Математические заметки

Том 84 выпуск 3 сентябрь 2008

УДК 517.51+517.53

Об асимптотике строк таблицы Паде аналитических функций с логарифмическими точками ветвления

А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова

Для функций $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{l_n}/a_n$, где l_n и a_n – арифметические прогрессии, и их аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z;f)$ установлена асимптотика убывания разности $f(z)-\pi_{n,m}(z;f)$ в случае, когда $z\in D=\{z:|z|<1\}$, m фиксировано, а $n\to\infty$. В частности, найдены точные порядки убывания наилучших равномерных рациональных приближений функций $\ln(1-z)$, $\operatorname{arctg} z$ в круге $D_q=\{z:|z|\leqslant q<1\}$.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Пусть $\mathscr{A}(b)=\mathscr{A}(b,a_0)$ – множество аналитических в $D=\{z:|z|<1\}$ функций f, представимых в виде

$$f(z)=\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a_n}, \tag{1}$$

где $a_n=bn+a_0$ – арифметическая прогрессия и $a_n\neq 0$. Для простоты в дальнейшем ограничимся случаем, когда b и a_0 – действительные числа, причем $b>0$, $a_0>0$. По определению полагаем

$$\mathscr{A}^-(b)=\{f(-z):f\in\mathscr{A}(b)\}.$$

Если $l_n=dn+l_0$, где $d\in\mathbb{N}$, $l_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ – фиксированные числа, то будем говорить, что функция $g\in\mathscr{A}(b;d)=\mathscr{A}(b,a_0;d,l_0)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $g(z)=z^{l_0}f(z^d)$, где $f\in\mathscr{A}(b)$. Аналогично по определению полагаем

$$\mathscr{A}^-(b;d)=\{g(z):g(z)=z^{l_0}f(-z^d),\ f\in\mathscr{A}(b)\}.$$

Так, например, функция

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

принадлежит $\mathscr{A}(1,0)$, а

$$\operatorname{arctg} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}$$

является функцией из класса $\mathscr{A}^-(2,1;2,1)$. Заметим, что на границе круга сходимости $\ln(1-z)$ и $\operatorname{arctg} z$ имеют соответственно особые точки 1, $\pm i$, которые являются логарифмическими точками ветвления этих функций.

Аппроксимацией Паде $\pi_{n,m}(z;f) = p_n(z;f)/q_m(z;f)$ степенного ряда (1) назовем аналитическую в нуле рациональную функцию (р.ф.) вида

$$r_{n,m}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + a_m z^m}, \tag{2}$$

имеющую максимально возможный порядок касания к ряду (1), т.е. такую, для которой в некоторой окрестности нуля

$$f(z) - \pi_{n,m}(z;f) = \sum_{n+m+1}^{\infty} f_k z^k.$$

В частности, $\pi_{n,0}(z;f)$ есть n-я частная сумма ряда (1). Для мероморфных функций f качественные вопросы сходимости $\pi_{n,m}(z;f)$ к $f(z)$ при $n \to \infty$ и фиксированном m детально проработаны (см., например, обзор [1]). К настоящему времени имеется уже достаточно много примеров целых функций f, для которых исследована сходимость аппроксимаций Паде и, в частности, найдена асимптотика убывания $f(z) - \pi_{n,m}(z;f)$ для $z \in D$ при фиксированном m и $n \to \infty$ (см. [2]–[15]).

В данной работе аналогичные исследования предприняты для функций, имеющих логарифмические точки ветвления. В частности, установлена асимптотика поведения строк таблицы Паде для функций из классов $\mathscr{A}(b)$, $\mathscr{A}^-(b)$ (см. теоремы 3 и 4) и найдены точные порядки наилучших равномерных рациональных приближений таких функций в круге $D_q = \{z : |z| \leqslant q < 1\}$ (см. п. 4).

