Математические заметки

том 74 выпуск 5 ноябрь 2003

УДК 517.51+517.53

# СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ УБЫВАНИЯ НАИМЕНЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

**А. П. Старовойтов**

Для заданной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ действительных чисел, которая строго убывает и сходится к нулю, построена непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция $g$ такая, что $R_{2n}(g)$ и $a_n$ имеют одинаковый порядок убывания при $n\to\infty$. Здесь $R_n(g)$ – наилучшие приближения на отрезке $[-1,1]$ в равномерной норме функции $g$ алгебраическими рациональными функциями степени не выше $n$.

Библиография: 14 названий.

Пусть $C[-1,1]$ – банахово пространство вещественнозначных и непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций с равномерной нормой. Через $\mathscr{P}_n$ и $\mathscr{R}_n$ обозначим соответственно множества всех алгебраических полиномов и рациональных функций степени не выше $n$ с действительными коэффициентами. Для функции $f\in C[-1,1]$ рассмотрим при $n=0,1,2,\dots$

$$E_n(f)=\inf\{\|f-p\|\colon p\in\mathscr{P}_n\},\qquad R_n(f)=\inf\{\|f-r\|\colon r\in\mathscr{R}_n\}$$

– ее наименьшие уклонения от многочленов и рациональных дробей степени не выше $n$ в метрике пространства $C[-1,1]$. Ниже соотношение $\alpha_n\asymp\beta_n$ означает, что бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок при $n\to\infty$, т.е. существуют такие положительные постоянные $A$ и $B$, для которых $A\alpha_n\leqslant\beta_n\leqslant B\alpha_n$ при $n=0,1,2,\dots$. Запись $\alpha_n\downarrow 0$ означает, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает и сходится к нулю. Например, для любой непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции $f$ последовательности ее наименьших уклонений ведут себя именно таким образом, т.е. $E_n(f)\downarrow 0$, $R_n(f)\downarrow 0$.

Известна (см. [1]) следующая (ослабленный вариант обратной задачи С.Н. Бернштейна [2] для рациональных приближений)

Проблема Долженко. *Какой должна быть числовая последовательность $a_n\downarrow 0$, чтобы существовала функция $f\in C[-1,1]$, для которой*

$$R_n(f)\asymp a_n?$$

При этом будем говорить об эффективном решении проблемы в том случае, когда по заданной последовательности искомая функция построена конструктивно.

 

Для полиномиальных приближений в силу теоремы Бернштейна (см. [2], [3]) любая последовательность $a_n \downarrow 0$ является последовательностью наименьших уклонений некоторой функции $f \in C[-1,1]$ от полиномов, т.е.

$$E_n(f) = a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Однако решение, предложенное Бернштейном, не эффективно. Вот что пишет по этому поводу в сноске к своей работе он сам (см. [4, статья 77]): “Здесь применяется известный диагональный процесс .... Поэтому доказательство существования $f(x)$ является неэффективным. Лишь при некоторых ограничениях, наложенных на закон убывания $a_n$, мне удалось дать конструктивный метод построения искомой функции $f(x)$”. К сожалению, результаты Бернштейна в этом направлении остались неопубликованными. В дополнении к сказанному можно лишь заметить, что если $a_n \downarrow 0$ строго убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии: $a_{n+1}/a_n \geqslant q > 0$, то из установленных Бернштейном аппроксимационных свойств аналогов нигде не дифференцируемой функции Вейерштрасса следует (см. [5, § 8, следствие II]), что соотношение $E_n(f) \asymp a_n$ имеет место, например, для непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{3^{k-1}} - a_{3^k}) T_{3^k}(x), \tag{1}$$

где $T_k(x) = \cos k \arccos x$ – многочлены Чебышева.

В случае рациональных приближений первые результаты, относящиеся к сформулированной проблеме, получены А. А. Гончаром. Так в [6] для произвольной последовательности $a_n \downarrow 0$ построена непрерывная функция

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \varepsilon_k}{2^k (x_k - x)}, \qquad \varepsilon_k > 0, \quad x_k = 1 + \varepsilon_k,$$

для которой

$$R_n(G) \leqslant a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

а в работе [7] дается эффективный алгоритм для нахождения такой функции $f \in C[-1,1]$, для которой

$$R_n(f) \geqslant a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Далее, Е. П. Долженко в [1], рассматривая ряды вида (1), привел пример функции $f \in C[-1,1]$, для которой $R_n(f) \asymp a_n$ при условии, что $a_n \downarrow 0$ убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии. При приближении тригонометрическими рациональными дробями с действительными коэффициентами непрерывных $2\pi$-периодических функций эффективное решение проблемы Долженко получено автором [8], [9] (см. также работу А. А. Пекарского [10], где рассматриваются рациональные приближения комплекснозначных функций).

