УДК 517.51: 517.53

А.П. СТАРОВОЙТОВ

ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

For a fixed sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ of non-negative real numbers strictly decreasing to zero a continuous on [-1, 1] function g is constructed such that $a_n/\sqrt{2} \le R_{2n}(g) \le 2a_n$, $n=0, 1, \ldots$ where the $R_n(g)$ are the best approximations of g in the uniform norm by rational algebraic functions of degree at most n.

Пусть $C_{[-1,\,1]}$ – банахово пространство непрерывных на отрезке [–1, 1] вещественных функций с равномерной нормой. Через P_n и R_n обозначим соответственно множество всех алгебраических полиномов и рациональных функций с действительными коэффициентами степени не выше n. Для $f\in C_{[-1,\,1]}$ и n=0, 1, 2, … рассмотрим

$$E_n(f)=\inf\left\{\|f-p\|: p\in P_n\right\},\ R_n(f)=\inf\left\{\|f-r\|: r\in R_n\right\}$$

– наилучшие приближения f в $C_{[-1,\,1]}$ множествами P_n и R_n. Ниже соотношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок при $n\to\infty$, а запись $\alpha_n\downarrow 0$ предполагает, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает и сходится к нулю. Хорошо известно, например, что $E_n(f)\downarrow 0$ и $R_n(f)\downarrow 0$.

До сих пор не решенной остается следующая проблема, поставленная Е.П. Долженко: “Какой должна быть последовательность $\alpha_n\downarrow 0$, чтобы существовала функция $f\in C_{[-1,\,1]}$ такая, что $R_n(f)\asymp a_n$?” [1, с. 317]. При этом будем говорить об эффективном решении проблемы в том случае, когда по заданной последовательности искомая функция построена конструктивно.

Для полиномиальных приближений в силу известной теоремы С.Н. Бернштейна (см. [2, 3]) любая последовательность $\alpha_n\downarrow 0$ является последовательностью наилучших приближений некоторой функции $f\in C_{[-1,\,1]}$, т. е. $E_n(f)=a_n$, n=0, 1, … . Однако решение, предложенное С.Н. Бернштейном, неэффективно. Вот что пишет по этому поводу он сам: “Здесь применяется известный диагональный процесс… Поэтому доказательство существования $f(x)$ является неэффективным. Лишь при некоторых ограничениях, наложенных на закон убывания a_n, мне удалось дать конструктивный метод построения искомой функции $f(x)$” [4, с. 249]. К сожалению, полученные С.Н. Бернштейном результаты остались неопубликованными. В дополнение к сказанному можно лишь заметить, что если $\alpha_n \downarrow 0$ строго убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии: $a_{n+1}/a_n > q > 0$, то из установленных С.Н. Бернштейном аппроксимационных свойств аналогов функции Вейерштрасса без производной следует (см. [5, § 8, следствие II]), что функцией $f \in C_{[-1,\,1]}$, для которой $E_n(f) \asymp a_n$, является, например,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{3^{k-1}} - a_{3^k})\ T_{3^k}(x), \tag{1}$$

где $T_k(x) = \cos k \arccos x$ – многочлены Чебышева.

В случае рациональных приближений первые значительные результаты, относящиеся к сформулированной проблеме, получены А.А. Гончаром: в [6] для произвольной последовательности $\alpha_n \downarrow 0$ найдена непрерывная функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \varepsilon_k}{2^k (x_k - x)},\ \varepsilon_k > 0,\ \ x_k = 1 + \varepsilon_k,$$

для которой $R_n(f) \le a_n$ $n=0,\ 1,\ \ldots$, а в [7] дается эффективный алгоритм для построения $f \in C_{[-1,\,1]}$ такой, что $R_n(f) \ge a_n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Далее, Е.П. Долженко в [1], рассматривая ряды вида (1), привел пример функции $f \in C_{[-1,\,1]}$, для которой $R_n(f) \asymp a_n$ при условии, что $\alpha_n \downarrow 0$ убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии. При приближении тригонометрическими рациональными дробями с действительными коэффициентами функций из $C_{2\pi}$ эффективное решение проблемы Е.П. Долженко получено нами [8, 9] (см. также работу А.А. Пекарского [10], где рассматриваются рациональные приближения комплекснозначных функций).

