

КОЛЕБАНИЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИКА

Двойной математический маятник (рисунок 1) представляет собой интересную механическую систему, поскольку его колебания кардинальным образом отличаются от колебаний одинарного математического маятника. Как известно, колебания простого маятника носят периодический характер и при малых отклонениях от положения равновесия являются гармоническими. Колебания двойного математического маятника представляют собой чередующиеся колебания двух различных колебательных систем (l_1, m_1 и l_2, m_2) или биения, которые с увеличением энергии становятся хаотическими.

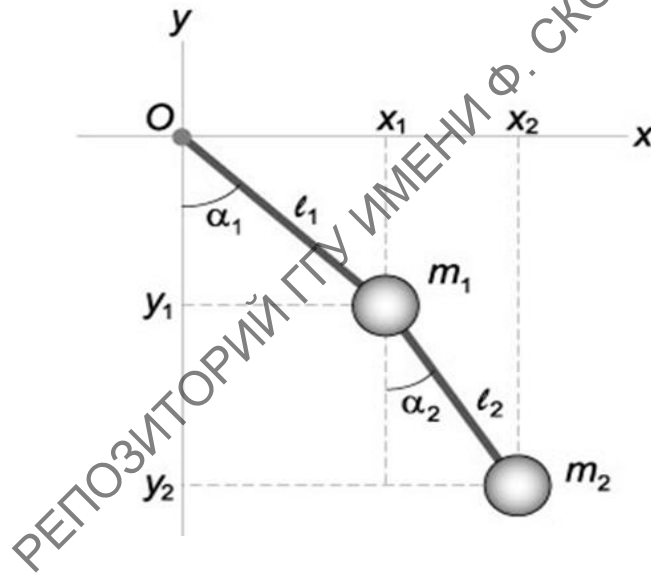


Рисунок 1 – Двойной математический маятник

Информация о двойном маятнике широко представлена как в физической литературе, так и на просторах интернета.

Цель данной работы продемонстрировать возможности современных систем численных и символьных вычислений при решении задач теоретической механики на примере пакета Wolfram Mathematica [1], основывающегося на инновационном языке

Wolfram Language. Wolfram Mathematica имеет доступ к широкой базе Wolfram Knowledgebase, которая включает реальные данные из тысяч предметных областей. База или библиотека содержит более 150000 примеров из Documentation Center и более 10000 демонстраций с открытым кодом в Wolfram Demonstrations Project. Все это позволяет считать систему Wolfram Mathematica цифровой системой знаний. Рассмотрим как используется данная система для изучения движения двойного математического маятника.

Математическое описание данного явления удобно провести в рамках Лагранжевого формализма, т. е. в обобщенных координатах, которыми в данном случае будут углы отклонения маятников от положения равновесия $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ (рисунок 1). Представив декартовы координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 через обобщенные, получим функцию Лагранжа, а затем уравнения колебаний маятников, которые являются уравнениями Лагранжа 2-го рода. В данном подходе функция Лагранжа имеет вид [2]:

$$L = T - U = T_1 + T_2 - (U_1 + U_2) = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1^2 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_2 \cos \alpha_2, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия маятников, U – потенциальная энергия.

Для получения уравнений движения воспользуемся пакетом VariationalMethods с функцией EulerEquations, при этом программный блок выглядит следующим образом:

(* Программный блок 1 *)

Needs["VariationalMethods`"];

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \alpha_1'[t]^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \alpha_2'[t]^2 + m_2 l_1 l_2 \alpha_1'[t] \alpha_2'[t] \text{Cos}[\alpha_1[t] - \alpha_2[t]] + (m_1 + m_2) g l_1 \text{Cos}[\alpha_1[t]] + m_2 g l_2 \text{Cos}[\alpha_2[t]];$$

(* Уравнения движения *)

deqns=EulerEquations[\mathcal{L} , { $\alpha_1[t]$, $\alpha_2[t]$ }, t];

(* Начальные условия *)

$$\text{ics} = \{ \alpha_1[0] = \alpha_{10}, \alpha_1'[0] = 0, \alpha_2[0] = \alpha_{20}, \alpha_2'[0] = 0 \}.$$

