УДК 512.542

В. А. Ковалева (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ K-$\mathfrak{U}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

A subgroup H of a finite group G is called $\mathfrak{U}$-subnormal in Kegel's sense or K-$\mathfrak{U}$-subnormal in G if there exists a chain of subgroups $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_t = G$ such that either H_{i-1} is normal in H_i or $H_i/(H_{i-1})_{H_i}$ is supersoluble for any $i = 1, \ldots, t$. We describe finite groups for which every 2-maximal or every 3-maximal subgroup is K-$\mathfrak{U}$-subnormal.

Підгрупа H скінченної групи G називається $\mathfrak{U}$-субнормальною в сенсі Кегеля або K-$\mathfrak{U}$-субнормальною в G, якщо існує такий ланцюжок підгруп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_t = G$, що або H_{i-1} є нормальною в H_i, або $H_i/(H_{i-1})_{H_i}$ є надрозв'язною при будь-якому $i = 1, \ldots, t$. У статті описано скінченні групи, кожна 2-максимальна або кожна 3-максимальна підгрупа яких є K-$\mathfrak{U}$-субнормальною.

1. Введение. Все рассматриваемые в статье группы являются конечными, символом G обозначена конечная группа. Обозначим символом $\mathfrak{U}$ класс всех сверхразрешимых групп; символом $G^{\mathfrak{U}}$ пересечение всех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{U}$; символом $\pi(G)$ множество простых делителей порядка G.

Пусть ϕ — некоторое упорядочение множества простых чисел. Запись $p\phi q$ означает, что p предшествует q в упорядочении ϕ, $p \neq q$. Напомним, что группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ называется ϕ-дисперсивной, если $p_1 \phi p_2 \phi \ldots \phi p_n$ и для любого i группа G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$. Если при этом упорядочение ϕ таково, что $p\phi q$ всегда влечет $p > q$, то ϕ-дисперсивная группа называется дисперсивной по Оре.

Подгруппа H из G называется 2-максимальной (*второй максимальной*) подгруппой в G, если H является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы из G. Аналогично можно определить 3-*максимальные подгруппы* и т. д.

Работы, посвященные изучению n-максимальных подгрупп ($n > 1$), составили обширное направление теории конечных групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Наиболее ранние результаты в данном направлении были получены Л. Редеи [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Б. Хуппертом [2], установившим сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. Кроме того, Б. Хупперт доказал, что если все 3-максимальные подгруппы из G нормальны в G, то коммутант G' является нильпотентной группой и главный ранг G не превышает 2. Позже результаты Л. Редеи и Б. Хупперта получили развитие в работах многих авторов (З. Янко, М. Судзуки, Т. М. Гаген, В. Е. Дескинс, А. Манн, А. Е. Спенсер, Р. Шмидт, В. А. Ведерников, Э. М. Пальчик, Н. П. Конторович, Я. Г. Беркович, Р. К. Агравал, М. Асаад, П. Флавелл и др.).

В последние годы круг математиков, вовлеченных в изучение n-максимальных подгрупп, значительно расширился (А. Баллестер-Болинше, Л. М. Эскуэрро, В. Го, Ш. Го, К. П. Шам, Б. Ли, Ш. Ли, В. А. Белоногов, А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. С. Монахов, В. Н. Семенчук, А. Н. Скиба, В. Н. Тютянов, В. Н. Княгина, В. И. Мурашко, Д. П. Андреева, Ю. В. Луценко, Е. В. Легчекова и др.), что свидетельствует о несомненной актуальности данного направления. Так, Го Шуин и К. П. Шам [3] доказали, что G разрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы имеют свойство покрытия-изолирования. В. Го, К. П. Шам, А. Н. Скиба и Б. Ли [4 – 6] получили новые характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. Ш. Ли [7] получил классификацию ненильпотентных групп, все 2-максимальные подгруппы которых являются TI-подгруппами. В. А. Белоногов [8] привел описание не π-разложимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы являются π-разложимыми. В статье [9] В. Го, Ю. В. Луценко и А. Н. Скиба описали ненильпотентные группы, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны. Описание групп, все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы которых являются субнормальными, было получено в [10]. В работе [11] А. Баллестер-Болинше, Л. М. Эскуэрро и А. Н. Скиба получили полную классификацию групп, в которых вторые максимальные подгруппы силовских подгрупп покрывают или изолируют главные факторы некоторых главных рядов. В. Н. Княгиной и В. С. Монаховым [12] были изучены группы, каждая n-максимальная подгруппа которых перестановочна с любой подгруппой Шмидта. В частности, ими было установлено, что если $n = 1, 2, 3$, то группа метанильпотентна; если $n \geq 4$ и группа разрешима, то нильпотентная длина группы не превышает $n - 1$. В [13] В. С. Монахов и В. Н. Княгина исследовали группы, в которых все 2-максимальные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны.