2. Основные теоремы. Для $f \in \mathscr{A}(b)$ введем в рассмотрение *определители Адамара*[1]:

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_{n-m+1}} & \dfrac{1}{a_{n-m+2}} & \dots & \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{1}{a_{n-m+2}} & \dfrac{1}{a_{n-m+3}} & \dots & \dfrac{1}{a_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n} & \dfrac{1}{a_{n+1}} & \dots & \dfrac{1}{a_{n+m-1}} \end{vmatrix}.$$

Многочлены Паде $p_n(z;f)$ и $q_m(z;f)$ находятся с точностью до постоянного множителя. Будем называть *стандартной* такую их нормировку, при которой $q_m(0;f) = D_{n,m}$. Рассмотрим также определители

$$D_{n,\,m,\,k} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_{n-m+1}} & \dfrac{1}{a_{n-m+2}} & \dots & \dfrac{1}{a_n} & \dfrac{1}{a_{n+1}} \\ \dfrac{1}{a_{n-m+2}} & \dfrac{1}{a_{n-m+3}} & \dots & \dfrac{1}{a_{n+1}} & \dfrac{1}{a_{n+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n} & \dfrac{1}{a_{n+1}} & \dots & \dfrac{1}{a_{n+m-1}} & \dfrac{1}{a_{n+m}} \\ \dfrac{1}{a_{n+k}} & \dfrac{1}{a_{n+k+1}} & \dots & \dfrac{1}{a_{n+m+k-1}} & \dfrac{1}{a_{n+m+k}} \end{vmatrix}.$$

[1] Оператор Паде является однородным, т.е. $\pi_{n,m}(\,\cdot\,;\lambda f) = \lambda\pi_{n,m}(\,\cdot\,;f)$. Поэтому без ограничения общности в дальнейшем рассматриваем случай, когда перед суммой в (1) стоит знак “+”.

Лемма 1. *Пусть* $D(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(x_i - x_j)$ *– определитель Вандермонда,* $m \geqslant 2$. *Тогда*

$$\det\left|\frac{1}{1-x_iy_j}\right|_{i,j=1}^{m} = D(x_1, x_2, \dots, x_m)D(y_1, y_2, \dots, y_m)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-x_iy_j}.$$

Данное утверждение известно как лемма Коши [16; лемма VII.6.A].

Лемма 2. *При* $m \geqslant 2$

$$\det\left|\frac{1}{x_i+y_j}\right|_{i,j=1}^{m} = D(x_1, x_2, \dots, x_m)D(y_1, y_2, \dots, y_m)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{x_i+y_j}.$$

Доказательство. Заменив в равенстве Коши $x_1, x_2, \dots, x_m$ на $-x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_m^{-1}$, после несложных преобразований получим нужное равенство. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если* $f \in \mathscr{A}(b)$, *то для* $m \geqslant 2$

$$D_{n,m} = b^{m(m-1)}\prod_{j=1}^{m-1}(j!)^2\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{x_i+y_j}, \tag{3}$$

при $m \geqslant 1$

$$D_{n,m,k} = b^{m(m+1)}\prod_{j=1}^{m}j!\prod_{j=1}^{m-1}j!\prod_{j=1}^{m}(m+k-j)\prod_{i=1}^{m+1}\prod_{j=1}^{m+1}\frac{1}{x_i+y_j}, \tag{4}$$

где $x_i = b(n-m+i) + a_0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $x_{m+1} = b(n+k) + a_0$, $y_j = b(j-1)$, $j = 1, 2, \dots, m+1$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned}
D_{n,m} &= D(x_1, x_2, \dots, x_m)D(y_1, y_2, \dots, y_m)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{x_i+y_j}\\
&= (-1)^{m(m-1)}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(x_j - x_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(y_j - y_i)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{x_i+y_j}\\
&= b^{m(m-1)}\prod_{j=1}^{m-1}(j!)^2\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{x_i+y_j}.
\end{aligned}$$

Равенство (3) доказано. Аналогично, с учетом леммы 2, получим

$$\begin{aligned}
D_{n,m,k} &= D(x_{m+1}, x_m, \dots, x_1)D(y_{m+1}, y_m, \dots, y_1)\prod_{i=1}^{m+1}\prod_{j=1}^{m+1}\frac{1}{x_i+y_j}\\
&= b^{m(m+1)}\prod_{j=1}^{m}j!\prod_{j=1}^{m-1}j!\prod_{j=1}^{m}(m+k-j)\prod_{i=1}^{m+1}\prod_{j=1}^{m+1}\frac{1}{x_i+y_j}.
\end{aligned}$$

Равенство (4) доказано.

Замечание 1. По определению полагаем $D_{n,0} = 1$, $D_{n,1} = 1/a_n$, $D_{n,0,k} = 1/a_{n+k}$. Очевидно, что $D_{n+1,m+1} = D_{n,m,1}$. Поэтому из (3) следует, что

$$\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} = b^{2m}(m!)^2 \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i + y_{m+1}} \prod_{j=1}^{m+1} \frac{1}{x_{m+1} + y_j} = b^{2m}(m!)^2 \frac{1}{a_{n+m+1}} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{a_{n+i}^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим аналитическую в D функцию [17; гл. 5, § 2.3, (1)]

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+n+1)^{m+1}} = \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} \frac{t^m e^{-(n+1)t}\,dt}{1 - ze^{-t}}.$$

Нетрудно показать, что если $z \in D$

$$\varphi^{(m)}(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^m e^{-(n+m+1)t}\,dt}{(1 - ze^{-t})^{m+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\cdots(k+m-1) \frac{z^{k-1}}{(k+n+m)^{m+1}}.$$

При $z \in D$ полагаем по определению

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(z) &:= \frac{(n+m+1)^{m+1}}{m!} \varphi^{(m)}(z) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k+m-1)}{m!} \left(\frac{n+m+1}{n+m+k}\right)^{m+1} z^{k-1} \\ &= \frac{(n+m+1)^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \frac{t^m e^{-(n+m+1)t}\,dt}{(1 - ze^{-t})^{m+1}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как

$$\int_0^{\infty} t^m e^{-(n+m+1)t}\,dt = \frac{m!}{(n+m+1)^{m+1}},$$

из (6) получаем, что для $z \in D$

$$\frac{1}{(1+|z|)^{m+1}} \leqslant |\psi_{n,m}(z)| \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^{m+1}}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если $f \in \mathscr{A}(b)$, то для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$q_m(z; f) f(z) - p_n(z, f) = D_{n,m,1} \psi_{n,m}(z) z^{n+m+1} (1 + o(1)). \tag{8}$$

Доказательство. Согласно теореме Паде [18; гл. 1, § 1.1, (1.11)] при выбранной нормировке многочленов Паде

$$q_m(z; f) f(z) - p_n(z, f) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k} = D_{n,m,1} z^{n+m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}.$$

Из равенств (4) следует, что

$$\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} = \frac{\prod_{j=1}^{m}(m+k-j)}{m!} \prod_{j=1}^{m+1} \frac{b(n+j) + a_0}{b(n+k+j-1) + a_0}.$$

Тогда, полагая $\tau_0 = a_0/b$ и принимая во внимание (4), получим, что

$$\psi_{n,m}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k+m-1)}{m!} \alpha_{n,m,k} z^{k-1}, \qquad (9)$$

где

$$\alpha_{n,m,k} = \left(\frac{n+m+1}{n+m+k}\right)^{m+1} - \prod_{j=1}^{m+1} \frac{n+j+\tau_0}{n+j+k-1+\tau_0}.$$

В случае, если $\alpha_{n,m,k} \geqslant 0$, будем иметь

$$0 \leqslant \alpha_{n,m,k} \leqslant \left(\frac{n+m+1}{n+m+k}\right)^{m+1} - \left(\frac{n+1+\tau_0}{n+k+\tau_0}\right)^{m+1} \leqslant \frac{m(m+1)(k-1)}{(n+m+k)(n+k)}.$$

Если же $\alpha_{n,m,k} < 0$, то

$$0 \leqslant |\alpha_{n,m,k}| \leqslant \left(\frac{n+m+1+\tau_0}{n+m+k+\tau_0}\right)^{m+1} - \left(\frac{n+m+1}{n+m+k}\right)^{m+1} \leqslant \frac{(m+1)\tau_0(k-1)}{(n+m+k)(n+k)}.$$