Основным содержанием данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для любой последовательности $\alpha_n \downarrow 0$, строго убывающей к нулю, существует такая нечетная функция $g \in C_{[-1,\,1]}$, что $R_{2n}(g) \asymp a_n$.*

В основу конструкции искомой функции, как и в [8, 9], положены алгебраические дроби Чебышева – Маркова, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1,\ 1]$. Без ограничения общности при построении функции g будем считать, что $a_0=1$. В противном случае следует рассматривать последовательность $1,\ a_1/a_0,\ a_2/a_0,\ \ldots$. Определим три бесконечно малые последовательности положительных чисел

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n,\quad \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1,\ \Delta a_2,\ \ldots,\ \Delta a_n\}, \tag{2}$$

$$\beta_n = \frac{\varepsilon_1}{5} \cdot \frac{\varepsilon_2}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{\varepsilon_n}{5},\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

В [10] установлена следующая

Лемма 1. *Последовательность $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:*

$$1 > \beta_j > \beta_{j+1} > 0,\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\sum_{j=l+1}^{\infty} \beta_j/\beta_l < \frac{1}{4}\varepsilon_{l+1},\ \ \sum_{j=1}^{l-1} \beta_l/\beta_j < \frac{1}{4}\varepsilon_l.$$

Для каждого $n \in N$ положим $z_k = i\beta_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и, взяв каждую точку z_k с кратностью 2, построим синус-дробь Бернштейна [11, гл. 1, § 1]

$$N_{2n}(y) = \sin \Phi_{2n}(y) = \frac{y\ \ P_{2n-2}(y)}{\prod_{k=1}^{n} (y^2 + \beta^2)}, \tag{3}$$

где $P_{2n-2}(y)$ – четный полином порядка $2n-2$, а

$$\Phi_{2n}(y)=2\sum\nolimits_{k=1}^{n}\arg\ (z_k-y).$$

Лемма 2. *Пусть* $\lambda_{2k,\,l}=N_{2k}(\beta_l)$. *Тогда*

$$|\ \lambda_{k,\,l}|<\frac{1}{2}\varepsilon_l \ \textit{при}\ l>k,$$

$$|\ \lambda_{k,\,l}-(-1)^l|<\frac{1}{2}\varepsilon_l \ \textit{при}\ l\le k.$$

Доказательство леммы 2 имеется в [8].

Теперь нужную синус-дробь Чебышева – Маркова получим как частный случай дробей Бернштейна, положив в (3) $x=(1-y^2)/(1+y^2)$. Тогда (см. [11, гл. 2, § 1, равенство (9)]) будем иметь

$$\nu_n(x)=\sin\varphi_{2n}(x)=\sin\Phi_{2n}(y)=\sqrt{1-x^2}\,\frac{P_{n-1}(x)}{\prod\nolimits_{j=1}^{n}(1-c_jx)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами, а $c_k=(1-\beta_k^{\,2})/(1+\beta_k^{\,2})k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. С учетом замены и последних равенств следует, что

$$0<c_1<c_2<\ldots<c_n<\ldots<1 \ \text{и}\ \ \nu_k(c_l)=\lambda_{k,\,l},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ l=1,\ 2,\ \ldots .$$

В банаховом пространстве $\mathbf{c}_0$ сходящихся к нулю последовательностей $t=(t_0,\,t_1,\,t_2,\,\ldots)$ с нормой $\|t\|_{c_0}=\sup\{|t_n|:n=0,\,1,\,2,\,\ldots\}$ определим множество

$$K=\{t:0\le t_k\le\varepsilon_{k+1};\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Если $t=(t_0,\,t_1,\,t_2,\,\ldots)\in K$, то, полагая $\Delta t_k=t_{k-1}-t_k$, рассмотрим функцию из $C_{[-1,\,1]}$

$$h_t(u)=\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)\nu_k(u)=\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)\sqrt{1-u^2}\,\frac{P_{k-1}(u)}{\prod\nolimits_{j=1}^{k}(1-c_ju)}.$$