Напомним, что подгруппа H из G называется $\mathfrak{U}$-*субнормальной* в G, если найдется такая цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$, что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{U}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа H называется $\mathfrak{U}$-*субнормальной в смысле Кегеля* [14] или K-$\mathfrak{U}$-*субнормальной* (см. [15, с. 236]) в G, если найдется такая цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_t = G$, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{U}$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Очевидно, что каждая $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной. Для разрешимой группы G имеет место и обратное утверждение. В работах [16, 17] были получены характеризации разрешимых групп, в которых все n-максимальные подгруппы являются $\mathfrak{U}$-субнормальными, а следовательно, и K-$\mathfrak{U}$-субнормальными.

Заметим, что каждая субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной. Обратное утверждение в общем случае не является справедливым. Например, в симметрической группе степени 3 подгруппа порядка 2 является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной, но в то же время она не является субнормальной. Это элементарное наблюдение, а также результаты работ [10, 16, 17] делают естественными следующие вопросы.

Вопрос 1.1. *Какова структура группы G при условии, что каждая 2-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной?*

Вопрос 1.2. *Какова структура группы G при условии, что каждая 3-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной?*

Важную роль при исследовании вопросов 1.1 и 1.2 играют минимальные несверхразрешимые группы. Напомним, что G называется *минимальной несверхразрешимой* группой, если G не является сверхразрешимой, но каждая собственная подгруппа из G сверхразрешима. Минимальные несверхразрешимые группы были описаны Б. Хуппертом [2] и К. Дерком [18]. Мы говорим, что G является специальной группой Дерка – Хупперта или SDH*-группой*, если G — такая минимальная несверхразрешимая группа, что $G^{\mathfrak{U}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G.

Решение вопроса 1.1 восходит к работам [16, 17]. Следующая теорема является следствием теоремы 3.1 из [16] (или теоремы С из [17]) и леммы 2.2 (см. пункт 2).

Теорема A. *Все* 2*-максимальные подгруппы из* G *являются* K*-*$\mathfrak{U}$*-субнормальными в* G *в том и только в том случае, когда* G *либо сверхразрешима, либо является* SDH*-группой.*

В данной работе на основе теоремы A мы проанализируем вопрос 1.2. Заметим, что поскольку каждая подгруппа сверхразрешимой группы является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной, то, фактически, нам необходимо рассмотреть лишь случай, когда G — несверхразрешимая группа. Но в этом случае, в силу теоремы A из [16] или теоремы A из [17], $|\pi(G)| \leq 4$. Ответ на вопрос 1.2 в случае, когда $|\pi(G)| = 2$, был получен в [19] (теорема 1.2). В данной работе мы приведем полное решение этого вопроса для случаев $|\pi(G)| = 3$ и $|\pi(G)| = 4$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема B. *Пусть* G — *несверхразрешимая группа с* $|\pi(G)| = 3$, p, q, r — *различные простые делители* $|G|$, P, Q *и* R — *силовские* p*-подгруппа,* q*-подгруппа и* r*-подгруппа из* G *соответственно. Каждая* 3*-максимальная подгруппа из* G *является* K*-*$\mathfrak{U}$*-субнормальной в* G *в том и только в том случае, когда* G *является* ϕ*-дисперсивной, например* $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, *и выполнены следующие условия*:

(i) *Каждая* 2*-максимальная подгруппа из* QR *индуцирует на* P *абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей* $p-1$. *Каждая максимальная подгруппа из* QR *индуцирует на* P *группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой экспоненты, делящей* $p-1$.

(ii) *Если* P *является минимальной нормальной подгруппой в* G *и* $P \neq G^{\mathfrak{U}}$, *то либо* $G^{\mathfrak{U}} = Q$, *либо* $G^{\mathfrak{U}} = PQ$, *каждая собственная подгруппа из* G, *содержащая* PQ, *сверхразрешима и* R *индуцирует на* Q *неприводимую группу автоморфизмов. Более того,* $G^{\mathfrak{U}} = Q$ *в том и только в том случае, когда* PR *сверхразрешима.*

(iii) *Если* $\Phi(P) \neq 1$, *то* $G^{\mathfrak{U}} = P$, $P/\Phi(P)$ — *нециклический главный фактор в* G, Q *и* R — *циклические группы, причем* r *делит* $q-1$, *а* qr *делит* $p-1$. *Более того, если* G *является минимальной несверхразрешимой группой, то* $|\Phi(P)| = p$. *Если* G *не является минимальной несверхразрешимой группой, то* $\Phi(P)QR$ — SDH*-группа и, следовательно,* $\Phi(P)$ *является минимальной нормальной подгруппой в* G.

(iv) *Если* P *не является минимальной нормальной подгруппой в* G *и* $\Phi(P) = 1$, *то* $P = P_1 \times \times P_2$, *где* P_1 *и* P_2 — *минимальные нормальные подгруппы в* G *и по крайней мере одна из этих* *подгрупп не является циклической. Более того, в этом случае Q и R являются циклическими группами, r делит $q-1$, а qr делит $p-1$.*

Как следует из теоремы 1.2 из [19], если $|\pi(G)| = 2$, то несверхразрешимая группа G, у которой все 3-максимальные подгруппы K-$\mathfrak{U}$-субнормальны, может не иметь нормальных силовских подгрупп. Из теоремы B следует, что в случае, когда $|\pi(G)| = 3$, такая группа G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. Следующая теорема показывает, что в случае, когда $|\pi(G)| = 4$, G дисперсивна по Оре.