Следовательно,

$$|\alpha_{n,m,k}| \leqslant \frac{(m+1)(m+\tau_0)}{n} \leqslant c\frac{m^2}{n},$$

где c – положительная постоянная. Отсюда, из (7), (9) и легко доказываемого неравенства

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+m-1)}{m!} \leqslant k^m$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1} = \psi_{n,m}(z)(1+\beta_{n,m,k}(z)),$$

где

$$|\beta_{n,m,k}(z)| \leqslant c\frac{2^{m+1}m^2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k^m |z|^{k-1}.$$

Из равенства (см. [17; гл. 5, § 2.2, (3)])

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |z|^{k-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k |z|^{k-1}}{(1-|z|)^{k+1}} \left[\sum_{j=1}^{k} (-1)^j C_j^k j^m\right],$$

где C_j^k – биномиальные коэффициенты, следует, что при $z \in D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |z|^{k-1} \leqslant \frac{2^m m^{m+1}}{(1-|z|)^{m+1}}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$|\beta_{n,m,k}(z)| \leqslant c\frac{2^{2m+1}m^{m+3}}{n(1-|z|)^{m+1}}. \qquad (10)$$

Из (10) при фиксированном m и $n \to \infty$ получаем, что $\beta_{n,m,k}(z) = o(1)$ для каждого фиксированного $z \in D$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 1 следует, что (8) справедливо при $n \to \infty$ и в том случае, когда $m \to \infty$ достаточно медленно, в частности, если $m = O(\ln(\ln n))$.[2]

Следствие 1. *Если $f \in \mathscr{A}^-(b)$, то для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$q_m(z; f)f(z) - p_n(z, f) = D_{n,m,1}\psi_{n,m}(-z)(-z)^{n+m+1}(1 + o(1)).$$

Теорема 2. *Если $f \in \mathscr{A}(b)$, то для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$q_m(z; f) = D_{n,m}(1 - z)^m(1 + o(1)).$$

Доказательство. Представим многочлен $q_m(z; f)$ в виде

$$q_m(z; f) = \sum_{j=0}^{m} q_j z^j.$$

Тогда согласно равенству (1.8) из [18] получим (столбец выделенный полужирным шрифтом следует опустить)

$$(-1)^j q_j = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_{n-m+1}} & \cdots & \frac{1}{a_{n-j}} & \boldsymbol{\frac{1}{a_{n-j+1}}} & \frac{1}{a_{n-j+2}} & \cdots & \frac{1}{a_{n+1}} \\ \frac{1}{a_{n-m+2}} & \cdots & \frac{1}{a_{n-j+1}} & \boldsymbol{\frac{1}{a_{n-j+2}}} & \frac{1}{a_{n-j+3}} & \cdots & \frac{1}{a_{n+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}} & \cdots & \frac{1}{a_{n-j+m-2}} & \boldsymbol{\frac{1}{a_{n-j+m-1}}} & \frac{1}{a_{n-j+m}} & \cdots & \frac{1}{a_{n+m-1}} \\ \frac{1}{a_n} & \cdots & \frac{1}{a_{n-j+m-1}} & \boldsymbol{\frac{1}{a_{n-j+m}}} & \frac{1}{a_{n-j+m+1}} & \cdots & \frac{1}{a_{n+m}} \end{vmatrix}.$$

Полагая, как и раньше, $x_i = b(n - m + i) + a_0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а

$$y_k^* = \begin{cases} b(k-1), & k = 1, 2, \ldots, m - j, \\ bk, & k = m - j + 1, \ldots, m, \end{cases}$$

и, применяя к последнему определителю лемму 2, с учетом равенства (3) будем иметь

$$\begin{aligned}(-1)^j q_j &= b^{m(m-1)/2} \prod_{p=1}^{m-1} p! \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (y_j^* - y_i) \prod_{i=1}^{m}\prod_{p=1}^{m} \frac{1}{x_i + y_p^*} \\ &= \frac{b^{m(m-1)}}{(m-j)!\,j!} \prod_{p=1}^{m-1} p! \prod_{p=1}^{m} p! \prod_{i=1}^{m}\prod_{p=1}^{m} \frac{1}{x_i + y_p^*}\end{aligned}$$

