации с условием Шеметкова. Напомним [4, §24], что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова, если любая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Нами доказано:

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathfrak{F} \neq (1)$ – *формация с условием Шеметкова. Предположим, что равенство* $Z_{\mathfrak{F}}(G) = Int_{\mathfrak{F}}(G)$ *верно для любой группы* $G$. *Тогда найдётся разбиение* $\sigma$ *множества всех простых чисел* $\mathbb{P}$ *такое, что класс* $\mathfrak{F}^S$ *всех групп, все подгруппы которых принадлежат* $\mathfrak{F}$, *совпадает с классом всех* $\sigma$-*нильпотентных групп.*

В частности, проблема 1995 года полностью решена для наследственных формаций с условием Шеметкова.

**Следствие 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ – наследственная формация с условием Шеметкова. Тогда и только тогда равенство $Z_{\mathfrak{F}}(G) = Int_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы $G$, когда $\mathfrak{F}$ является классом всех $\sigma$-нильпотентных групп для некоторого разбиения $\sigma$ множества $\mathbb{P}$.*

Говорят, что подгруппа $H$ группы $G$ перестановочна с подгруппой $K$ если $HK$ является подгруппой $G$. Напомним, что $H$ называется $S$-перестановочной в $G$, если она перестановочна со всякой силовской подгруппой группы $G$. Как было показано О. Кегелем [10] и В. Дескинсом [11], если $H$ является $S$-перестановочной подгруппой $G$, то $H^G/H_G$ нильпотентна. Более того, множество всех $S$-перестановочных подгрупп $G$ образует подрешетку решетки всех подгрупп $G$ (см. [10, Satz 2]). П. Шмид [12] показал, что если $H$ $S$-перестановочна в $G$, то $N_G(H)$ также $S$-перестановчна в $G$.

Понятие $S$-перестановочной подгруппы играет важную роль при изучении конечных непростых групп. Поэтому предпринимались попытки обобщить это понятие. В частности, Скиба [1] предложил следующие обобщение понятие $S$-перестановочной подгруппы. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\sigma$-перестановочной, если в $G$ для любого $\pi_i \in \sigma$ имеется холлова $\pi_i$-подгруппа $P_i$, для которой $HP_i^x = P_i^x H$ для всех $x \in G$. Им были получены аналоги результатов Кегеля и Дескинса для групп с заданными наборами холловых подгрупп (см. [2]).

Отметим, что для определения $\sigma$-перестановочной подгруппы требуется существование заданной системы холловых подгрупп. В данном докладе мы распространим это понятие на класс всех групп.

**Определение 1.** Подгруппу $H$ группы $G$ будем называть:

(1) $\sigma$-$m$-перестановочной, если она перестановочна со всеми $\pi_i$ -максимальными подгруппами $G$ для всех $\pi_i \in \sigma$.

(2) $\sigma$-$p$-перестановочной, если для всех $\pi_i \in \sigma$ найдётся $\mathfrak{G}_{\pi_i}$-проектор $P_i$ группы $G$ такой, что $HP_i^x = P_i^x H$ для всех $x \in G$ .

Примерами указанных подгрупп являются $\pi_i$-подгруппы $\sigma$-нильпо-тентного гиперцентра.

Пусть $\sigma_1 = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$. Тогда понятия $S$-перестановочной и $\sigma_1$-$x$-пе-рестановочной подгрупп совпадают для $x \in \{m, p\}$. Пусть $\pi$ – множество простых чисел. Если $H$ – холлова $\pi$-подгруппа $G$, то она является $\mathfrak{G}_\pi$-проектором $G$. Следовательно, всякая $\sigma$-перестановочная подгруппа является $\sigma$-$p$-перестановочной.

Очевидно, что всякая $\sigma$-$m$-перестановочная подгруппа является $\sigma$-$p$-перестановочной. Как следует из теорем Холла, понятия $\sigma$-перестановочной и $\sigma$-$x$-перестановочной подгрупп совпадают для $x \in \{m, p\}$ в классе всех разрешимых групп.

**Теорема 3.** *Подгруппа H группы $G$ $\sigma$-$p$-перестановочна тогда и только тогда, когда она перестановочна со всеми $\mathfrak{G}_{\pi_i}$ -проекторами $G$ для всех $\pi_i \in \sigma$.*

**Гипотеза.** *Подгруппа H группы $G$ $\sigma$-$m$-перестановочна тогда и только тогда, когда она $\sigma$-$p$-перестановочна.*

Связь между $\mathfrak{N}_\sigma$ и $\sigma$-$p$-перестановочными подгруппам показана в

**Теорема 4**. *Пусть $H$ – $\sigma$-$p$-перестановочная подгруппа группы $G$. Тогда $H^G/H_G$ $\sigma$-нильпотентна.*

Из этой теоремы напрямую следуют результаты об S-перестановочных и σ-перестановочных подгруппах.

**Следствие 4.1** (О. Кегель [10] и В. Дескинс [11]). *Пусть $H$ – $S$-перестановочная подгруппа группы $G$. Тогда $H^G/H_G$ нильпотентна.*

**Следствие 4.2** (А.Н. Скиба [1]). *Пусть $G$ – $E_{\pi_i}$-группа для всех $\pi_i \in \sigma$. Если $H$ – $\sigma$-перестановочная подгруппа $G$, то $H^G/H_G$ $\sigma$-нильпотентна.*

Следующая теорема показывает, что наша гипотеза верна для $\sigma$-нильпотентной $\sigma$-$p$-перестановочной подгруппы.

**Теорема 5.** *Пусть $H$ – $\sigma$-нильпотентная подгруппа группы $G$. Тогда*

(1) *Если $H$ $\sigma$-$p$-перестановочна в $G$, то $H$ $\sigma$-$\mathfrak{m}$-перестановочна в $G$.*

(2) *$H$ является $\sigma$-$p$-перестановочной в $G$ тогда и только тогда, когда всякая холлова $\pi_i$ -подгруппа $H$ $\sigma$-$p$-перестановочна в $G$ для всех $\pi_i \in \sigma$.*

**Следствие 5.1** (П. Шмид [12]). *Пусть $H$ – нильпотентная подгруппа группы $G$. Тогда и только тогда $H$ $S$-перестановочна в $G$, когда всякая силовская подгруппа $H$ $S$-перестановочна в $G$.*

Главным результатом этого раздела является

**Теорема 6**. *Множество всех $\sigma$-$p$-перестановочных подгрупп группы $G$ образует подрешетку решетки всех подгрупп $G$.*

**Следствие 6.1** (О. Кегель [10]). *Множество всех $S$-перестановочных подгрупп группы $G$ образует подрешетку решетки всех подгрупп $G$.*

**Следствие 6.2** (А.Н. Скиба [1]). *Пусть всякая подгруппа группы $G$ является $D_{\pi_i}$-группой для всех $\pi_i \in \sigma$. Тогда множество всех $\sigma$-пере-становочных подгрупп группы $G$ образует подрешетку решетки всех подгрупп $G$.*

Наш заключительных результат устанавливает $\sigma$-$p$-перестановочность нормализатора $\sigma$-$p$-перестановочной подгруппы.

**Теорема 7.** *Если $H$ – $\sigma$-$p$-перестановочная подгруппа группы $G$, то $N_G(H)$ также является $\sigma$-$p$-перестановочной подгруппой $G$.*

**Следствие 7.1** (П. Шмид [12]). *Если $H$ – $S$-перестановочная подгруппа группы $G$, то $N_G(H)$ также является $S$-перестановочной подгруппой $G$.*

С полными доказательствами результатов, обсуждаемых в докладе, можно ознакомится в работах [13–15].

### Список использованных источников

1 Skiba, A. N. On $\sigma$-subnormal and $\sigma$-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – No. 436. – P. 1–16.

2 Skiba, A. N. On Some Results in the Theory of Finite Partially Soluble Groups / A. N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – No. 3. – P. 281–309.

3 Skiba, A. N. On some arithmetic properties of finite groups / A. N. Skiba // Note Mat. – 2016. – No. 36. – P. 35–59.

4 Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 256 с.

5 Baer, R. Group elements of prime power index / R. Baer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 20–47.

6 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7 Hall, P. On the System Normalizers of a Soluble Group / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1938. – Vol. 43, № 1. – P. 507–528.

8 Skiba, A. N. On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group / A. N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2012. – No. 216(4). – P. 789–799.

9 Murashka, V. I. On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group / V. I. Murashka // J. Group Theory. – 2018. – Vol. 21, No. 3. – P. 463–473.

10 Kegel, O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. H. Kegel // Math. Z – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

11 Deskins, W. E. On Quasinormal Subgroups of Finite Groups / W. E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.

12 Schmid, P. Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – No. 207. – P. 285–293.

13 Мурашко, В. И. Об одном обобщении теорем Бэра о гиперцентре и нильпотентном корадикале / В. И. Мурашко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 16. – С. 84–88.

14 Murashka, V. I. On a generalization of the concept of S-permutable subgroup of a finite group / V. I. Murashka // Acta Math. Hungar. – 2018. – Vol. 155, No. 2. – P. 221–227.
15 Murashka, V. I. A note on formations with the Shemetkov property / V. I. Murashka // Advances in Group Theory and Applications (принята к печати).