Теорема C. *Пусть G — несверхразрешимая группа с $|\pi(G)| = 4$, $p > q > r > t$ — различные простые делители $|G|$, P, Q, R и T — силовские p-подгруппа, q-подгруппа, r-подгруппа и t-подгруппа из G соответственно. Каждая 3-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия*:

(i) *G является дисперсивной по Оре группой.*

(ii) *P является минимальной нормальной подгруппой в G.*

(iii) *Каждая 2-максимальная подгруппа из QRT индуцирует на P абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$. Каждая максимальная подгруппа из QRT индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой экспоненты, делящей $p-1$.*

(iv) *Если $P \neq G^{\mathfrak{U}}$, то либо $G^{\mathfrak{U}} = Q$, либо $G^{\mathfrak{U}} = PQ$, Q является минимальной нормальной подгруппой в G и каждая собственная подгруппа из G, содержащая PQ, сверхразрешима.*

(v) *R и T являются циклическими группами. Более того, если QRT сверхразрешима, то Q является циклической группой.*

В работе используется стандартная терминология и обозначения, которые при необходимости можно найти в [15, 20, 21].

2. Предварительные результаты. Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие результаты.

Лемма 2.1. *Пусть H и K — подгруппы из G и H является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G.*

(1) *$H \cap K$ является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в K* [15] (6.1.7(2)).

(2) *Если N — нормальная подгруппа из G, то HN/N является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G/N* [15] (6.1.6(3)).

(3) *Если K является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в H, то K — K-$\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа в G* [15] (6.1.6(1)).

(4) *Если $G^{\mathfrak{U}} \leq K$, то K — K-$\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа в G* [15] (6.1.7(1)).

(5) *Если $K \leq H$ и H сверхразрешима, то K является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G.*

Лемма 2.2. *Если каждая n-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, то каждая $(n-1)$-максимальная подгруппа из G сверхразрешима и каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что каждая $(n-1)$-максимальная подгруппа из G сверхразрешима. Пусть H — $(n-1)$-максимальная подгруппа из G и K — произвольная максимальная подгруппа из H. Тогда K является n-максимальной подгруппой в G, поэтому в силу условия леммы K является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Следовательно, K является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в H по лемме 2.1(1). Поэтому либо K нормальна в H, либо $H/K_H \in \mathfrak{U}$. Если

K нормальна в H, то $|H:K|$ — простое число. Пусть $H/K_H \in \mathfrak{U}$. Тогда мы также получаем, что $|H:K| = |H/K_H : K/K_H|$ является простым числом. Таким образом, вследствие произвольности подгруппы K все максимальные подгруппы из H имеют в H простые индексы. Следовательно, подгруппа H сверхразрешима.

Пусть теперь E — некоторая $(n+1)$-максимальная подгруппа из G, E_1 и E_2 — такие n-максимальная и $(n-1)$-максимальная подгруппы из G соответственно, что $E \leq E_1 \leq E_2$. По доказанному выше E_2 сверхразрешима, поэтому E_1 также сверхразрешима. Следовательно, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в E_1 по лемме 2.1(5). Поскольку по условию леммы подгруппа E_1 является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G по лемме 2.1(3).

Лемма доказана.

В работах [16, 17] были получены характеризации разрешимых групп, в которых все n-максимальные подгруппы являются $\mathfrak{U}$-субнормальными, а следовательно, и K-$\mathfrak{U}$-субнормальными. В частности, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3 (см. [16] (теоремы B и C) или [17] (теоремы B и D)). *Пусть G — разрешимая группа, все n-максимальные подгруппы которой K-$\mathfrak{U}$-субнормальны в G.*

(1) *Если $|\pi(G)| \geq n$, то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$.*

(2) *Если $|\pi(G)| \geq n+1$, то G дисперсивна по Оре. Более того, если G несверхразрешима, то $G = A \rtimes B$, где $A = G^{\mathfrak{U}}$ и B — холловы подгруппы в G, A либо имеет вид $N_1 \times \ldots \times N_t$, где N_i, $i = 1, \ldots, t$, — минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся силовской подгруппой в G, либо является силовской p-подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p.*

Напомним, что G называется *группой Шмидта*, если G не является нильпотентной, но каждая собственная подгруппа из G нильпотентна.

Лемма 2.4. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$* [2].

(2) *Если G не является группой Шмидта, то G дисперсивна по Оре* [2].

(3) *$G^{\mathfrak{U}}$ является единственной нормальной силовской подгруппой в G* [2, 18].

(4) *$G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — нециклический главный фактор группы $G/\Phi(G)$* [18].

(5) *Если S — дополнение к $G^{\mathfrak{U}}$ в G, то $S/S \cap \Phi(G)$ является либо примарной циклической группой, либо группой Миллера–Морено* [18].