Основным содержанием данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для любой последовательности $a_n \downarrow 0$ существует такая нечетная функция $g \in C[-1,1]$, для которой*

$$R_{2n}(g) \asymp a_n.$$

В основу конструкции искомой функции, как и в [8], [9], положены алгебраические дроби Чебышева–Маркова, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1,1]$.

Вначале предположим, что последовательность $a_n \downarrow 0$ строго убывает. Без ограничения общности при построении функции $g$ будем считать, что $a_0 = 1$. В противном случае следует рассмотреть последовательность $\{a_n/a_0\}_{n=0}^{\infty}$ и воспользоваться равенством $R_n(\lambda f) = |\lambda| R_n(f)$.

Определим три бесконечно малые последовательности положительных чисел

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n, \qquad \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n\}, \qquad n = 1,2,3,\dots, \tag{2}$$
$$\beta_j = \frac{\varepsilon_1}{5}\frac{\varepsilon_2}{5}\cdots\frac{\varepsilon_j}{5}, \qquad j = 1,2,3,\dots.$$

Следующая лемма установлена в [10].

Лемма 1. *Последовательность $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям*

$$1 > \beta_j > \beta_{j+1} > 0, \qquad j = 1,2,3,\dots,$$
$$\sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{\beta_j}{\beta_l} < \frac{1}{4}\varepsilon_{l+1}, \quad l = 1,2,3,\dots, \qquad \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\beta_l}{\beta_j} < \frac{1}{4}\varepsilon_l, \quad l = 2,3,4,\dots.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $z_k = i\beta_k$, $k = 1,2,\dots,n$, и взяв каждую точку $z_k$ с кратностью 2, построим синус-дробь Бернштейна [11, гл. 1, § 1]

$$N_{2n}(y) = \sin \Phi_{2n}(y) = \frac{yP_{2n-2}(y)}{\prod_{k=1}^{n}(y^2 + \beta_k^2)}, \tag{3}$$

где $P_{2n-2}(y)$ – четный полином порядка $2n-2$, а

$$\Phi_{2n}(y) = 2\sum_{k=1}^{n} \arg(z_k - y).$$

Лемма 2. *Пусть $\lambda_{k,l} = N_{2k}(\beta_l)$. Тогда*

$$|\lambda_{k,l}| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \qquad \text{при } l > k,$$
$$|\lambda_{k,l} - (-1)^l| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \qquad \text{при } l \leqslant k.$$

Доказательство леммы 2 имеется в [8].

Теперь нужную синус-дробь Чебышева–Маркова получим как частный случай дробей Бернштейна, положив в (3) $x = (1-y^2)/(1+y^2)$. Тогда (см. [11, гл. 2, § 1, равенство (9)]) будем иметь, что

$$\nu_n(x) = \sin\varphi_{2n}(x) = \sin\Phi_{2n}(y) = \sqrt{1-x^2}\,\frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^{n}(1-c_jx)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами, а

$$c_k = \frac{1-\beta_k^2}{1+\beta_k^2}, \qquad k = 1,2,\dots,n.$$

С учетом замены и последних равенств следует, что

$$0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots < 1 \quad \text{и} \quad \nu_k(c_l) = \lambda_{k,l}, \quad k = 1,2,\dots, \quad l = 1,2,\dots .$$

В банаховом пространстве $\mathbf{c}_0$ сходящихся к нулю последовательностей $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ с нормой $\|t\|_{\mathbf{c}_0} = \sup\{|t_n| \colon n = 0,1,2,\dots\}$ определим множество

$$K = \{t \colon 0 \leqslant t_k \leqslant \varepsilon_{k+1}; \quad k = 0,1,2,\dots\}.$$

Если $t = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in K$, то, полагая $\Delta t_k = t_{k-1} - t_k$, рассмотрим функцию из $C[-1,1]$

$$h_t(u) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)\nu_k(u) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)\sqrt{1-u^2}\,\frac{P_{k-1}(u)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j\,u)}.$$