Лемма 3. *При всех* $t\in K$ *справедливы неравенства*

$$(-1)^l h_t(c_l)\ge a_{l-1}+t_{l-1}-\varepsilon_l,\ l=1,\ 2,\ \ldots .$$

Доказательство. При $l=1,\,2,\,\ldots$

$$h_t(c_l)-(-1)^l(a_{l-1}+t_{l-1})=\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)\nu_k(c_l)-(-1)^l(a_{l-1}+t_{l-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{l-1}(\Delta a_k+\Delta t_k)\lambda_{k,\,l}+\sum_{k=l}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)(\lambda_{k,\,l}-(-1)^l)\ .$$

Поскольку $t\in K$, то $\Delta a_k+\Delta t_k\ge 0$. Поэтому, используя лемму 2, получим

$$\left|h_t(c_l)-(-1)^l(a_{l-1}+t_{l-1})\right|\le\frac{1}{2}\varepsilon_l\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)\le\frac{1}{2}\varepsilon_l(a_0+t_0)<\varepsilon_l\,.$$

Лемма доказана.

Для каждого $t\in K$ и $x\in[-1,\,1]$ определим функцию

$$f_t(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)\frac{x\,P_{k-1}(1-x^2)}{\prod\nolimits_{j=1}^{k}(1-c_j(1-x^2))}\ . \qquad (4)$$

Ряд в (4) для всех $x\in[-1,\,1]$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)$, а его члены – непрерывные функции на отрезке $[-1,\,1]$.

Поэтому при любом $t\in K$ f_t является нечетной функцией из $C_{[-1,\,1]}$. При этом для $x\in[0,\,1]$

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\quad h_t(1-x^2)\ .$$

Покажем, что для всех $t\in K$ справедливы неравенства

$$\frac{a_n+t_n-\varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}}\le R_{2n}(f_t)\le a_n+t_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

Действительно, так как $|\nu_k(x)|=|\sin\varphi_{2k}(x)|\le1$ и $\Delta a_k+\Delta t_k\ge0$, то для всех $x\in[-1,\,1]$

$$\left|f_t(x)-\sum_{k=1}^{n}(\Delta a_k+\Delta t_k)\frac{x\,P_{k-1}(1-x^2)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j(1-x^2))}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\sum_{k=n+1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)\left|\nu_k(1-x^2)\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}(\Delta a_k+\Delta t_k)=a_n+t_n.$$

Таким образом, оценка сверху в (5) доказана.

Для доказательства оценки снизу воспользуемся частным случаем теоремы Валле Пуссена [12, гл. 2, § 31]. В точках $u_l=\sqrt{1-c_l}$, $l=1,\,2,\,\ldots,\,n+1$ согласно лемме 3

$$(-1)^l f_t(u_l)=\frac{1}{\sqrt{2-u_l^2}}\ (-1)^l h_t(c_l)\ge\frac{a_{l-1}+t_{l-1}-\varepsilon_l}{\sqrt{2}}\,.$$

Поэтому с учетом нечетности функции f_t на отрезке $[-1,\,1]$ имеются $2n+2$ точки

$$u_1=-\sqrt{1-c_1},\ u_2=-\sqrt{1-c_2},\ \ldots,\ u_{n+1}=-\sqrt{1-c_{n+1}}\,,$$
$$u_{n+2}=\sqrt{1-c_{n+1}},\ u_{n+3}=\sqrt{1-c_n},\ \ldots,\ u_{2n+2}=\sqrt{1-c_1}\,,$$

в которых f_t принимает значения с чередующимися знаками. Следовательно,

$$R_{2n}(f_t)\ge\min\left\{\frac{a_{l-1}+t_{l-1}-\varepsilon_l}{\sqrt{2}}\ :l=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1\right\}=\frac{a_n+t_n-\varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}}\ ,$$

и нижняя оценка в (5) доказана.

Теперь, полагая $g=f_{t^*}$, где $t^*=(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\,\varepsilon_3,\,\ldots)\in K$, и учитывая (5) и (2), окончательно получим

$$\frac{a_n}{\sqrt{2}}\le R_{2n}(g)\le 2a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Теорема доказана.