(6) *Если $|\pi(G)| = 3$, $p > q > r$ — различные простые делители $|G|$, Q и R — силовские q-подгруппа и r-подгруппа из G соответственно, то Q и R являются циклическими группами, причем r делит $q-1$, а qr делит $p-1$* [22] (теорема 10).

3. Доказательства теорем B и C. Напомним, что максимальная подгруппа M из G называется $\mathfrak{U}$-*нормальной* в G, если $G/M_G \in \mathfrak{U}$; в противном случае M называется $\mathfrak{U}$-*абнормальной* в G. Заметим, что в случае, когда G разрешима, максимальная подгруппа M является $\mathfrak{U}$-нормальной в G тогда и только тогда, когда $|G:M|$ — простое число.

***Доказательство теоремы* B.** *Необходимость.* Пусть W — максимальная подгруппа группы G. В силу условия теоремы и леммы 2.1(1) каждая 2-максимальная подгруппа из W является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в W. Поэтому по теореме A группа W либо сверхразрешима, либо является SDH-группой. В частности, все 2-максимальные подгруппы из G сверхразрешимы.

Прежде всего покажем, что группа G разрешима. Поскольку каждая максимальная подгруппа из G является либо сверхразрешимой, либо SDH-группой, каждая собственная подгруппа из G разрешима в силу леммы 2.4(1). Если единичная подгруппа является единственной 3-максимальной подгруппой в G, то все 2-максимальные подгруппы из G имеют простые порядки, поэтому каждая максимальная подгруппа из G является сверхразрешимой. Следовательно, группа G либо сверхразрешима, либо является минимальной несверхразрешимой группой.

Значит, в силу леммы 2.4(1) G разрешима. Пусть теперь T — неединичная 3-максимальная подгруппа из G. Поскольку T является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G, найдется такая собственная подгруппа H из G, что $T \leq H$ и либо $G/H_G \in \mathfrak{U}$, либо H является нормальной в G. Если $G/H_G \in \mathfrak{U}$, то G разрешима вследствие разрешимости подгруппы H_G. Предположим, что H нормальна в G. Пусть E/H — произвольная 3-максимальная подгруппа из G/H. Тогда E является 3-максимальной подгруппой в G, а значит, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Следовательно, E/H является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G/H по лемме 2.1(2). Тогда, условие теоремы справедливо для G/H. Таким образом, по индукции получаем, что G/H разрешима, и поэтому группа G также разрешима.

Поскольку G разрешима, в силу леммы 2.3(1) группа G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. Пусть $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$.

(i) Пусть $V < E < QR$, где E — максимальная подгруппа из QR и V — максимальная подгруппа из E. Тогда PE является максимальной подгруппой в G, а PV — максимальной подгруппой в PE. Следовательно, PV сверхразрешима.

Предположим, что P не является минимальной нормальной подгруппой в PE. Тогда PE не является SDH-группой, и поэтому PE сверхразрешима. Следовательно, $PE/O_{p',p}(PE)$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$ [23] (§ 1, 1.4) и [23] (приложения, 3.2). Более того, $O_{p',p}(PE) = PC_E(P)$, следовательно, $PE/O_{p',p}(PE) \simeq E/C_E(P)$. Значит, E индуцирует на P группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$.

(ii) Предположим, что P является минимальной нормальной подгруппой в G и $P \neq G^{\mathfrak{U}}$. Тогда $M = QR$ является максимальной подгруппой в G и M не является сверхразрешимой группой. Следовательно, M является SDH-группой, и поэтому $Q = M^{\mathfrak{U}}$ является минимальной нормальной подгруппой в M.

Легко видеть, что $G^{\mathfrak{U}} \leq PQ$. Если $P \leq G^{\mathfrak{U}}$, то $G^{\mathfrak{U}} = PQ$, поскольку $Q = M^{\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{U}}$. Предположим, что $P \nleq G^{\mathfrak{U}}$. Тогда $G^{\mathfrak{U}} \cap P = 1$, так как P является минимальной нормальной подгруппой в G. Значит, $G^{\mathfrak{U}} = Q$.

Очевидно, что в случае, когда $G^{\mathfrak{U}} = Q$, группа PR сверхразрешима. Предположим, что PR сверхразрешима. Покажем, что в этом случае $G^{\mathfrak{U}} = Q$. Предположим, что $G^{\mathfrak{U}} = PQ$. Тогда QR является $\mathfrak{U}$-абнормальной подгруппой в G, и поэтому $|P| = |G : QR| \geq p^2$ вследствие разрешимости группы G. Поскольку PR сверхразрешима, R является k-максимальной подгруппой в PR для некоторого $k \geq 2$. Но PR является максимальной подгруппой G, так как Q является минимальной нормальной подгруппой в $M = QR$. Следовательно, R является $(k+1)$-максимальной подгруппой в G, и поэтому R — K-$\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа в G в силу условия теоремы и леммы 2.2. Поэтому найдется такая собственная подгруппа H из G, что $R \leq H$ и либо H нормальна в G, либо $G/H_G \in \mathfrak{U}$. Предположим, что H нормальна в G. Тогда $M \cap H$ нормальна в M. Поскольку R является максимальной подгруппой в M, $R \leq M \cap H$ и R не является нормальной в M, то $M \cap H = M$. Поэтому $M = H$ нормальна в G, что противоречит принятому предположению. Следовательно, $G^{\mathfrak{U}} \leq H$. Значит, $M = QR = M^{\mathfrak{U}}R \leq G^{\mathfrak{U}}R \leq H$, откуда получаем, что подгруппа $M = H$ является $\mathfrak{U}$-нормальной в G. Данное противоречие показывает, что $G^{\mathfrak{U}} = Q$.