[2]Можно показать, что все доказанные далее теоремы верны при указанных в замечании ограничениях на рост m. При $m \to \infty$ формулировку теоремы 1, как и формулировки последующих теорем, нужно подправить, рассматривая в них вместо фиксированного m, например, произвольную последовательность $m = m(n) = O(\ln(\ln n))$.

$$
\begin{aligned}
&= b^{m(m-1)} C_j^m \prod_{p=1}^{m-1} (p!)^2 \prod_{i=1}^{m} \prod_{p=1}^{m} \frac{1}{x_i + y_p} \prod_{i=1}^{m} \prod_{p=m-j+1}^{m} \frac{x_i + y_p}{x_i + y_p^*} \\
&= D_{n,m} C_j^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{p=m-j+1}^{m} \frac{x_i + y_p}{x_i + y_p^*},
\end{aligned}
$$

где $C_j^m = m!/((m-j)!\,j!)$ – биномиальные коэффициенты. Тогда для любого $z \in D$

$$
D_{n,m}(1-z)^m - q_m(z;f) = D_{n,m} \sum_{j=0}^{m} C_j^m (-z)^j \biggl\{1 - \prod_{i=1}^{m} \prod_{p=m-j+1}^{m} \frac{x_i + y_p}{x_i + y_p^*}\biggr\}.
$$

Поскольку

$$
\begin{aligned}
1 - \prod_{i=1}^{m} \prod_{p=m-j+1}^{m} \frac{x_i + y_p}{x_i + y_p^*} &\leqslant 1 - \prod_{i=1}^{m} \biggl(\frac{x_i + y_{m-j+1}}{x_i + y_{m-j+1}^*}\biggr)^j \leqslant 1 - \biggl(\frac{x_1 + b(m-j)}{x_1 + b(m-j+1)}\biggr)^{mj} \\
&\leqslant 1 - \biggl(\frac{x_1}{x_1 + b}\biggr)^{m^2} \leqslant m^2 \biggl(1 - \frac{x_1}{x_1 + b}\biggr) \leqslant \frac{m^2}{n-m+1},
\end{aligned}
$$

окончательно будем иметь

$$
|D_{n,m}(1-z)^m - q_m(z;f)| = D_{n,m} \frac{m^2}{n-m+1} \sum_{j=0}^{m} C_j^m q^j \leqslant \frac{m^2(1+q)^m}{n-m+1} D_{n,m}.
$$

Отсюда для любого $z \in D$

$$
q_m(z;f) = D_{n,m}(1-z)^m (1 + \beta_{n,m}(z)),
$$

где

$$
|\beta_{n,m}(z)| \leqslant \frac{m^2(1+q)^m}{(n-m+1)(1-|z|)^m}.
$$

Из последних двух соотношений и следует утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Из теоремы 2 следует, что при фиксированном m и $n \to \infty$ все полюсы дроби Паде $\pi_{n,m}(z;f)$ притягиваются особой точкой $z_0 = 1$ функции f, которая является ее логарифмической точкой ветвления.

Следствие 2. *Если $f \in \mathscr{A}^-(b)$, то для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$
q_m(z;f) = D_{n,m}(1+z)^m (1 + o(1)).
$$

Теорема 3. *Если $f \in \mathscr{A}(b)$, то для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$
\begin{aligned}
f(z) - \pi_{n,m}(z;f) &= \frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} \frac{\psi_{n,m}(z)}{(1-z)^m} z^{n+m+1} (1 + o(1)) \\
&= \frac{(m!)^2}{bn^{2m+1}} \frac{\psi_{n,m}(z)}{(1-z)^m} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теорем 1, 2 и равенства (5).

