Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕКОТОРЫМИ СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Аннотация: Исследуются конечные группы, у которых некоторые подгруппы Шмидта (минимальные ненильпотентные подгруппы) субнормальны.

Ключевые слова: конечная группа, субнормальная подгруппа, подгруппа Шмидта, ранг разрешимой группы.

В статье рассматриваются только конечные группы. Все определения и обозначения стандартны, их можно найти в [1, 2]. *Группой Шмидта* называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Изучение таких групп началось с работы О. Ю. Шмидта [3]. Обзор результатов о группах Шмидта и перспективы их приложений в теории групп содержится в статье Л. А. Шеметкова [4]. После выхода этой статьи В. Д. Мазуров, С. А. Сыскин и А. Х. Журтов [5, 6] установили новые свойства групп Шмидта. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [7].

В настоящей заметке исследуются группы с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта. Доказывается следующая

Теорема. (1) *Пусть в группе G все p-нильпотентные pd-подгруппы Шмидта субнормальны. При $p > 2$ дополнительно предположим, что группа G p-разрешима. Тогда $G/O_{p'}(F(G))$ p-замкнута. В частности, $l_p(G) \leq 1$.*

(2) *Если в группе G все p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта субнормальны, то $G/O_p(G)$ p-нильпотентна. В частности, группа G p-разрешима, и $l_p(G) \leq 2$.*

(3) *Если в группе G все p-сверхразрешимые pd-подгруппы Шмидта субнормальны, то группа G p-разрешима, $l_p(G) \leq 1$ и фактор-группа $G/O_{p'}(F(G))$ p-замкнута.*

(4) *Если в группе G все pd-подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ p-разложима.*

(5) *Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева.*

Напомним, что *p-замкнутой* называют группу с нормальной силовской p-подгруппой, а *p-нильпотентной* — группу порядка $p^a m$, p не делит m, с нормальной подгруппой порядка m. Группа, порядок которой делится на простое число p, называется *pd-группой*. Если p и q — простые числа, то группа порядка $p^a q^b$, где a и b — неотрицательные целые числа, называется *$\{p, q\}$-группой*.

Работа второго автора выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (код проекта N Ф03–110).

Ранг разрешимой группы определен в монографии [2, с. 685]. Если H — подгруппа группы G, то $H^G = \langle H^x \mid x \in G\rangle$ — наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу H. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G, а $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Как обычно, $O_p(X)$ и $O_{p'}(X)$ — наибольшие нормальные p- и p'-подгруппы соответственно, а $O(X)$ — наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка группы X.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть H — субнормальная подгруппа группы G и p — простое число.*

(1) *Если H p-замкнута, то H^G p-замкнута и $\pi(H^G) = \pi(H)$.*

(2) *Если H p-нильпотентна, то H^G p-нильпотентна и $\pi(H^G) = \pi(H)$.*

Доказательство. (1) Пусть $\mathfrak{H}$ — класс всех p-замкнутых групп. Легко проверить, что $\mathfrak{H}$ — радикальный класс. По следствию 7.7.1 из [1] $\mathfrak{H}$-радикал $G_{\mathfrak{H}}$ содержит все субнормальные $\mathfrak{H}$-подгруппы группы G. Поэтому $H^G \subseteq G_{\mathfrak{H}}$ и H^G — p-замкнутая подгруппа. По следствию 7.7.2(1) из [1] $H^G \subseteq O_{\pi(H)}(G)$. Поэтому $\pi(H^G) = \pi(H)$.

(2) См. следствие 7.7.2(1-3) в [1].

Следуя [8], группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть $S_{\langle p,q\rangle}$-группой. Для $S_{\langle p,q\rangle}$-группы будем использовать запись $[P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, а Q — циклическая ненормальная силовская q-подгруппа.

Лемма 2. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

(1) *L — p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа;*

(2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;*

(3) *L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.*

Доказательство. (1) Пусть L — минимальное добавление к подгруппе D в группе K, т. е. наименьшая подгруппа в K такая, что $K = LD$. По лемме 11.1 в [1] $L \cap D \subseteq \Phi(L)$. Так как $K/D \simeq L/L \cap D$ — p-замкнутая группа и $L \cap D \subseteq \Phi(L)$, то по лемме 4.4.1 из [1] подгруппа L p-замкнута. Кроме того, по лемме 11.2 из [1] $\pi(L) = \pi(K/D) = \{p,q\}$.

