14. **Быков В. Н. и др.** «Атомная энергия», 1974, т. 36, вып. 1, с. 24.
15. **Bankloh W., Zimmerman G.** «Arch. Eisenhütten-wesen», 1936, H. 9—März, S. 459.
16. **Bloom M., Krulfeld M.** «J. Electrochem. Soc.,» 1957, v. 104, N 5, p. 264.
17. **Corney A. e.a.** In: Proc. «Electric Furnace Steel», AJME, 1948, v. 6, p. 38.
18. **Правила** контроля сварных соединений и наплавки узлов и конструкций атомных электростанций, опытных и исследовательских ядерных реакторов и установок. ПК1514-72. М., «Металлургия», 1973.
19. **Нормы** расчета на прочность элементов реакторов парогенераторов, сосудов и трубопроводов атомных электростанций, опытных и исследовательских ядерных реакторов и установок. М., «Металлургия», 1973.
20. **Brinkman C., Beeston J.** IN-1359, Idano Falls, Febr. 1970.

УДК 539.125.52:621.039.51.12

Нестационарный пространственно-энергетический спектр нейтронов в тяжелой поглощающей слабо неоднородной среде

МЕТЕЛКИН Е. В.

Изучение процесса переноса нейтронов от нестационарного источника представляет значительный интерес и имеет довольно широкую область приложений [1]. Нестационарный перенос нейтронов используется для измерения нейтронно-физических констант различных сред, а также для анализа структуры и состава сред, недоступных непосредственному исследованию (как, например, в ядерной геофизике). Кроме того, знание временно́й эволюции спектра нейтронов необходимо при решении целого ряда задач нейтронной физики, физики защиты и многих других.

Аналитическое исследование нестационарного упругого замедления нейтронов в тяжелой однородной среде проводилось в работе [2]. Нестационарный, пространственно-энергетический спектр нейтронов от точечного импульсного монохроматического источника для важного частного случая упругого замедления в тяжелой слабо неоднородной среде вычислен в работе [3]. При этом предполагалось, что поглощение нейтронов отсутствует. В неоднородной среде максимум плотности столкновений нейтронов смещается (по сравнению с однородной средой) в направлении возрастания плотности замедлителя [3].

Однако в большинстве используемых на практике замедлителей поглощение нейтронов весьма существенно и им пренебрегать нельзя. Если плотность замедлителя возрастает, то поглощение нейтронов происходит интенсивнее, что приводит к дополнительному перераспределению нейтронов в пространстве.

В настоящей работе обобщаются результаты, полученные в [3] для замедлителей, в которых происходит поглощение нейтронов. Везде предполагается [3], что пространственная зависимость макроскопических сечений рассеяния и поглощения вызвана изменением плотности среды и ввиду ее слабой неоднородности имеет вид:

$$\Sigma_{s,\,a}(\mathbf{r},\, v) = \Sigma_{s,\,a}(v)\,\Sigma(\mathbf{r}), \quad \Sigma(\mathbf{r}) = 1 - \mathbf{r}\nabla l. \tag{1}$$

Предполагается также, что

$$\Sigma_s(v) = \mathrm{const}; \quad \Sigma_a(v) = \frac{\Sigma_a^{(0)}}{v}; \quad \Sigma_a^{(0)} = \mathrm{const}, \tag{2}$$

как это наблюдается в большинстве замедлителей [2, 4].

Уравнение, описывающее нестационарное упругое замедление нейтронов в неоднородной среде от точечного импульсного монохроматического источника, имеет следующий вид [4]:

$$\frac{l_s(u,\,\mathbf{r})}{v}\frac{\partial\Psi(u,\,\mathbf{r},\,\mathbf{\Omega},\,t)}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\nabla\left[l_s(u,\,\mathbf{r})\,\Psi(u,\,\mathbf{r},\,\mathbf{\Omega},\,t)\right] + \left(1 + \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)\Psi(u,\,\mathbf{r},\,\mathbf{\Omega},\,t) = \int_0^u du' \int d\mathbf{\Omega}' f(\mu_0,\, u-u')\,\Psi(u',\,\mathbf{r},\,\mathbf{\Omega}',\,t) + \frac{1}{4\pi}\,\delta(u)\,\delta(\mathbf{r})\,\delta(t), \tag{3}$$

где $\Psi(u,\,\mathbf{r},\,\mathbf{\Omega},\,t) = \frac{v}{l_s(u,\,\mathbf{r})}N(u,\,\mathbf{r},\,\mathbf{\Omega},\,t)$ — плотность упругих соударений нейтронов, отнесенная к единичным интервалам $\mathbf{r}$, $\mathbf{\Omega}$, u; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки пространства; $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор в направлении скорости v; $u = \ln\frac{E^+}{E}$ —

летаргия (E^+ — энергия источника); $l_s(u, \mathbf{r}) = \frac{1}{\Sigma_s(u, \mathbf{r})}$ — длина свободного пробега нейтронов по отношению к рассеянию; $f(\mu_0, u)$ — индикатриса упругого рассеяния нейтронов [2—4].