Теорема 4. *Если $f \in \mathscr{A}^-(b)$, то для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$f(z) - \pi_{n,m}(z; f) = \frac{(m!)^2}{bn^{2m+1}} \frac{\psi_{n,m}(-z)}{(1+z)^m} (-z)^{n+m+1}(1+o(1)). \tag{12}$$

3. Некоторые обобщения. Пусть $g \in \mathscr{A}(b; d)$, т.е.

$$g(z) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{l_n}}{a_n} = z^{l_0} f(z^d),$$

где $f \in \mathscr{A}(b)$. Обозначим через $\pi_{n,m}(\xi; f)$ соответствующую аппроксимацию Паде функции $f(\xi)$. Она существует, так как из равенства (3) следует, что $D_{n,m} \neq 0$. Следовательно,

$$f(\xi) - \pi_{n,m}(\xi; f) = f_{n+m+1} \xi^{n+m+1} + \cdots .$$

Полагая в последнем равенстве $\xi = z^d$, а затем умножая его на z^{l_0}, получим

$$z^{l_0} f(z^d) - z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f) = f_{n+m+1} z^{d(n+m+1)+l_0} + \cdots .$$

Из последнего равенства следует, что

$$\pi_{l_n+i, dm+j}(z; g) = z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f), \tag{13}$$

где $0 \leqslant i + j \leqslant d - 1$.[3]

Используя равенство (13), легко получить аналоги теорем (3) и (4) для классов $\mathscr{A}^{\pm}(b; d)$.

Теорема 5. *Пусть $g \in \mathscr{A}(b; d)$. Тогда для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$\begin{aligned} g(z) - \pi_{l_n+i, dm+j}(z; g) &= \frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} \frac{\psi_{n,m}(z^d)}{(1-z^d)^m} z^{l_n+dm+d}(1+o(1)) \\ &= \frac{(m!)^2}{bn^{2m+1}} \frac{\psi_{n,m}(z^d)}{(1-z^d)^m} z^{l_n+dm+d}(1+o(1)), \end{aligned}$$

где $0 \leqslant i + j \leqslant d - 1$.

Теорема 6. *Пусть $g \in \mathscr{A}^-(b; d)$. Тогда для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$g(z) - \pi_{l_n+i, dm+j}(z; g) = \frac{(-1)^{n+m+1}(m!)^2}{bn^{2m+1}} \frac{\psi_{n,m}(-z^d)}{(1+z^d)^m} z^{l_n+dm+d}(1+o(1)),$$

где $0 \leqslant i + j \leqslant d - 1$.

[3] С помощью теоремы Паде–Бейкера о блочной структуре таблицы Паде [18; гл. 1, § 1.4, теорема 1.4.3] можно показать, что в оставшемся нерассмотренным случае, когда $i + j = d$ и $i, j \neq d$, аппроксимации Паде $\pi_{l_n+i, dm+j}(z; g)$ в смысле принятого нами определения по Бейкеру [18; гл. 1, § 1.4, (4.6)] не существуют. Классические аппроксимации Паде $\widetilde{\pi}_{l_n+i, dm+j}(z; g)$ существуют и в этом случае совпадают с $\pi_{l_n, dm}(z; g)$.

Следствие 3. *Если $f \in \mathscr{A}^{\pm}(b)$, то локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$*

$$f(z) - \pi_{n,0}(z; f) = \frac{\psi_{n,0}(\pm z)}{bn}(\pm z)^{n+1}(1 + o(1)),$$

где

$$\psi_{n,0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{k+n+1} z^k = (n+1)\int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{1 - ze^{-t}}\,dt.$$

Аналоги следствия 3 справедливы и для функций из классов $\mathscr{A}(b; d)$, $\mathscr{A}^{-}(b; d)$. Из теорем 3 и 6, в частности, получим, что для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по $z \in D$ при $n \to \infty$

$$\ln(1 - z) - \pi_{n,m}(z; \ln(1 - \xi)) = -\frac{(m!)^2}{n^{2m+1}} \frac{\psi_{n,m}(z)}{(1 - z)^m} z^{n+m+1}(1 + o(1)),$$

$$\operatorname{arctg} z - \pi_{2n+1+i,2m+j}(z; \operatorname{arctg}\xi) = (-1)^{n+m+1}\frac{(m!)^2}{2n^{2m+1}} \frac{\psi_{n,m}(-z^2)}{(1 + z^2)^m} z^{2n+2m+3}(1 + o(1)),$$

где $0 \leqslant i + j \leqslant 1$.