(2) Пусть F — собственная нормальная подгруппа группы L. Тогда FD — собственная подгруппа группы K, поэтому $FD/D \simeq F/F \cap D$ нильпотентна. Так как $F \cap D \subseteq \Phi(L)$, то по лемме 4.4.1 из [1] подгруппа F нильпотентна.

(3) Ясно, что L не q-замкнута и по лемме 1.5 из [8] содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу Шмидта $[P]Q$. Так как $[P]Q$ не содержится в D, то $[P]Q \cap D$ — собственная нормальная подгруппа в $[P]Q$, поэтому Q не содержится в D. Поскольку Q^L — нормальная подгруппа в L, то Q^L нильпотентна или $Q^L = L$. Если Q^L нильпотентна, то $Q \leq Q^L \cap [P]Q$ и $Q \triangleleft [P]Q$; противоречие. Остается случай, когда $Q^L = L$. Так как $L = Q^L \subseteq [P]Q^L$, то $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

Пример 1. Пусть K — диэдральная группа порядка $2p^2$, где p — нечетное простое число и D — подгруппа порядка p из K. Тогда $D \triangleleft K$ и K/D является $S_{\langle p,2\rangle}$-подгруппой. Минимальное добавление L к подгруппе D совпадает с K и не является $S_{\langle p,2\rangle}$-подгруппой. Поэтому в лемме 2 подгруппа L может и не быть подгруппой Шмидта.

Лемма 3 [1, теорема 7.5]. *Подгруппа, порожденная субнормальными подгруппами, субнормальна.*

Лемма 4. *Пусть p и q — различные простые числа и в группе G все $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы субнормальны. Если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы субнормальны.*

Доказательство. Пусть S/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G/N и L — минимальная подгруппа из S такая, что $S = LN$. По лемме 2 в L имеется $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа A такая, что $A^L = L$. По условию подгруппа A субнормальна в G, а по лемме 3 подгруппа L субнормальна в G. Теперь $S = LN$ субнормальна в G, а значит, и S/N — субнормальная подгруппа фактор-группы G/N.

Лемма 5. *Пусть p и q — различные простые числа и в группе G все $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы субнормальны. Тогда в фактор-группе $G/O_p(G)$ нет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. предположим, что $S/O_p(G)$ — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа фактор-группы $G/O_p(G)$. Пусть L — минимальная подгруппа в S такая, что $S = LO_p(G)$. По лемме 2 в подгруппе L существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа $[P]Q$ такая, что $(PQ)^L = L$. По условию леммы подгруппа PQ субнормальна в G, а по лемме 3 подгруппа L субнормальна в G. Но L — p-замкнутая подгруппа по лемме 2, поэтому ее силовская p-подгруппа T субнормальна в G. По лемме 1 нормальная оболочка T^G содержится в $O_p(G)$ и $S/O_p(G)$ становится q-группой; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. (1) *Если в группе G нет p-замкнутых подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

(2) *Любая группа либо 2-замкнута, либо в ней существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта.*

(3) *Если в p-разрешимой группе G нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта, то G p-замкнута.*

Доказательство. (1) См. лемму 1.5 в [8].

(2) См. следствие 3.1.1 в [8].

(3) В p-разрешимой группе G существуют $\{p,q\}$-холловы подгруппы $G_{\{p,q\}}$ для каждого простого числа $q \in \pi(G)\backslash\{p\}$, теорема D5 из [9]. По условию леммы в $G_{\{p,q\}}$ нет q-замкнутых подгрупп Шмидта, поэтому по (1) подгруппа $G_{\{p,q\}}$ q-нильпотентна, а значит, p-замкнута. Теперь в группе G все бипримарные холловы подгруппы p-замкнуты. Следовательно, и вся группа G p-замкнута.

Лемма 7. *Если группа G не имеет p-сверхразрешимых pd-подгрупп Шмидта, то G является p-замкнутой группой.*

Доказательство. Если $p = 2$, то по лемме 6(2) в не 2-замкнутой группе существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта, которая будет 2-сверхразрешимой. При $p > 2$ утверждение с помощью классификации конечных простых групп доказано в [10].