Лемма 3. *При всех $t \in K$ справедливы неравенства*

$$(-1)^l h_t(c_l) \geqslant a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l, \qquad l = 1,2,\dots .$$

Доказательство. При указанных значениях $l$

$$\begin{aligned} h_t(c_l) - (-1)^l(a_{l-1} + t_{l-1}) &= \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)\nu_k(c_l) - (-1)^l(a_{l-1} + t_{l-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{l-1}(\Delta a_k + \Delta t_k)\lambda_{k,l} + \sum_{k=l}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)(\lambda_{k,l} - (-1)^l). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in K$, то $\Delta a_k + \Delta t_k \geqslant 0$. Поэтому, используя лемму 2, получим

$$|h_t(c_l) - (-1)^l(a_{l-1} + t_{l-1})| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_l \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_l(a_0 + t_0) < \varepsilon_l.$$

Лемма доказана.

Для каждого $t \in K$ и $x \in [-1,1]$ определим функцию

$$f_t(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)\frac{xP_{k-1}(1-x^2)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j(1-x^2))}. \tag{4}$$

Ряд в (4) для всех $x \in [-1,1]$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)$, а его члены – непрерывные функции на отрезке $[-1,1]$. Поэтому при любом $t \in K$ $f_t$ является нечетной функцией из $C[-1,1]$. При этом для $x \in [0,1]$

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} h_t(1-x^2).$$

Покажем, что для всех $t \in K$ справедливы неравенства

$$\frac{a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}} \leqslant R_{2n}(f_t) \leqslant a_n + t_n, \qquad n = 0,1,2,\dots. \tag{5}$$

Действительно, так как $|\nu_k(x)| = |\sin\varphi_{2k}(x)| \leqslant 1$ и $\Delta a_k + \Delta t_k \geqslant 0$, то для всех $x \in [-1,1]$

$$\left| f_t(x) - \sum_{k=1}^{n} (\Delta a_k + \Delta t_k) \frac{x P_{k-1}(1-x^2)}{\prod_{j=1}^{k}(1 - c_j(1-x^2))} \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k)|\nu_k(1-x^2)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) = a_n + t_n.$$

Таким образом, оценка сверху в (5) доказана.

Для доказательства оценки снизу воспользуемся частным случаем теоремы Валле Пуссена [12, гл. 2, § 31]. В точках

$$u_l = \sqrt{1-c_l}, \qquad l = 1,2,\dots,n+1,$$

согласно лемме 3 имеем

$$(-1)^l f_t(u_l) = \frac{1}{\sqrt{2-u_l^2}} (-1)^l h_t(c_l) \geqslant \frac{a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому с учетом нечетности функции $f_t$ на отрезке $[-1,1]$ имеется $2n+2$ точки

$$\begin{aligned} &u_1 = -\sqrt{1-c_1}, && u_2 = -\sqrt{1-c_2}, && \dots, && u_{n+1} = -\sqrt{1-c_{n+1}}, \\ &u_{n+2} = \sqrt{1-c_{n+1}}, && u_{n+3} = \sqrt{1-c_n}, && \dots, && u_{2n+2} = \sqrt{1-c_1}, \end{aligned}$$

в которых $f_t$ принимает значения с чередующимися знаками. Следовательно,

$$R_{2n}(f_t) \geqslant \min\left\{ \frac{a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l}{\sqrt{2}} : l = 1,2,\dots,n+1 \right\} = \frac{a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}},$$

и нижняя оценка в (5) доказана.

Теперь, полагая $g = f_{t^*}$, где $t^* = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots) \in K$, и, учитывая (5) и (2), получим

$$\frac{a_n}{\sqrt{2}} \leqslant R_{2n}(g) \leqslant 2a_n, \qquad n = 0,1,2,\dots.$$

Следовательно, для строго убывающей последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ теорема доказана. Рассмотрим общий случай, когда $a_n \downarrow 0$. Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, начиная с некоторого номера, состоит из нулей, то в качестве искомой функции $g$ можно взять подходящую рациональную дробь. Поэтому считаем, что члены последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не равны нулю. В этом случае последовательность

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{n+2}{n+1}a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$$

строго убывает. Значит, согласно доказанному существует такая нечетная функция $g \in C[-1,1]$, для которой

$$R_{2n}(g, C[-1,1]) \asymp b_n \Longrightarrow R_{2n}(g, C[-1,1]) \asymp a_n.$$

Теорема доказана.