В результате выполнения данного блока уравнения движения, полученные на основе функции (1), представляют собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + m_2 l_2 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ + (m_1 + m_2) g \sin \alpha_1 = 0, \\ l_2 \ddot{\alpha}_2 + l_1 \dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + g \sin \alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Следующий этап получения численного решения системы дифференциальных уравнений (2) для конкретных значений характеристик маятников (длина нити, масса шариков) осуществляется с помощью оператора NDSolve. Решение в виде интерполяционных функций, которое выдает второй модуль sol=NDSolve[{deqns,ics},{ α_1 , α_2 },{t,0,30}][[1]], представлено на рисунке 2. Такой подход дает возможность провести визуализацию, наглядную интерпретацию полученных результатов, продемонстрировать в интерактивном режиме все возможные виды колебаний двойного математического маятника как при больших энергиях, так и вблизи положения равновесия.

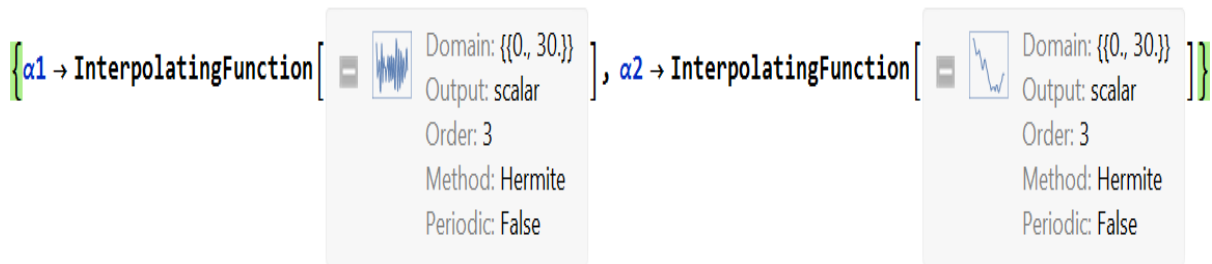


Рисунок 2 – Решение системы дифференциальных уравнений (2) в Wolfram Mathematica в виде интерполяционных функций

Программный блок, который позволяет построить траектории движения математических маятников с помощью функции ParametricPlot и сделать наглядную компьютерную динамическую модель движения такой системы, используя оператор Animate, приведен ниже:

```

x1[t_]:=l1Sin[alpha1[t]];
y1[t_]:= - l1Cos[alpha1[t]];
x2[t_]:=x1[t]+l2Sin[alpha2[t]];
y2[t_]:=y1[t]-l2Cos[alpha2[t]];
tt=30;
(*Графический блок*)
Show[ParametricPlot[Evaluate[{x1[t],y1[t]}/.sol],{t,0,30},PlotStyle->Blue],
ParametricPlot[Evaluate[{x2[t],y2[t]}/.sol],{t,0,30},PlotStyle->Red],
Graphics[{{Black,CapForm["Round"],Thickness[0.03],
Line[{{0,0},{x1[tt],y1[tt]}}]},
{Orange,Thickness[0.03],CapForm["Round"],
Line[{{x1[tt],y1[tt]},{x2[tt],y2[tt]}}]}/.sol,
PlotRange->All,ImageSize->300}
(* Блок анимации *)
Animate[Graphics[{{Black,CapForm["Round"],Thickness[0.03],
Line[{{0,0},{x1[t],y1[t]}}]},
{Orange,Thickness[0.03],CapForm["Round"],
Line[{{x1[t],y1[t]},{x2[t],y2[t]}}],Point[{{x2[t],y2[t]}}]/.sol,
PlotRange->{{-4.1,4.1},{2.6,-3.5}},Frame -> True},{t,0,15},
SaveDefinitions->True,AnimationRunning->False].

```

Результ выполнения графического блока представлен на рисунке 3.

Если предположить что углы $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ малы, то колебания маятников вблизи положения равновесия можно описать системой линейных дифференциальных уравнений. Для этого функцию Лагранжа (1) запишем с учетом разложения в ряд в приближении $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1$. Тогда выражение (1) с точностью до константы примет более простой вид:

$$\begin{aligned}
L = T - U = T_1 + T_2 - (U_1 + U_2) = & \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + \\
& + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 - \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) g l_1 \alpha_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \alpha_2^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

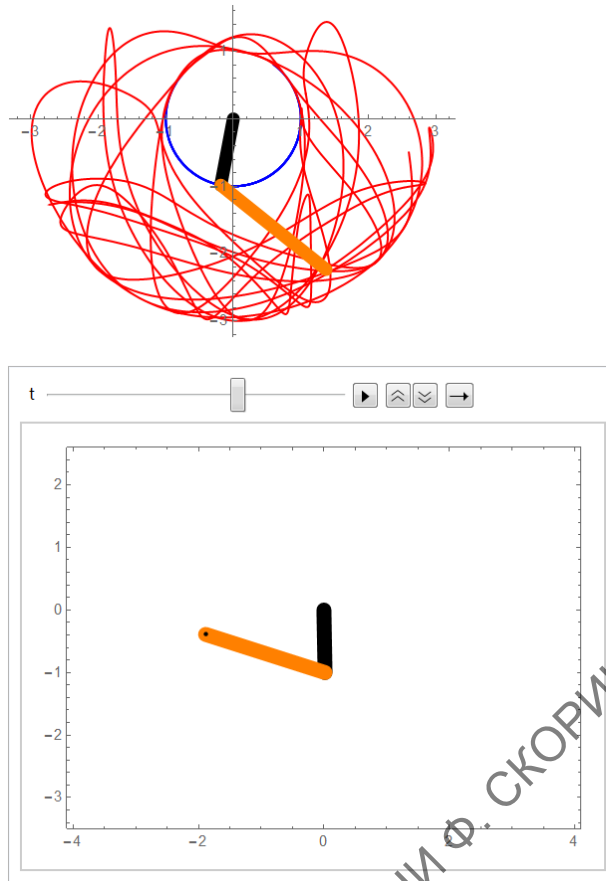


Рисунок 3 – Визуализация решений дифференциальных уравнений (2) в Wolfram Mathematica

а уравнения движения для малых колебаний, полученные при дифференцировании функции Лагранжа (3) по обобщенным координатам α_1 и α_2 , запишутся системой:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 + (m_1 + m_2)g\alpha_1 = 0, \\ l_1 \ddot{\alpha}_1 + l_2 \ddot{\alpha}_2 + g\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Аналитическое решение системы (4) вручную в общем случае весьма громоздко. Получить его можно в матричном или векторном виде используя понятия собственных векторов, собственных частот и нормальных координат.

Возможности системы Wolfram Mathematica значительно упрощают данный процесс. Аналитическое решение уравнений движения (4) системы, совершающей малые линейные колебания осуществляется с помощью оператора DSolve. Применение этого оператора после введения подстановок для случая $l_1 = l_2 = \ell, \dot{\alpha}_1[0] = 0, \dot{\alpha}_2[0] = 0$ дает решение в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{1}{2d} \sum_{\lambda=-1}^1 (d\alpha_1(0) - \lambda \ell \mu \alpha_2(0)) \cos[\omega_\lambda t], \\ \alpha_2(t) &= \frac{1}{2d} \sum_{\lambda=-1}^1 (d\alpha_2(0) - \lambda \ell (1 + \mu) \alpha_1(0)) \cos[\omega_\lambda t], \\ d &= \ell \sqrt{\mu(1 + \mu)}, \mu = \frac{m_2}{m_1}, \omega_\pm = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{(1 + \mu) \pm \sqrt{\mu(1 + \mu)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (5) ω – собственная частота колебаний маятников.

Таким образом, использование возможностей интерактивной системы компьютерной математики Wolfram Mathematica позволяет не только наглядно продемонстрировать колебания двойного математического маятника, но и получить траекторию его хаотического движения. Важно отметить, что создание программных модулей не требует больших временных затрат, поскольку Wolfram Mathematica содержит огромное количество примеров в своей информационной системе (Document Center). Примеры можно легко внедрить в программу расчетов. Важным фактором является и наличие дружественного интерфейса, который близок к обычным физико-математическим расчетам.

Список использованных источников

- 1 Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Addison-Wesley, 1999. – 359 p.
- 2 Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 томах / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – Москва : Физматлит, 2018. – Т. 1 : Механика. – 224 с.