При доказательстве теоремы будем использовать методы теории формаций [1]. Напомним, что *формацией* называется непустой класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{X}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/N \in \mathfrak{X}$, $N \le \Phi(G)$, всегда следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом группы* G (см. [1, 11]). *Произведением* формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{\, G \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X} \,\}$, состоящий из всех групп G, у которых $\mathfrak{Y}$-корадикал принадлежит $\mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ обозначаются формации всех абелевых и нильпотентных групп соответственно.

Лемма 8 [11, теоремы VII.4, VII.5]. *Если $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формация, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация.*

Напомним, что $A_G = \bigcap_{x \in G} A^x$ — ядро подгруппы A в группе G. Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = 1$, то группу G называют *примитивной*, а подгруппу M — ее *примитиватором*, см. [11]. Свойства примитивных разрешимых групп хорошо известны (см., например, [11, теорема I.8; 2, теорема II.3.2]).

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и G — разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G — примитивная группа.*

Доказательство. Утверждение легко выводится из соответствующих определений.

Через $r(G)$ обозначается ранг разрешимой группы G (см. [2, с. 685]).

Лемма 10. *Пусть p и q — различные простые числа и m — показатель числа p по модулю q. Тогда любая $S_{\langle p,q\rangle}$-группа имеет ранг m.*

Доказательство. Еще О. Ю. Шмидт доказал, что главные факторы любой $S_{\langle p,q\rangle}$-группы имеют порядки p^m, q, а для групп с неабелевой силовской p-подгруппой существуют еще главные факторы порядка p [3]. Поэтому любая $S_{\langle p,q\rangle}$-группа имеет ранг m.

Лемма 11. *Пусть $\mathbb{A}$ — некоторое множество натуральных чисел. Если в группе G каждая подгруппа Шмидта ранга, принадлежащего множеству $\mathbb{A}$, субнормальна, то в фактор-группе $G/F(G)$ каждая подгруппа Шмидта имеет ранг, не принадлежащий множеству $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. допустим, что в фактор-группе $G/F(G)$ имеется $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа $K/F(G)$ ранга m и $m \in \mathbb{A}$. По лемме 10 число m совпадает с показателем числа p по модулю q. По лемме 2 в минимальном добавлении L к $F(G)$ в K существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа $[P]Q$ такая, что $(PQ)^L = L$. Так как $[P]Q$ имеет ранг $m \in \mathbb{A}$, то по условию леммы подгруппа PQ субнормальна в G. По лемме 3 подгруппа L субнормальна в G. Но L — p-замкнутая подгруппа по лемме 2, поэтому ее силовская p-подгруппа L_p содержится в $F(G)$ по лемме 1. Но теперь $K/F(G)$ становится q-группой; противоречие. Поэтому допущение неверно и в $G/F(G)$ нет подгрупп Шмидта ранга, принадлежащего $\mathbb{A}$.

Доказательство теоремы. (1) Пусть $K = O_{p'}(F(G))$ — p'-холлова подгруппа из подгруппы Фиттинга группы G. Если в группе G нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта, то по лемме 6 группа G p-замкнута. Пусть S — $S_{\langle q,p\rangle}$-подгруппа группы G, где $q \in \pi(G)\backslash\{p\}$. По условию подгруппа S субнормальна в G, поэтому ее силовская q-подгруппа Q также субнормальна в G. По лемме 1 $Q \subseteq O_q(G) \subseteq K$. Теперь по лемме 5 в фактор-группе G/K нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта. По лемме 6 фактор-группа G/K p-замкнута. Ясно, что $l_p(G) \leq 1$.

(2) Если в группе G нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна по лемме 6. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G, где $q \in \pi(G)\backslash\{p\}$. По условию подгруппа S субнормальна в G, поэтому ее силовская p-подгруппа

P также субнормальна в G. По лемме 5 в фактор-группе $G/O_p(G)$ нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, поэтому $G/O_p(G)$ p-нильпотентна по лемме 6. Ясно, что $l_p(G) \leq 2$.