На самом деле при доказательстве теоремы для фиксированной последовательности $a_n \downarrow 0$ построено несчетное множество таких функций $g \in C[-1,1]$, для которых $R_{2n}(g, C[-1,1]) \asymp a_n$. Более того, в силу эффективности построения искомой функции при дополнительных условиях на последовательность $a_n \downarrow 0$ можно гарантировать и некоторые другие ее свойства. Покажем, например, что если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, то $g$ является абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[-1,1]$[1)].

Действительно, применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k\Delta a_k < +\infty.$$

С другой стороны, заметим, что

$$I_n = \int_{-1}^{1} |\nu_n'(x)|\,dx = 2n, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Для доказательства последнего равенства воспользуемся тем, что на интервале $(-1,1)$ (см. [11, гл. 2, § 1, равенство (12)])

$$\varphi_{2n}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-c_k^2}}{1-c_k x} < 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{1} |\nu_n'(x)|\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} |\cos\varphi_{2n}(x)|\,|\varphi_{2n}'(x)|\,dx = -\int_{-1}^{1} |\cos\varphi_{2n}(x)|\,d\varphi_{2n}(x). \end{aligned}$$

Функция $\varphi_{2n}(x)$ монотонно убывает на отрезке $[-1,1]$ и [11, гл. 2, § 1, равенство (5)]

$$\varphi_{2n}(-1) = 2n\pi, \qquad \varphi_{2n}(1) = n\pi.$$

---

[1)] Это утверждение следует и из известной теоремы Долженко [13]. В ней, правда, рассматриваются $R_n^*(f)$ – наименьшие уклонения функции $f$ от рациональных дробей с комплексными коэффициентами. Однако в силу соотношений $(1/2)R_n(g) \leqslant R_n^*(g) \leqslant R_n(g)$ (см. [14, гл. 7, § 1, теорема 1.2]) это несущественно.

Поэтому этот отрезок можно разбить на $n$ отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, пересекающихся только своими концами, каждый из которых отображается $\varphi_{2n}(x)$ биективно на один из отрезков $[(n+k-1)\pi, (n+k)\pi]$. Следовательно,

$$I_n = -\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |\cos\varphi_{2n}(x)|\, d\varphi_{2n}(x) = n \int_0^{\pi} |\cos t|\, dt = 2n.$$

Это означает, что при наших предположениях ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \int_{-1}^{1} |\nu_k'(u)|\, du = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \Delta a_k$$

сходится. В таком случае функция $h_t(u)$ должна быть абсолютно непрерывной на $[-1, 1]$. Тогда функция $g$ также является абсолютно непрерывной на этом отрезке.

Заметим, что в силу эффективности построения искомой функции приведенная здесь теорема может быть использована как при доказательстве точности прямых теорем, так и при получении обратных теорем рациональной аппроксимации в пространстве $C[-1, 1]$. В этом смысле соответствующий ее аналог для полиномиальных приближений не известен.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. №3. С. 313–320.

[2] Бернштейн С. Н. Sur le probléme inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues // C. R. Acad. Sci. 1938. V. 206. P. 1520–1523.

[3] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

[4] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.

[5] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.-Л.: ОНТИ, 1937.

[6] Гончар А. А. О наилучших приближениях рациональных функций // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. №2. С. 13–16.

[7] Гончар А. А. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения // Матем. сб. 1967. Т. 72(114). №3. С. 489–503.

[8] Старовойтов А. П. К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Матем. заметки. 2001. Т. 69. №6. С. 919–924.

[9] Старовойтов А. П. К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Матем. сб. 2000. Т. 191. №6. С. 145–154.

[10] Пекарский А. А. Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Изв. АН Беларуси. Сер. физ. -матем. наук. 1994. №1. С. 23–26.

[11] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: БГУ, 1979.

[12] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

[13] Долженко Е. П. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций // Матем. сб. 1962. Т. 56(98). №4. С. 403–433.

[14] Lorentz G., v. Golitschek M., Makavoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.


Белорусский государственный университет
*E-mail*: Svoitov@gsu.unibel.by

Поступило
15.01.2002
Исправленный вариант
17.02.2003