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\Psi = \Psi'(u, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) \exp(-\Sigma_a^0 t). \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (3), получаем следующее уравнение для функции $\Psi'(u, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$:

$$\frac{l_s(u, \mathbf{r})}{v} \frac{\partial \Psi'(u, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\nabla [l_s(u, \mathbf{r}) \Psi'(u, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)] + \left[1 - \frac{g}{v}(\mathbf{r}\nabla l)\right] \times \Psi'(u, \mathbf{r}; \mathbf{\Omega}, t) = \int_0^u du' \int d\mathbf{\Omega}' f(\mu_0, u-u') \Psi'(u', \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', t) + \frac{1}{4\pi}\delta(u)\delta(t)\delta(\mathbf{r}), \tag{5}$$

где $g = \frac{v\Sigma_a(v, \mathbf{r})}{\Sigma_s(v, \mathbf{r})} = \mathrm{const}$ (см. (1), (2)).

Как и в работе [3], решение уравнения (5) будем искать в диффузионном приближении. Переходя к функциям $\widetilde{\chi}_0$, $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1$ (см. (12) в [3]) и повторяя процедуру, подробно изложенную в работе [3], получаем следующую систему уравнений для определения вида функций $\widetilde{\chi}_0$, $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1$:

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \left(\frac{ll_0}{3}\right) \frac{\nabla\widetilde{\chi}_0 + \widetilde{\chi}_0 \frac{\nabla\Psi}{\Psi}}{\frac{1}{2}\mathbf{M}\Phi + \frac{g}{v}(\mathbf{r}\nabla l)}; \tag{6}$$

$$\frac{l_0}{v}\frac{\partial\widetilde{\chi}_0}{\partial t} + \frac{l_0^2}{3}\operatorname{div}\left[l\frac{\nabla\widetilde{\chi}_0 + \widetilde{\chi}_0\frac{\nabla\Psi}{\Psi}}{\frac{1}{2}\mathbf{M}\Phi + \frac{g}{v}(\mathbf{r}\nabla l)}\right] + \frac{l_0^2}{3} l \frac{\nabla\widetilde{\chi}_0 + \widetilde{\chi}_0\frac{\nabla\Psi}{\Psi}}{\frac{1}{2}\mathbf{M}\Phi + \frac{g}{v}(\mathbf{r}\nabla l)} \frac{\nabla\Psi}{\Psi} - \frac{g}{v}\frac{(\mathbf{r}\nabla l)}{l}\widetilde{\chi}_0 = \frac{\Phi}{l}\frac{\partial\widetilde{\chi}_0}{\partial u}; \tag{7}$$

$$l(\mathbf{r}) = \frac{\Sigma_s(v)}{\Sigma_s(v, \mathbf{r})} = \frac{1}{\Sigma(\mathbf{r})} \simeq 1 + \mathbf{r}\nabla l;$$

$$l_0 = \frac{1}{\Sigma_s(v)} = \mathrm{const},$$

где $\mathbf{M}$ — массовое число ядер замедлителя, а выражения для функций Φ и Ψ можно найти в работе [3].

Решение системы (6) и (7) должно удовлетворять следующему начальному условию [3]:

$$\lim \widetilde{\chi}_0 = \delta(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad u \to 0, \quad \text{и} \quad t \to 0. \tag{8}$$

Поскольку поглощение нейтронов в среде происходит по закону $1/v$, то нейтроны с различными скоростями поглощаются одинаково. В таком случае, поглощение не влияет на форму энергетического спектра [2], а приводит к уменьшению полного числа нейтронов со временем. Поэтому в данном случае, как и при отсутствии поглощения [2—3], функция распределения нейтронов отлична от нуля в области скоростей, близких к средней $v_m(t, \mathbf{r})$. Учитывая это, найдем решение уравнения (7) в виде ряда

$$\widetilde{\chi}_0 = \sum_i \widetilde{\chi}'_i \xi^i; \quad \xi = \frac{v_m(t, \mathbf{r}) - v}{v}, \tag{9}$$

в котором можно ограничиться несколькими первыми членами.

Подставляя (9) в уравнение (7), разлагая входящие в него величины в ряд по степеням ξ (выражения для $\Phi(u, t, \mathbf{r})$; $v_m(t, \mathbf{r})$; $\frac{\nabla\Psi}{\Psi}$ приведены в [3]) и приравнивая члены при одинаковых степенях ξ, получаем систему уравнений для определения вида функций $\widetilde{\chi}'_0$, $\widetilde{\chi}'_1$, $\widetilde{\chi}'_2$ и т. д.

Приравнивая члены при нулевой степени ξ, получаем следующее уравнение:

$$\frac{l_0}{v_m}\frac{\partial\widetilde{\chi}'_0}{\partial t} = \frac{l_0^2}{3} l(\mathbf{r})\Delta\widetilde{\chi}'_0 - \frac{l_0^2}{3}\nabla l[\nabla\widetilde{\chi}'_0 - 2\nabla\widetilde{\chi}'_1] + \frac{ll_0^2}{3}\frac{g}{v_m}[\nabla\widetilde{\chi}'_0\nabla l + (\mathbf{r}\nabla l)\Delta\widetilde{\chi}'_0] + \frac{g}{v_m}(\mathbf{r}\nabla l)\widetilde{\chi}'_0. \tag{10}$$

Так как среда слабо неоднородная, то при получении уравнения (10) мы сохраняли лишь члены первого порядка [3] по (∇l). При получении следующих уравнений системы нужно удерживать лишь члены порядка $\left(\frac{\nabla l}{\eta}\right)$, $\left(\frac{\nabla l}{\eta}\right)^2$ [3]. Поскольку члены, содержащие сечение поглощения нейтронов (g), имеют порядок (∇l), то в остальные уравнения системы, кроме уравнения (10), они входить не будут. В таком случае уравнения, которые получим, приравнивая члены при первой степени ξ и выше, совпадут с аналогичными уравнениями (18, *б*, *в*) в работе [3].

Поскольку среда слабо неоднородная, т. е.

$$l(\mathbf{r}) = 1 + \mathbf{r}\nabla l, \tag{11}$$

то найдем решение уравнения (10) в виде ряда по степеням ∇l

$$\widetilde{\chi}'_0 = \chi_0^{(0)} + (\boldsymbol{\chi}_0^{(1)}\nabla l). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), получаем

$$\frac{\partial \chi_0^{(0)}}{\partial \tau} = \Delta \chi_0^{(0)}; \tag{13а}$$

$$\frac{\partial \chi_0^{(1)}}{\partial \tau} = \Delta \boldsymbol{\chi}_0^{(1)} - \nabla \chi_0^{(0)} + 2\nabla \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1' + 2\mathbf{r}\Delta \chi_0^{(0)} - -\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\nabla \chi_0^{(0)} + + \frac{g}{v^+} e^{a\tau}\left\{\nabla \chi_0^{(0)} + \mathbf{r}\Delta \chi_0^{(0)} + \frac{3}{l_0^2}\mathbf{r}\chi_0^{(0)}\right\}, \tag{13б}$$

где $\tau = \frac{2l_0^2}{3\eta}\ln\left[\frac{v^+}{v_m(t, \mathbf{r})}\right]$ — возраст нейтронов; $\eta = \frac{2}{\mathbf{M}+1}$; $a = \frac{3}{\mathbf{M}l_0^2}$. Для точечного источника решение уравнения (13а) имеет вид

$$\chi_0^{(0)} = \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}\right\}. \tag{14}$$

Решение оставшихся уравнений, как и в работе [3], найдем для среды, где $l(\mathbf{r}) = l(z) = 1 + z\nabla l\left(\text{здесь } \nabla l = \left.\frac{dl}{dz}\right|_{z=0}\right)$.

Используя формулу (14), а также выражение (29) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1^1$ из [3], найдем решение уравнения (13б), которое имеет вид

$$\chi_0^{(1)} = [zf(\tau) + z\mathbf{r}^2\varphi(\tau) + \alpha(\tau) + z^2\beta(\tau)]. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13б) и приравнивая члены при одинаковых степенях координат, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{3\varphi}{\tau} - \frac{3(1-e^{-a\tau})}{4a\tau^3} - \frac{1}{2\tau^2} - \frac{1}{4a\tau^3} - \\ \qquad - \frac{g}{v^+}\frac{e^{a\tau}}{4\tau^2} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} - 10\varphi + \frac{1}{\tau}f + \frac{15(1-e^{-a\tau}) - 2a\tau^2}{2a\tau^2} + \\ + \frac{7}{2\tau} + \frac{5}{2a\tau^2} - \frac{g}{v^+}e^{a\tau}\left(\frac{3}{l_0^2} - \frac{2}{\tau}\right) = 0; \\ \frac{d\alpha}{d\tau} - 2\beta - \frac{6\nabla l}{\eta a\tau}(1 - e^{-a\tau}) = 0; \\ \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{2\beta}{\tau} + \frac{3\nabla l}{\eta a\tau^2}(1 - e^{-a\tau}) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Решая эту систему с соответствующими начальными условиями [2, 3] и используя формулу (15), получаем

$$\chi_0^{(1)} = \frac{\exp\left\{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}\right\}}{(4\pi\tau)^{3/2}}\left\{-z\left[\frac{15}{2(a\tau)^2}\times\right.\right. \times(e^{-a\tau} + a\tau - 1)\Big]\left(1 - \frac{\mathbf{r}^2}{10\tau}\right) - \frac{\mathbf{r}^2}{4a\tau^2}(1 + a\tau) - -\frac{5g}{2v^+(a\tau)^2}(e^{a\tau} - 1)\left(1 - \frac{4}{5}a\tau\right) + \frac{5g}{2v^+(a\tau)} + + \frac{g}{v^+a\tau}\left(\frac{2}{\eta}\right)[e^{a\tau}(1 - a\tau) - 1]\left[\left(1 + \frac{\mathbf{r}^2}{4a\tau^2}\frac{\eta}{2}\right)\right] + + \frac{6(\nabla l)\tau}{\eta(a\tau)^2}\left(1 - \frac{z^2}{2\tau}\right)(e^{-a\tau} + a\tau - 1)\Big\}. \tag{17}$$

В результате окончательное выражение для функции $\chi_0(\mathbf{r}, u, t)$ [3] примет вид

$$\chi_0(\mathbf{r}, u, t) = \frac{\exp\left\{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}\right\}}{(4\pi\tau)^{3/2}}\{1 + \nabla l[-z + + C(\tau, \mathbf{r})] + \xi D(\tau, \mathbf{r}) + \xi^2 F(\tau, \mathbf{r})\}, \tag{18}$$

где $C(\tau, \mathbf{r}) = \chi_0^{(1)}(4\pi\tau)^{3/2}e^{\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}}$, а $D(\tau, \mathbf{r})$ и $F(\tau, \mathbf{r})$ совпадают с соответствующими значениями выражения (32) работы [3].

Из выражения (18) следует, что в неоднородном замедлителе максимум функции $\chi_0(\mathbf{r}, u, t)$ находится в точке

$$z_{\text{макс}} = -\frac{2\nabla l}{a}\left\{a\tau + \frac{15}{2a\tau}(e^{-a\tau} + a\tau - 1) - -\frac{9}{2}\left(\frac{4}{3} - e^{-a\tau}\right) - \frac{5g}{2v^+(a\tau)}(e^{a\tau} - 1)\left(1 - \frac{4}{5}a\tau\right) + + \frac{5g}{2v^+} + \frac{g}{v^+}\frac{2}{\eta}[e^{a\tau}(1 - a\tau) - 1]\right\}, \tag{19}$$

причем последний член в фигурной скобке — максимальный из всех членов, обусловленных поглощением.

При $g = 0$ выражение (19), очевидно, совпадает с аналогичным результатом работы [3]. При $a\tau \gg 1$, т. е. при $t \to \infty$ из выражения (19) получим

$$z_{\text{макс}} = -2\nabla l\tau\left\{1 + \frac{3}{2a\tau} - \frac{2}{\eta}\frac{\Sigma_a(v_m)}{\Sigma_s}\right\}. \tag{20}$$

Последнее слагаемое в (20) легко преобразовать к виду

$$\frac{2}{\eta}\frac{\Sigma_a(v_m)}{\Sigma_s} = \Sigma_a^0 t, \tag{21}$$

откуда следует, что оно совпадает с показателем экспоненты, характеризующей убыль полного числа нейтронов со временем (4). Из выражения (20) видно, что при $\frac{2}{\eta}\frac{\Sigma_a(v_m)}{\Sigma_s} > 1$, когда убыль нейтронов в системе за счет поглощения велика (так как при этом $1^{-\Sigma_a^0 t} \ll 1$), максимум плотности соударений нейтронов смещается в направлении уменьшения плотности замедлителя ($z_{\text{макс}} > 0$). Это объясняется тем, что в этой части пространства нейтронов поглотилось меньше. Сравнивая (20) с аналогичным результатом работы [3], легко установить, что наличие поглощения существенным образом сказывается на распределении нейтронов в пространстве.

Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют определить пространственно-временное распределение плотности поглощенных нейтронов. $q(\mathbf{r}, t)$ — число нейтронов, поглощаемых в единицу времени в единице объема вблизи точки $\mathbf{r}$ в момент времени t, оно равно

$$q(\mathbf{r}, t) = e^{-\Sigma_a^0 t} \int_0^\infty dv \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}, v)}{\Sigma_s(\mathbf{r})} \Psi(u, \mathbf{r}, t) \chi_0 \times \times (u, \mathbf{r}, t). \quad (22)$$

Используя выражение для $\Psi(u, \mathbf{r}, t)$ [3] и уравнение (18), получаем

$$q(\mathbf{r}, t) = \Sigma_a e^{-\Sigma_a^0 t} \frac{\exp\left\{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}\right\}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \times \left\{1 + \nabla l\left[-z + C(\tau, \mathbf{r})\right] + \frac{1}{3}\eta F(\tau, \mathbf{r})\right\}. \quad (23)$$

Если захват нейтронов происходит с последующим испусканием γ-квантов, то $g(t, \mathbf{r})$ является в то же время плотностью источников вторичного γ-излучения, информация о которой необходима для решения целого ряда задач [5].

Из выражения (23) легко получить, что максимум плотности числа поглощенных нейтронов находится в точке

$$z_{\text{макс}} = -\frac{2\nabla l}{a}\left\{a\tau + \frac{15}{2a\tau}\left[3e^{-a\tau} + a\tau - e^{-2a\tau} - 2\right] + \frac{1}{4}\left[1 - 3e^{-a\tau} - 4e^{-2a\tau}\right] - \frac{5g}{2v^+ a\tau}\left(e^{a\tau} - 1\right)\left(1 - \frac{4}{5}a\tau\right) + \frac{5g}{v^+} + \frac{g}{v^+}\frac{2}{\eta}\left[e^{a\tau}(1 - a\tau) - 1\right]\right\}.$$

При $a\tau \gg 1$, т. е. при $t \to \infty$, выражение (24) можно представить в виде

$$z_{\text{макс}} = -2\nabla l\tau\left\{1 + \frac{7{,}75}{a\tau} - \frac{2}{\eta}\frac{\Sigma_a(v_m)}{\Sigma_s}\right\}. \quad (25)$$

При вычитании величины (24) из (19) получим расстояние между максимумами плотности столкновений и плотности числа поглощенных нейтронов

$$\Delta z = \frac{2\nabla l}{a}\left\{6{,}25 - 5{,}25e^{-a\tau} - 4e^{-2a\tau} - \frac{15}{2a\tau} \times \times \left(2 - 2e^{-a\tau} + e^{-2a\tau}\right)\right\}, \quad (26)$$

которое при $a\tau \gg 1$ имеет вид

$$\Delta z = 4{,}17 \cdot M l_0^2 \nabla l\left\{1 - \frac{1{,}2}{a\tau}\right\}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что максимум плотности поглощенных нейтронов смещен относительно максимума плотности столкновений нейтронов в сторону возрастания плотности замедлителя на постоянную величину (при больших временах), определяемую выражением (27).

Поступила в Редакцию 31/III 1975 г.
В окончательной редакции 30/VI 1975 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теоретические** и экспериментальные проблемы нестационарного переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1972.
2. **Казарновский М. В.** Труды ФИАН, 1959, т. XI, с. 176.
3. **Метелкин Е. В., Труханов Г. Я.** «Атомная энергия», 1974, т. 37, вып. 6, с. 466.
4. **Вейнберг А., Вигнер Е.** Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
5. **Жемерев А. В. и др.** «Атомная энергия», 1975, т. 38, вып. 3, с. 174.

ПОПРАВКИ

В статье С. М. Вакуловского и др. «Содержание ^{90}Sr, ^{137}Cs и трития в Балтийском море в 1972 г.» (1975, т. 39, вып. 3, с. 183) на стр. 183 (левая колонка, второй абзац, пятая строка) следует читать: 0,05—1,8 пКи/л; на этой же странице (правая колонка, вторая строка снизу) следует читать: $0{,}13 \cdot 10^{-12}$ Ки/л.