4. Наилучшие приближения функций из $\mathscr{A}^{\pm}(b; d)$. Определим наилучшие равномерные рациональные приближения функции f, аналитической в круге $D_q = \{z : |z| \leqslant q < 1\}$:

$$R_{n,m}(f) = R_{n,m}(f; D_q) = \inf\{\|f - r\|_q : r \in \mathscr{R}_{n,m}\},$$

где $\|g\|_q = \sup\{|g(z)| : z \in D_q\}$, а $\mathscr{R}_{n,m}$ – множество всех рациональных функций, представимых в виде (2). Полученные в предыдущих разделах результаты позволяют получить точные порядковые оценки для $R_{n,m}(f; D_q)$ при $n \to \infty$ в случае, когда функция f принадлежит одному из рассматриваемых классов.

Следствие 4. *Если функция $f \in \mathscr{A}^{\pm}(b)$, то при любом фиксированном $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \to \infty$*

$$\frac{(m!)^2}{n^{2m+1}} \frac{q^{n+m+1}}{(1 + q)^{2m+1}}(1 - o_1(1)) \leqslant R_{n,m}(f; D_q) \leqslant \frac{(m!)^2}{n^{2m+1}} \frac{q^{n+m+1}}{(1 - q)^{2m+1}}(1 + o_2(1)), \quad (14)$$

т.е.

$$R_{n,m}(f; D_q) \asymp \frac{q^n}{n^{2m+1}} \asymp \frac{1}{n^{2m}} R_{n,0}(f; D_q).$$

Здесь и далее бесконечно малые (б.м.) при $n \to \infty$ величины $o_i(1) \geqslant 0$, $i = 1, 2$, а соотношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что б.м. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ имеют одинаковый порядок, т.е. существуют такие положительные постоянные A и B, что $A\alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant B\alpha_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(z) := f(z) - \pi_{n,m}(z; f)$. Из теорем 3, 4 следует, что при достаточно больших n φ является аналитической внутри круга D_{q_1}, $0 < q < q_1 < 1$ и имеет в D_q нуль кратности $n + m + 1$. Покажем, что

$$\min_{|z|=q} |\varphi(z)| \leqslant R_{n,m}(f; D_q) \leqslant \max_{|z|=q} |\varphi(z)|. \quad (15)$$

Поскольку правое неравенство в (15) вполне очевидно, остановимся на доказательстве только левого неравенства. Для этого нам необходима следующая лемма Гончара–Дзядыка [19; лемма 3.1].

Лемма 4. *Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на $\overline{G}$ функция φ имеет в G с учетом кратности по крайней мере $n+1$ нуль, то при произвольном $m \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$R_{n,m}(\varphi;\overline{G}) \geqslant \min_{z\in\partial G}|\varphi(z)|.$$

Пусть $r^*_{n,m} \in \mathscr{R}_{n,m}$ и является рациональной функцией наилучшего равномерного приближения f в круге D_q. Тогда, применяя к функции φ лемму 4, получим

$$\begin{aligned} R_{n,m}(f;D_q) &= \|f - r^*_{n,m}\| = \|f - \pi_{n,m} - (r^*_{n,m} - \pi_{n,m})\| \\ &= \|\varphi - \widetilde{r}_{n+m,2m}\| \geqslant R_{n+m,2m}(\varphi;D_q) \geqslant \min_{|z|=q}|\varphi(z)|. \end{aligned}$$

Неравенство (15) доказано. Из (15), а также из равенств (11), (12) и неравенства (7) следует (14). Следствие 4 доказано.

Аналогично доказывается

Следствие 5. *Если $g \in \mathscr{A}^{\pm}(b;d)$, то при любом фиксированном $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $n\to\infty$*

$$\frac{(m!)^2}{bn^{2m+1}}\frac{q^{l_n+dm+d}}{(1+q^d)^{2m+1}}(1-o_1(1)) \leqslant R_{l_n+i,dm+j}(g;D_q) \leqslant \frac{(m!)^2}{bn^{2m+1}}\frac{q^{l_n+dm+d}}{(1-q^d)^{2m+1}}(1+o_2(1)),$$

т.е.

$$R_{l_n+i,dm+j}(g;D_q) \asymp \frac{q^{dn}}{n^{2m+1}} \asymp \frac{1}{n^{2m}}R_{l_n+i,0}(g;D_q),$$

где $0 \leqslant i+j \leqslant d-1$.

В частности, из следствий 4, 5 получим, что при фиксированном $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $n\to\infty$

$$R_{n,m}(\ln(1-z);D_q) \asymp \frac{q^n}{n^{2m+1}} \asymp \frac{1}{n^{2m}}R_{n,0}(\ln(1-z);D_q),$$

$$R_{2n+1+i,2m+j}(\operatorname{arctg} z;D_q) \asymp \frac{q^{2n}}{n^{2m+1}} \asymp \frac{1}{n^{2m}}R_{2n+1+i,0}(\operatorname{arctg} z;D_q),$$

где $0 \leqslant i+j \leqslant 1$.

Основные результаты работы частично анонсированы в [20].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142.

[2] E. B. Saff, “The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function. II”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32**:1 (1972), 187–194.

[3] E. B. Saff, “On the degree of best rational approximation to the exponential function”, *J. Approximation Theory*, **9**:2 (1973), 97–101.

[4] D. Braess, “On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x”, *J. Approximation Theory*, **40**:4 (1984), 375–379.

[5] D. S. Lubinsky, “Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth”, *Constr. Approx.*, **1**:4 (1985), 349–358.

[6] D. S. Lubinsky, "Uniform convergence of rows of the Padé table for functions with smooth Maclaurin series coefficients", *Constr. Approx.*, **3**:3 (1987), 307–330.

[7] D. S. Lubinsky, "Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth. II", *Constr. Approx.*, **4**:3 (1988), 321–339.

[8] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, "Best rational approximation of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **293**:2 (1986), 533–545.

[9] A. L. Levin, D. S. Lubinsky, "Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients", *Constr. Approx.*, **6**:3 (1990), 257–286.

[10] Л. Л. Березкина, В. Н. Русак, "О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций", *Весці АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук*, 1990, № 4, 27–32.

[11] В. Н. Русак, Та Хонг Куанг, "Асимптотика параболических звеньев рациональной таблицы Чебышева для аналитических функций", *Докл. АН БССР*, **34**:10 (1990), 869–871.

[12] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, "Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышева для суммы экспонент", *Матем. сб.*, **187**:2 (1996), 141–157.

[13] В. Н. Русак, А. П. Старовойтов, "Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора", *Матем. сб.*, **193**:9 (2002), 63–92.

[14] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, "Аппроксимации Паде одного класса целых функций", *Докл. НАН Беларуси*, **50**:6 (2006), 28–30.

[15] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, "Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера", *Матем. сб.*, **198**:7 (2007), 109–122.

[16] Г. Вейль, *Классические группы: их инварианты и представления*, ИЛ, М., 1947.

[17] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Элементарные функции, Наука, М., 1981.

[18] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, 1. Основы теории; 2. Обобщения и приложения, Мир, М., 1986.

[19] В. К. Дзядык, "Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$", *Матем. сб.*, **108**:2 (1979), 247–267.

[20] А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, "О приближении рациональными операторами Паде", *Еругинские чтения XI: Тез. докл. междунар. конф.* (24–26 мая 2006 г., Гомель, Беларусь), Ин-т матем. НАН Беларуси, Гомель, 2006, 127–128.

А. П. Старовойтов
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: svoitov@gsu.unibel.by

Поступило
11.05.2007

Н. А. Старовойтова
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: svoitov@gsu.unibel.by