Покажем, наконец, что каждая собственная подгруппа группы G, содержащая PQ, сверхразрешима. Предположим, что это не так, и пусть V — такая собственная подгруппа из G, что $PQ \leq V$ и V не является сверхразрешимой. Поскольку каждая 2-максимальная подгруппа из G сверхразрешима, V является максимальной подгруппой в G и, следовательно, V — SDH-группа. В силу леммы 2.4 (1) $|\pi(V)| \leq 3$. Если $|\pi(V)| = 3$, то Q является циклической группой по лемме 2.4 (6), поэтому QR сверхразрешима, что противоречит рассматриваемому нами случаю. Поэтому $|\pi(V)| = 2$, а значит, $V = PQ$. В силу леммы 2.4(5) $Q/Q \cap \Phi(V)$ является либо примарной циклической группой, либо группой Миллера – Морено. Так как V нормальна в G и $\Phi(V)$ характеристична в V, то $\Phi(V)$ нормальна в G. Но Q является минимальной нормальной подгруппой в $M = QR$, поэтому $Q \cap \Phi(V) = 1$ и Q является абелевой группой. Отсюда следует, что группа Q циклична. Полученное противоречие показывает, что V сверхразрешима.

(iii) Предположим, что $\Phi(P) \neq 1$. Поскольку $\Phi(P)$ является характеристической подгруппой в P, данная подгруппа нормальна в G. Поэтому в рассматриваемом случае каждая максимальная подгруппа из G, содержащая P, является сверхразрешимой.

Покажем, что $P/\Phi(P)$ является нециклическим главным фактором группы G. Если все максимальные подгруппы из G сверхразрешимы, то это следует из леммы 2.4 (4). В противном случае рассмотрим несверхразрешимую максимальную подгруппу V из G. Тогда $P \nleq V$ и V является SDH-группой. Пусть V_p — силовская p-подгруппа в V. Тогда $1 \neq \Phi(P) \leq V_p = P \cap V$ нормальна в V, и поэтому $V_p = V^{\mathfrak{U}} = \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в V. Значит, $P/\Phi(P)$ является нециклическим главным фактором в G. Следовательно, $P = G^{\mathfrak{U}}$.

Предположим, что G является минимальной несверхразрешимой группой. Тогда Q и R являются циклическими группами, r делит $q-1$, а qr делит $p-1$ по лемме 2.4(6). Предположим, что $|\Phi(P)| \geq p^2$. Пусть M — такая максимальная подгруппа группы G, что $P \nleq M$. Тогда $G = PM$ и $M = (P \cap M)QR = \Phi(P)QR$, поскольку $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G. Так как группа M сверхразрешима, существует такая 2-максимальная подгруппа E из M, что $|M : E| = p^2$. Следовательно, $M = \Phi(P)E$, и поэтому $G = PE$. Поскольку E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G, найдется такая собственная подгруппа H из G, что $E \leq H$ и либо H нормальна в G, либо $G/H_G \in \mathfrak{U}$. Если H нормальна в G, то, очевидно, G/H сверхразрешима. Следовательно, $P \leq H$, и поэтому $G = PE \leq H$. Пришли к противоречию. В случае, когда $G/H_G \in \mathfrak{U}$, аналогично приходим к противоречию. Значит, $|\Phi(P)| = p$.

Предположим, наконец, что G не является минимальной несверхразрешимой группой. Поскольку каждая максимальная подгруппа из G, содержащая P, является сверхразрешимой, существует такая несверхразрешимая максимальная подгруппа M, что $PM = G$. Не нарушая общности доказательства, можно считать, что $M = \Phi(P)QR$. Так как M не является сверхразрешимой, то M — SDH-группа. Значит, $\Phi(P) = M^{\mathfrak{U}}$ является минимальной нормальной подгруппой в M, поэтому $\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в G. Более того, в силу леммы 2.4(6) Q и R являются циклическими группами, причем r делит $q-1$, а qr делит $p-1$. Следовательно, мы имеем (iii).

(iv) Предположим, что P не является минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(P) = 1$.

В силу теоремы Машке $P = P_1 \times P_2$, где P_1 — минимальная нормальная подгруппа в G, а P_2 — нормальная подгруппа в G. Тогда $L = P_2QR$ является максимальной подгруппой в G. Покажем, что P_2 также является минимальной нормальной подгруппой в G. Если L является SDH-группой, то $P_2 = L^{\mathfrak{U}}$ — минимальная нормальная подгруппа в L, и поэтому P_2 является минимальной нормальной подгруппой в G. Предположим, что группа L сверхразрешима. Тогда $G/P_1 \simeq L$ — сверхразрешимая группа. Если P_1QR сверхразрешима, то $G/P_2 \simeq P_1QR$ также сверхразрешима, и, следовательно, группа G сверхразрешима. Противоречие. Значит, P_1QR не является сверхразрешимой группой. Но каждая 2-максимальная подгруппа из G сверхразрешима. Следовательно, P_1QR является максимальной подгруппой в G, поэтому P_2 является минимальной нормальной подгруппой в G.

Поскольку группа G не является сверхразрешимой, по крайней мере одна из подгрупп $L = P_2QR$ или $T = P_1QR$ несверхразрешима. Пусть T является SDH-группой. Тогда $T^{\mathfrak{U}} = P_1$, и поэтому P_1 не является циклической. Более того, в силу леммы 2.4(6) группы Q и R являются циклическими, причем r делит $q-1$, а qr делит $p-1$.

Достаточность. Пусть E — произвольная неединичная 3-максимальная подгруппа группы G и M — такая максимальная подгруппа из G, что E является 2-максимальной подгруппой в M. Для того чтобы доказать, что подгруппа E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, вследствие разрешимости G, леммы 2.1(3) и теоремы A достаточно найти в G такую $\mathfrak{U}$-нормальную максимальную подгруппу L, что $E \leq L$ и L является либо сверхразрешимой, либо SDH-группой.

Сначала предположим, что $G^{\mathfrak{U}} \leq P$.

Если $P \leq M$, то $M = P \rtimes V$, где V — максимальная подгруппа из QR. Следовательно, V индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$, в силу утверждения (i) теоремы. Если $V/C_V(P)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$, то M сверхразрешима [23] (§ 1, 1.4)). Поэтому E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, так как M является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G по лемме 2.1(4). Если $V/C_V(P)$ — неприводимая группа автоморфизмов подгруппы P, то V является максимальной подгруппой в PV, и поэтому в силу утверждения (i) теоремы PV является SDH-группой. Значит, рассуждая, как и выше, можем показать, что E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G.

Предположим, что $P \nleq M$. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $QR \leq M$. Если $\Phi(P) \neq 1$, то в силу утверждения (iii) теоремы группа $M = \Phi(P)QR$ является SDH-группой. Следовательно, $|M : E|$ делится по крайней мере на одно из чисел q или r, и поэтому для некоторой максимальной подгруппы D из QR имеем $E \leq PD$. В силу утверждения (i) теоремы группа PD сверхразрешима. Поэтому E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G. Рассмотрим, наконец, случай, когда $\Phi(P) = 1$. Если P является минимальной нормальной подгруппой в G, то $M = QR$ — сверхразрешимая группа. Поэтому E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G в силу утверждения (i) теоремы. Предположим, что $P = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 — минимальные нормальные подгруппы группы G и по крайней мере одна из этих подгрупп не является циклической. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $M = P_1QR$. Легко видеть, что P_1 является минимальной нормальной подгруппой в M, поэтому QR является максимальной подгруппой в M. Поскольку $G^{\mathfrak{U}} \leq P$, QR сверхразрешима. Следовательно, $|M : E|$ делится по крайней мере на одно из чисел q или r. Значит, рассуждая, как и выше, получаем, что E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G.

Предположим теперь, что $G^{\mathfrak{U}} \not\leq P$. Тогда в силу утверждений (ii) – (iv) теоремы P является минимальной нормальной подгруппой в G, каждая максимальная подгруппа из G, содержащая PQ, является сверхразрешимой и либо $G^{\mathfrak{U}} = Q$, либо $G^{\mathfrak{U}} = PQ$. Если $PQ \leq M$, то подгруппа M сверхразрешима и $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Следовательно, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Предположим, что $PQ \not\leq M$. Тогда в силу утверждения (ii) теоремы M сопряжена с одной из подгрупп QR или PR. Если $M = QR$, то r делит $|M : E|$. Следовательно, для некоторой такой максимальной подгруппы D из QR, что $|QR \colon D| = r$, получаем $E \leq PD$. Поскольку $PQ \leq PD$, подгруппа PD сверхразрешима и $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Значит, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Рассмотрим теперь случай, когда $M = PR$. Если M сверхразрешима, то $G^{\mathfrak{U}} = Q$ по утверждению (ii) теоремы, и поэтому QR является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G. Значит, $|P| = |G \colon QR| = p$. Следовательно, r делит $|M : E|$, и поэтому существует такая максимальная подгруппа W из G, что $|G \colon W| = r$. Следовательно, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Наконец, если группа M не является сверхразрешимой, то M является SDH-группой в силу утверждения (i) теоремы. Следовательно, рассуждая, как и выше, получаем, что подгруппа E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G.

Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* C.** *Необходимость.* Как и при доказательстве необходимости в теореме B, получаем, что каждая максимальная подгруппа из G либо сверхразрешима, либо является SDH-группой. В частности, все 2-максимальные подгруппы из G сверхразрешимы.

(i) Рассуждая так же, как и при доказательстве необходимости в теореме B, можно показать, что группа G разрешима. Поэтому в силу леммы 2.3(2) группа G является дисперсивной по Оре, т. е. $G = P \rtimes (Q \rtimes (R \rtimes T))$.

(ii) Покажем, что P является минимальной нормальной подгруппой в G.

Предположим, что это не так. Отметим прежде всего, что поскольку $|\pi(G)| = 4$, то G не является минимальной несверхразрешимой группой в силу леммы 2.4(3). Пусть M — такая максимальная подгруппа из G, что $P \not\leq M$. Тогда $G = PM$ и $M \cap P \neq 1$. Следовательно, $|\pi(M)| = 4$, и поэтому M сверхразрешима в силу леммы 2.4(1). Пусть теперь L — произвольная максимальная подгруппа из G, содержащая P. Если L является SDH-группой, то $P = L^{\mathfrak{U}}$ — минимальная нормальная подгруппа в L. Следовательно, P является минимальной нормальной подгруппой в G. Противоречие. Значит, L сверхразрешима. Таким образом, все максимальные подгруппы группы G являются сверхразрешимыми. Следовательно, G является минимальной несверхразрешимой группой. Полученное противоречие показывает, что P является минимальной нормальной подгруппой в G.

(iii) Пусть $V < E < QRT$, где E — максимальная подгруппа из QRT и V — максимальная подгруппа из E. Тогда PE является максимальной подгруппой в G, а PV — максимальной подгруппой в PE. Следовательно, PV сверхразрешима.

Предположим, что P не является минимальной нормальной подгруппой в PE. Тогда PE не является SDH-группой, и поэтому PE сверхразрешима. Следовательно, $PE/O_{p',p}(PE)$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$ [23] (§1, 1.4 и приложения, 3.2). Более того, $O_{p',p}(PE) = PC_E(P)$, следовательно, $PE/O_{p',p}(PE) \simeq E/C_E(P)$. Значит, E индуцирует на P группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$.

(iv) Предположим, что $P \neq G^{\mathfrak{U}}$. Тогда $W = QRT$ не является сверхразрешимой. Поскольку W является максимальной подгруппой в G по (ii), в силу отмеченного выше W

является SDH-группой. Следовательно, $Q = W^{\mathfrak{U}}$ является минимальной нормальной подгруппой в W.

Очевидно, что $G^{\mathfrak{U}} \leq PQ$. Более того, $Q = W^{\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{U}}$. Поэтому в силу леммы 2.3 (2) либо $G^{\mathfrak{U}} = Q$, либо $G^{\mathfrak{U}} = PQ$. Если $G^{\mathfrak{U}} = Q$, то Q является минимальной нормальной подгруппой в G, поскольку Q является минимальной нормальной подгруппой в W. Во втором случае Q является минимальной нормальной подгруппой в G по лемме 2.3 (2).

Пусть, наконец, M — такая максимальная подгруппа из G, что $PQ \leq M$. Поскольку по доказанному выше Q нормальна в G, M не является SDH-группой. Следовательно, M сверхразрешима.

(v) Так как P является минимальной нормальной подгруппой в G по (ii), QRT является максимальной подгруппой в G. Следовательно, группа QRT либо сверхразрешима, либо является SDH-группой. Если QRT — SDH-группа, то R и T цикличны по лемме 2.4 (6).

Предположим, что QRT сверхразрешима. В этом случае $G^{\mathfrak{U}} = P$. Поскольку G не является минимальной несверхразрешимой группой, существует такая максимальная подгруппа M в G, что $P \leq M$ и M является SDH-группой. Так как $G^{\mathfrak{U}} = P \leq M$, M является $\mathfrak{U}$-нормальной в G по лемме 2.1 (4). Следовательно, $|G\colon M|$ является простым числом вследствие разрешимости группы G. Более того, в силу леммы 2.4 (1) $|\pi(M)| = 3$. Если $|G\colon M| = t$, то $|T| = t$. Кроме того, подгруппы Q и R являются циклическими по лемме 2.4 (6). Рассуждая, как и выше, получаем, что в случаях, когда $|G\colon M| = q$ и $|G\colon M| = r$, подгруппы Q, R и T являются циклическими.

Достаточность. Пусть E — произвольная неединичная 3-максимальная подгруппа группы G и M — такая максимальная подгруппа из G, что E является 2-максимальной подгруппой в M. Для того чтобы доказать, что подгруппа E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, в силу леммы 2.1 (3) теоремы А и разрешимости группы G достаточно найти в G такую $\mathfrak{U}$-нормальную максимальную подгруппу L, что $E \leq L$ и L является либо сверхразрешимой, либо SDH-группой.

Прежде всего предположим, что $P = G^{\mathfrak{U}}$. Если $P \leq M$, то M является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G по лемме 2.1 (4). Более того, $M = P \rtimes V$, где V — максимальная подгруппа из QRT. Следовательно, V индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$, в силу утверждения (iii) теоремы. Если $V/C_V(P)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$, то M сверхразрешима [23] (§ 1, 1.4). Поэтому E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, так как M является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G по лемме 2.1(4). Если $V/C_V(P)$ — неприводимая группа автоморфизмов подгруппы P, то V является максимальной подгруппой в PV, и поэтому в силу утверждения (iii) теоремы PV является SDH-группой. Следовательно, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G.

Предположим, что $P \nleq M$. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $M = QRT$. Поскольку E является 2-максимальной подгруппой в M, E индуцирует на P абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$, в силу утверждения (iii) теоремы. Поэтому так же, как и выше, получаем, что группа PE сверхразрешима. Значит, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, поскольку PE является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G по лемме 2.1 (4).

Предположим теперь, что $P \neq G^{\mathfrak{U}}$. В этом случае в силу утверждения (iv) теоремы либо $G^{\mathfrak{U}} = Q$, либо $G^{\mathfrak{U}} = PQ$, Q является минимальной нормальной подгруппой в G и каждая максимальная подгруппа из G, содержащая PQ, сверхразрешима. Если $PQ \leq M$, то M сверхразрешима и является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G.

Следовательно, E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Предположим, что $PQ \nleq M$. Тогда в силу утверждений (iv) и (v) теоремы M сопряжена с одной из подгрупп PRT или QRT. Пусть $M = QRT$. Легко видеть, что Q является минимальной нормальной подгруппой в M. Поэтому $|M : E|$ делится по крайней мере на одно из чисел r или t. Следовательно, существует такая максимальная подгруппа V в G, что $E \leq V$ и $|G : V| \in \{r, t\}$. Так как $PQ \leq V$, V сверхразрешима. Следовательно, как и выше, получаем, что E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Рассмотрим, наконец, случай, когда $M = PRT$. Поскольку P является минимальной нормальной подгруппой в M и RT сверхразрешима, $|M : E|$ делится по крайней мере на одно из чисел r или t. Поэтому так же, как и выше, получаем, что E является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что легко построить примеры, показывающие, что группы, удовлетворяющие условиям теорем B и C, существуют. Более того, в группах, описанных в теоремах B и C, а также в теореме 1.2 из [19], все вторые максимальные подгруппы сверхразрешимы. Частичное описание групп со сверхразрешимыми вторыми максимальными подгруппами было получено в работе В. Н. Семенчука [24].

Литература

1. *Rédei L.* Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen // Acta Math. – 1950. – **84**. – P. 129 – 153.
2. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. – 1954. – **60**. – S. 409 – 434.
3. *Guo X. Y., Shum K. P.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 2003. – **181**. – P. 297 – 308.
4. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. – 2007. – **315**. – P. 31 – 41.
5. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups // J. Algebra. – 2009. – **321**. – P. 2843 – 2860.
6. *Li B., Skiba A. N.* New characterizations of finite supersoluble groups // Sci. China. Ser. A: Math. – 2008. – **50**, № 1. – P. 827 – 841.
7. *Li Sh.* Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups // Math. Proc. Roy. Irish Acad. A. – 2000. – **100**, № 1. – P. 65 – 71.
8. *Белоногов В. А.* Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2014. – **20**, № 2. – С. 29 – 43.
9. *Го В., Луценко Ю. В., Скиба А. Н.* О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны // Сиб. мат. журн. – 2009. – **50**, № 6. – С. 1255 – 1268.
10. *Луценко Ю. В., Скиба А. Н.* Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами // Мат. заметки. – 2012. – **91**, № 5. – С. 680 – 688.
11. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Skiba A. N.* On second maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 2011. – **215**, № 4. – P. 705 – 714.
12. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О перестановочности n-максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 3. – С. 125 – 130.
13. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ric. mat. – 2013. – **62**, № 2. – P. 307 – 322.
14. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. – 1965. – **87**. – S. 409 – 434.
15. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

16. *Ковалева В. А., Скиба А. Н.* Конечные разрешимые группы, у которых все n-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны // Сиб. мат. журн. – 2013. – **54**, № 1. – С. 86 – 97.
17. *Kovaleva V. A., Skiba A. N.* Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal // J. Group Theory. – 2014. – **17**. – P. 273 – 290.
18. *Doerk K.* Minimal nicht uberauflosbare, endliche Gruppen // Math. Z. – 1966. – **91**. – S. 198 – 205.
19. *Kovaleva V. A., Yi X.* Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal // Acta math. hung. – 2015. – **146**, № 1. – P. 47 – 55.
20. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
21. *Guo W.* The theory of classes of groups. – Beijin etc.: Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000.
22. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* On minimal non-supersoluble groups // Rev. mat. Iberoamer. – 2007. – **23**, № 1. – P. 127 – 142.
23. *Between* nilpotent and solvable / Ed. M. Weinstein. – Passaic N.J.: Polygonal Publ. House, 1982.
24. *Семенчук В. Н.* Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами // Вопросы алгебры. – 1985. – **1**. – С. 86 – 96.

Получено 11.02.15