На самом деле при доказательстве теоремы построено несчетное множество функций, удовлетворяющих ее условию. Более того, при дополнительных условиях в силу эффективности построения искомой функции на последовательность $\alpha_n\downarrow0$ можно гарантировать и некоторые другие ее свойства. Например, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится, то g является абсолютно непрерывной на $[-1,\,1]$.

1. Долженко Е.П. // Мат. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313.
2. Бернштейн С.Н. // C. R. Acad. Sc. 1938. Vol. 206. P. 1520.
3. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
4. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений: В 4 т. М., 1954. Т. 2.
5. Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов. М.; Л., 1937.

6. Гончар А. А. // ДАН СССР. 1955. Т. 100. № 2. С. 13.
7. Гончар А. А. // Мат. сб. 1967. Т. 72(114). № 3. С. 489.
8. Старовойтов А. П. // Мат. заметки. 2001. Т. 69. Вып. 6. С. 919.
9. Старовойтов А. П. // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 145.
10. Пекарский А. А. // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1994. № 1. С. 23.
11. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
12. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.

Поступила в редакцию 14.01.2002.

Александр Павлович Старовойтов – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики и математической физики.

УДК 517.955

Ф.Е. ЛОМОВЦЕВ

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

The correct strong solvability of the Cauchy problems for factorized differential equations with variable domains of operator coefficients is proved. The formula of their strong solutions $u=\overline{M_1}^{-1}\ldots\overline{M_m}^{-1}\mathfrak{F}$ is obtained.

Функциональным методом из [1] докажем корректную сильную разрешимость задач Коши для факторизованных дифференциальных уравнений с переменными областями определения операторных коэффициентов и выведем формулу их сильных решений (14).

1. Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\bullet,\bullet)$ и нормой $|\bullet|$ рассматриваются задачи Коши (ЗК):

$$\mathcal{L}_m(t)u\equiv\left(d/dt+A_m(t)\right)\cdots\left(d/dt+A_1(t)\right)u=f,\ t\in\,]0,\ T[,\tag{1}$$

$$\ell_j u\equiv d^j u/dt^j\big|_{t=0}=\varphi_j\in H,\ 0\le j\le m-1,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\tag{2}$$

где u, f – функции t со значениями в H, $A_k(t)$ – линейные положительные самосопряженные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$.

I. Операторы $A_k(t)$, $t\in[0, T[$, являются сужениями на $D(A_k(t))$ линейных операторов $\tilde{A}_k(t)$ в H с не зависящими от t областями определения $D(\tilde{A}_k)$.

II. Области определения $D(A_k^m(t))$ степеней $A_k^m(t)$ плотны в H, $1\le k\le m$; эквивалентны нормы: $|A_s(t)u|\sim|A_k(t)u|\sim|A_s(t)u-A_k(t)u|$ для $\forall u\in D(A_k(t))$, $\forall t\in[0, T[$, $1\le s\ne k\le m$; и существуют постоянные $c_{s,\,k}\ge 0$, что

$$\left|A_s(t)A_k(t)v-A_k(t)A_s(t)v\right|_{\alpha(t)}\le c_{s,\,k}\left|v\right|_{(\alpha+2)(t)}\ \forall v\in W^{\alpha+4}(t),\ t\in[0,\ T[,$$
$$\alpha\le 2m-4,\ s\ne k,\tag{3}$$

где гильбертовы пространства $W^{\alpha}(t)$ – области определения $D(A_1^{\alpha/2}(t))$ степеней $A_1^{\alpha/2}(t)$, наделенные эрмитовыми нормами $|v|_{\alpha(t)}=\left|A_1^{\alpha/2}(t)v\right|$, $\alpha\le 2m$.

III. Существуют линейные положительные самосопряженные операторы $B(t)$, $t\in[0, T[$, в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$, у которых обратные $B^{-1}(t)$, $A_k(t)B^{-1}(t)$ и их сильная производная $dB^{-1}(t)/dt$ из $L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$, и равномерно по t существуют пределы: