Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 521.1; 524.3

О моделировании радиальных функций плотности планет земной группы

Г.Ю. Тюменков, Д.А. Штромберг

В приближении сферической симметрии и с учетом физически корректного радиального поведения проведено моделирование функций плотности планет земной группы с параболической добавкой. На этой основе предложена обобщенная форма функции плотности для слоистой структуры. Произведен расчет масс планет земной группы по усредненным характеристикам. Дана краткая оценка результатов моделирования.

Ключевые слова: функция плотности, шаровой слой, гипергеометрическая функция, гамма-функция, функция Хэвисайда, планета земной группы.

Using the approximation of spherical symmetry and correct physical radial behavior the density functions of terrestrial planets are simulated in several analytical forms with parabolic term. On this basis the density functions generalized forms for layered structures are proposed. Masses of terrestrial planets are calculated with averaged characteristics. The possible application of simulation results is evaluated.

Keywords: density function, spherical layer, hyper-geometric function, gamma function, Heaviside step function, terrestrial planet.

Введение. До настоящего времени проблема внутреннего строения звезд и планет является достоверно нерешенной и, следовательно, актуальной [1]–[3]. Существеннейшую роль в её решении играет функция плотности, которая для планет земной группы в хорошем приближении может считаться радиально-симметричной $\rho(r)$, потому что среди них наибольшее полярное сжатие характерно для Марса и составляет всего лишь 0,00589. Данная функция плотности определяет массу планеты, в этом случае задаваемую интегралом

$$M_R = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2dr, \tag{1}$$

также, она фигурирует в уравнении равновесия

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho(r),$$

и в ряде других важных уравнений теории внутреннего строения. Поэтому моделирование функции плотности $\rho(r)$ является важной задачей в рамках указанной проблематики.

Данная работа является прямым продолжением работы [4], в котором реализуется усовершенствование ранее предложенных модельных функций плотности в рамках частичного или полного удовлетворения условию выгнутости

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} < 0, \tag{2}$$

следующему из уравнения Адамса-Вильямсона [2], [3], для чего предложено использовать простую параболическую добавку. Нормировки новых функций плотности остаются прежними и основываются на знании поверхностной плотности $\rho(R)$ и плотности в центре планеты ρ_0. Учет слоистой структуры также реализуется с помощью θ-функции Хэвисайда. Коэффициенты сшивания полагаются единичными, чтобы не изменять перенормировку функции плотности. Использование неединичных коэффициентов сшивания требует отдельного изучения, что предполагается сделать в дальнейшем.

Модельные функции плотности.

I. Приближение линейной функцией с параболической добавкой. К функции плотности с линейной радиальной зависимостью добавляем параболическую часть, также убывающую с ростом аргумента. В этом случае функция $\rho(r)$ задается выражением

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0-\frac{\rho_0-\rho(R)}{2R}\cdot\left(r+\frac{r^2}{R}\right)\right\}. \tag{3}$$

На основе этого масса планеты (1) оказывается равной

$$M(R)=\pi R^3\left[\frac{13}{60}\rho_0+\frac{9}{20}\rho(R)\right]. \tag{4}$$

II. Приближение чистой параболической функцией. Интересно рассмотреть также и функцию плотности чисто параболического вида, так как она полностью удовлетворяет условию (2). В этом случае

$$\rho(r)=\rho_0-\frac{\rho_0-\rho(R)}{R^2}\cdot r^2 \tag{5}$$

и соответствующая масса

$$M(R)=\frac{4\pi R^3}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho(R)\right]. \tag{6}$$

Таким образом, выражения для масс с функциями плотности (3), (5) имеют очень удобный полиномиальный вид (4), (6).

III. Приближение степенной функцией с параболической добавкой. Следующая модельная функция получается, если в ранее предложенной функции $\rho(r)$ с экспоненциальным поведением [4] учесть условие нормировки и сделать соответствующую добавку, то есть

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0\left[1+\left(\frac{\rho_0}{\rho(R)}\right)^{-\frac{r}{R}}\right]-\frac{\rho_0-\rho(R)}{R^2}\cdot r^2\right\}, \tag{7}$$

при этом масса примет вид

$$M(R)=2\pi\left\{\frac{\rho_0}{\beta^3}\gamma(3;\beta R)+\frac{R^3}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho(R)\right]\right\}, \tag{8}$$

где введён параметр

$$\beta=\frac{1}{R}\ln\frac{\rho_0}{\rho(R)},$$

а $\gamma(3;\beta R)$ – нижняя неполная гамма-функция [5].

IV Приближение обратной функцией с параболической добавкой. И наконец, последняя предлагаемая в этой работе модификация $\rho(r)$ вида

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\left\{\rho_0-\frac{\rho_0-\rho(R)}{R^2}\cdot r^2+\frac{R\rho_0\rho(R)}{R\rho(R)+\left[\rho_0-\rho(R)\right]r}\right\}, \tag{9}$$

приводящая к массе планеты равной

$$M(R)=2\pi R^3\left\{\frac{\rho_0}{3}F(1;3;4;-\gamma R)+\frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}\rho_0+\rho(R)\right]\right\}. \tag{10}$$

Здесь $F(1;3;4;-\gamma R)$ – гипергеометрическая функция [5], с радиальной зависимостью с коэффициентом

$$\gamma=\frac{\rho_0-\rho(R)}{R\rho(R)}.$$

В последних двух случаях выражения для масс (8), (10) содержат специальные функции, однако, это не затрудняет расчета масс, если использовать возможности аналитического или численного интегрирования с помощью современных программных пакетов, например, ***WolframMathematica***.

Функция плотности для шара со слоистой структурой. Метод использования введенных функций плотности в случае учета слоистой структуры планеты заключается в их послойном суммировании с использованием обрезающей на границах слоя функции Хэвисайда. При этом обобщенная функция плотности приобретает вид

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^{n} \Theta(r - r_k) \cdot \rho_{(j)k}(r) \cdot \Theta(r_{k+1} - r) \cdot A_{(j)k+1}, \tag{11}$$

где: $\rho_{(j)k}(r)$ – функция плотности, присутствие у которой индекса j говорит о привязке к j-му приближению, в то время как индекс k номерует слой; также полагаем $r_1 = 0$; $\Theta(r)$ – функция Хэвисайда.

Следует заметить, что прямое интегрирование функции плотности (11) необязательно, так как его результат может быть представлен в виде суммы масс шаровых слоев, получаемых при использовании формул (4), (6), (8) и (10). Поэтому массу планеты, состоящей из n слоев, записываем в виде

$$M = \sum_{k=1}^{n} \mu_k, \qquad \mu_k = M(r_{k+1}) - M(r_k). \tag{12}$$

где μ_k – масса k-го шарового слоя, которая выражается как разность масс шаров различных радиусов.

Модельный расчет масс планет земной группы. Используем предложенные нами модифицированные модельные функции плотности для расчета масс планет земной группы на основе их известных характеристик [6]–[8], представленных в таблице 1.

Таблица 1 – Характеристики планет земной группы

Планета	Масса (кг)	Средний радиус планеты (км)	Плотность вещества в центре планеты (кг/м^3)	Поверхностная плотность вещества планеты (кг/м^3)
Меркурий	$3{,}33022 \cdot 10^{23}$	2439,7	9800	3300
Венера	$4{,}8675 \cdot 10^{24}$	6051,8	14000	2700
Земля	$5{,}9726 \cdot 10^{24}$	6371,0	13100	2200
Марс	$6{,}4185 \cdot 10^{23}$	3389,5	8500	3700

В качестве особо ценного источника достоверных астрофизических данных следует отметить Internet-ресурс [8].

Далее будем учитывать признанную внутреннюю структуру рассматриваемых планет [7], [8], состоящую из пяти компонентов у Земли (кора, верхняя мантия, мантия, внешнее ядро, внутреннее ядро) и трех компонентов у Меркурия, Венеры и Марса (кора, мантия, ядро). Расчеты производим, варьируя комбинации функций плотности для указанных чисел слоев. С модифицированными функциями плотности имеем порядка 150 комбинаций. Если же комбинировать все восемь модельных вариантов распределения, то число комбинаций будет приближаться к $5 \cdot 10^5$.

В таблице 2 приведены три лучших результата расчета масс в рамках указанного подхода.

Таблица 2 – Расчетная масса с учетом слоистой структуры

Планета	Расчетная масса (кг)		
	I-II-III	II-I-IV	I-III-II
Меркурий	$\mathbf{3{,}3322 \cdot 10^{23}}$	$3{,}3391 \cdot 10^{23}$	$3{,}2533 \cdot 10^{23}$
Венера	$4{,}9555 \cdot 10^{24}$	$\mathbf{4{,}8602 \cdot 10^{24}}$	$4{,}7664 \cdot 10^{24}$
Марс	$\mathbf{6{,}4313 \cdot 10^{23}}$	$6{,}6209 \cdot 10^{23}$	$6{,}2773 \cdot 10^{23}$
	II-III-II-IV-I	I-III-I-IV-III	II-II-I-I-III
Земля	$6{,}0413 \cdot 10^{24}$	$5{,}9855 \cdot 10^{24}$	$\mathbf{5{,}9713 \cdot 10^{24}}$

Полученные результаты сравним с реальными массами планет. Теперь улучшенные результаты более точны и отклоняются от действительных масс следующим образом:

– на 0,059 % выше у Меркурия (I-II-III);
– на 0,150 % ниже у Венеры (II-I-IV);
– на 0,022 % ниже у Земли (II-II-I-I-III);
– на 0,199 % выше у Марса (I-II-III).

Приведенные результаты моделирования можно рассматривать как более качественные по сравнению с [4], а соответствующие модельные функции плотности как достаточно близкие к реальным распределениям масс, допускающие использование при решении соответствующих задач. Отклонение в сторону уменьшения масс планет Земля и Венера, говорит нам о необходимости учета распределения массы в их атмосферах.

Заключение. Таким образом, в работе проведено видоизменение модельных функций плотности, предложенных в [4], для планет земной группы путем параболической добавки, что сделало их частично либо полностью выпуклыми. Последнее требование прослеживается по ряду исследований, упоминаемых в монографиях [6] и [7]. Расчеты показали, что новое модельное поведение функций плотности можно считать более достоверным. Оно с большей точностью может быть использовано при решении уравнений динамического равновесия и прочих задач теории внутреннего строения планет. Также несомненно, что к улучшению результатов может привести учет распределения массы в атмосферах, а также деформаций, связанных с центробежным эффектом.

Литература

1. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – Pearson International Edition, 2007. – 1309 p.

2. Магницкий, В.А. Внутреннее строение и физика Земли / В.А. Магницкий. – Москва : Наука, 2006. – 390 с.

3. Уильям, Б. Внутреннее строение планет / Б. Уильям. – Москва : Мир, 1987. – 328 с.

4. Тюменков, Г.Ю. Моделирование радиальной функции плотности гравитирующего шара / Г.Ю. Тюменков, Е.П. Ельников, Е.В. Фирагина // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 36–39.

5. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 249 с.

6. Anderson, D.L. Theory of the Earth / D.L. Anderson, E.C. Robertson. – Boston : Blackwell Publications, 1989. – 366 p.

7. Jordan, T.H. Structural Geology of the Earth's Interior / T.H. Jordan // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 2014. – Vol. 76, № 8. – P. 4192–4200.

8. California Institute of Technology (USA) [Electronic resource] / NASA'S Jet Propulsion Laboratory. – Pasadena, CA, 2004. – Mode of access : www.jpl.nasa.gov/solar-system/. – Data of access : 10.06.2016.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 08.10.2016