(3) Если в группе G нет p-сверхразрешимых pd-подгрупп Шмидта, то по лемме 7 группа G p-замкнута. Пусть в группе G есть p-сверхразрешимая pd-подгруппа Шмидта H. По лемме 1 подгруппа H^G бипримарна. Обозначим через K произведение нормальных оболочек всех p-сверхразрешимых pd-подгрупп Шмидта группы G. Ясно, что K — нормальная разрешимая подгруппа группы G.

Предположим, что фактор-группа G/K не p-замкнута. Тогда по лемме 7 в G/K существует p-сверхразрешимая $\{p,q\}$-подгруппа Шмидта A/K. Если A/K p-замкнута, то по лемме 10 число q делит $p-1$, а по лемме 2 в минимальном добавлении L к подгруппе K в группе A существует p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа Шмидта $[P]Q$ такая, что $([P]Q)^L = L$. По лемме 10 $[P]Q$ p-сверхразрешима и $[P]Q \leq K$. Поэтому $L = ([P]Q)^L \leq K^L = K$; противоречие. Пусть A/K — p-нильпотентная подгруппа Шмидта. Тогда по лемме 2 в минимальном добавлении L к подгруппе K в группе A существует p-нильпотентная $\{p,q\}$-подгруппа Шмидта $[Q]P$ такая, что $L = ([Q]P)^L \leq K^L = K$. Так как подгруппа $[Q]P$ p-сверхразрешима, опять пришли к противоречию. Значит, фактор-группа G/K p-замкнута. Поэтому группа G p-разрешима и применимо утверждение (1) теоремы.

Ясно, что каждая p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта является p-сверхразрешимой. Если в группе G нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта, то по лемме 6(3) группа G p-замкнута. Если в группе G есть p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта, то по условию она субнормальна и по п. (1) теоремы фактор-группа $G/O_{p'}(F(G))$ p-замкнута и $l_p(G) \leq 1$.

(4) Пусть в группе G все pd-подгруппы Шмидта субнормальны. Если в группе G нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна. Если они есть, то по (2) группа $G/O_p(G)$ p-нильпотентна. Итак, в любом случае $G/O_p(G)$ p-нильпотентна. В частности, группа G p-разрешима. Теперь из (1) следует, что фактор-группа $G/O_{p'}(F(G))$ p-замкнута, а из (2) — что $G/O_p(G)$ p-нильпотентна. Поэтому $G/F(G)$ p-разложима.

(5) Из (4) вытекает, что $G/F(G)$ p-разложима для всех p, поэтому $G/F(G)$ нильпотентна. Используя индукцию по порядку группы G, покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. По лемме 8 произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ является насыщенной формацией. Если $N \lhd G$, то по лемме 4 в фактор-группе G/N все подгруппы Шмидта субнормальны. По индукции имеем $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ для всех $N \lhd G$, $N \neq E$. По лемме 9 G — примитивная группа. По свойствам примитивных разрешимых групп [11, теорема I.8; 2, теорема II.3.2] подгруппа Фиттинга $P = F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, $P = C_G(P)$, $G = [P]M$ и $O_p(M) = 1$, где $|P| = p^n$. Так как M нильпотентна, то M является p'-группой и P — силовская подгруппа в G. Если H — собственная подгруппа из M, то $PH \neq G$ и по индукции $PH \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Из того, что $C_G(P) = P$, следует, что $P = F(PH)$, поэтому $H \in \mathfrak{A}$. Таким образом, все собственные в M подгруппы абелевы. Если M абелева, то утверждение доказано. Если M неабелева, то M является минимальной неабелевой группой, а поскольку M нильпотентна, то M является q-группой для некоторого простого $q \neq p$ и строение M известно (см. [2, с. 309]).

Предположим, что Q — подгруппа простого порядка из M. Если Q действует приводимо на P, то по теореме Машке [2, теорема I.17.6] существуют две минимальные нормальные подгруппы P_1 и P_2 в группе PQ. Ясно, что произведение P_iQ является подгруппой Шмидта. По условию подгруппа P_iQ субнормальна в группе G, поэтому пересечение $P_1Q \cap P_2Q = Q$ также является субнормальной подгруппой группы G. Но теперь по лемме 1 $Q \leq O_q(G)$; противоречие. Следовательно, все подгруппы из M действуют неприводимо на P. По лемме 4.1 из [1] все собственные подгруппы в M циклические. Ввиду того, что M — нильпотентная минимальная неабелева группа, из теоремы [2, с. 309] получаем, что M — группа кватернионов. Значит, $q = 2$, и по свойствам группы Шмидта PQ получаем, что $|P| = p$. Но теперь G/P — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$, и M циклическая. Теорема доказана полностью.

Пример 2. В группе $X = \big([Z_5]Z_2^{(1)}\big) \times \big([Z_3]Z_2^{(2)}\big)$ все подгруппы Шмидта субнормальны, но $X/F(X)$ нециклическая. В группе $Y = [Z_5]Z_4$, $C_Y(Z_5) = Z_5$, все подгруппы Шмидта субнормальны, но $Y/F(Y)$ не элементарная абелева. Здесь Z_k — циклическая группа порядка k. Поэтому в п. (5) теоремы силовские подгруппы фактор-группы $G/F(G)$ могут быть нециклическими и не элементарными абелевыми.

Пример 3. В простой группе $SL(2, 2^n)$ нет 3-нильпотентных $3d$-подгрупп Шмидта, а в группе $PSL(2, p)$, $p \geq 5$, нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта. Поэтому условие p-разрешимости группы G в п. (1) теоремы отбросить нельзя.

Следствие 1. *Пусть m — натуральное число и в группе G все $2d$-подгруппы Шмидта ранга $\neq m$ субнормальны. Тогда*

(1) *если $m = 1$, то $G/O_2(G)$ 2-нильпотентна;*

(2) *если $m \neq 1$, то $G/O(F(G))$ 2-замкнута.*

В частности, в любом случае группа G разрешима и $l_2(G) \leq 2$.

Доказательство. (1) Пусть $m = 1$. По лемме 10 каждая $2d$-подгруппа Шмидта ранга $\neq 1$ является 2-замкнутой. По п. (2) доказанной теоремы фактор-группа $G/O_2(G)$ 2-нильпотентна.

(2) Пусть $m > 1$. По условию доказываемого следствия все $2d$-подгруппы Шмидта ранга 1 субнормальны. По лемме 10 каждая $2d$-подгруппа Шмидта ранга 1 является 2-нильпотентной. По п. (1) доказанной теоремы фактор-группа $G/O(F(G))$ 2-замкнута. В частности, в любом случае группа G разрешима, и $l_2(G) \leq 2$.

Следствие 2. *Если в группе G все подгруппы Шмидта ранга $\neq 1$ субнормальны, то $G/F(G)$ дисперсивна по Оре.*

Доказательство. По лемме 11 в фактор-группе $G/F(G)$ нет подгрупп Шмидта ранга > 1, т. е. все подгруппы Шмидта сверхразрешимы. Такие группы дисперсивны по Оре в силу теоремы из [12].

В заключение отметим, что лемма 11 и результаты работ [13, 14] позволяют также установить свойства группы, в которой все подгруппы Шмидта ранга $\neq 2$ или $\neq 3$ субнормальны. В частности, такие группы будут разрешимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

3. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.

4. *Шеметков Л. А.* О. Ю. Шмидт и конечные группы // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 585–590.
5. *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14. С. 217–222.
6. *Журтов А. Х, Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 26. С. 74–78.
7. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса. 2001. Киев, 2002. Секция 1. С. 81–90.
8. *Монахов В. С.* О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Т. 13. С. 153–171.
9. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 3. P. 286–304.
10. *Голубева О. В.* К теореме С. А. Чунихина // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2000. № 3. Вопросы алгебры-16. С. 195–198.
11. *Gaschutz W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Canberra: Australian National Univ., 1979. (Notes Pure Math.; 11).
12. *Монахов В. С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.
13. *Максимов С. Л.* О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 3 // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2001. № 3. Вопросы алгебры-17. С. 186–190.
14. *Максимов С. Л.* О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 2 // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. 2002. № 2. С. 38–41.

Статья поступила 29 апреля 2004 г.

Княгина Виктория Николаевна, Монахов Виктор Степанович
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104. Гомель 246019, Беларусь
knyagina@gsu.unibel.by, monakhov@gsu.unibel.by