ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 512.542

*ГО ВЭНЬ БИНЬ, А.Н. СКИБА*

# ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О ТОЖДЕСТВАХ РЕШЕТОК $\omega$-ЛОКАЛЬНЫХ И $\omega$-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП



Все рассматриваемые нами группы конечны. В дальнейшем символ $\omega$ означает некоторое непустое множество простых чисел. Следуя [1], символом $G_{\omega d}$ обозначим наибольшую нормальную в $G$ подгруппу $N$ со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора $H/K$ из $N$ ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing$). Как и в [2], через $C^p(G)$ обозначим пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы $G$, чьи композиционные факторы имеют простой порядок $p$ ($C^p(G) = G$, если в $G$ нет главных факторов с таким свойством). Наконец, в соответствии со стандартной терминологией, через $G_{\mathfrak{S}_\omega}$ обозначим $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы $G$, т. е. произведение всех таких ее разрешимых нормальных подгрупп, чьи порядки являются $\omega$-группами.

Пусть $f$ — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \tag{1}$$

Следуя [1], [3] соответственно, сопоставим функции $f$ два класса групп

$$LF_\omega(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \ \text{ и } \ G/F_p(G) \in f(p) \ \text{ для всех } \ p \in \pi(G) \cap \omega)$$

и

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/G_{\mathfrak{S}_\omega} \in f(\omega') \ \text{ и } \ G/C^p(G) \in f(p) \ \text{ для всех таких } \ p \in \omega,$$
$$\text{что в } G \text{ имеется композиционный фактор порядка } p).$$

Если формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется $\omega$-локальной формацией с $\omega$-локальным спутником $f$ [1]. Если же $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, то $\mathfrak{F}$ называется $\omega$-композиционной формацией с $\omega$-композиционным спутником $f$ [3]. Нетрудно заметить, что класс локальных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-локальных формаций (см. подробнее [1]), а класс композиционных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-композиционных формаций.

Напомним теперь восходящие к работе [4] понятия кратно $\omega$-локальной и кратно $\omega$-композиционной формаций. Всякая формация считается 0-кратно $\omega$-локальной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется $n$-кратно $\omega$-локальной [1], если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения функции $f$ являются $(n-1)$-кратно $\omega$-локальными формациями. Аналогично, всякая формация считается 0-кратно $\omega$-композиционной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется $n$-кратно $\omega$-композиционной [3], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения функции $f$ являются $(n-1)$-кратно $\omega$-композиционными формациями.

Относительно включения $\subseteq$ множество всех $n$-кратно $\omega$-локальных формаций $l_n^\omega$ и множество всех $n$-кратно $\omega$-композиционных формаций $c_n^\omega$ являются полными решетками.

В [5] была установлена модулярность решетки локальных формаций $l = l_1^{\mathbb{P}}$. Впоследствии этот факт нашел много приложений при исследовании локальных формаций с заданными внутренними ограничениями (см. [6], гл. 4; [7], гл. 4, 5), и он был развит в различных направлениях. В частности, А.Н. Скибой было установлено (см. подробнее [6], § 8), что при любых целых $n$ и

$m$ у решеток $l_n = l_n^{\mathbb{P}}$ и $l_m = l_m^{\mathbb{P}}$ системы тождеств совпадают. Позднее в [8] была доказана модулярность решетки всех $\omega$-локальных формаций $l_0^\omega$, а в [1], [3] была установлена модулярность решеток $l_n^\omega$ и $c_n^\omega$ при произвольных $\omega$ и $n$.

В данной работе докажем следующую теорему, охватывающую все эти результаты и дающую положительный ответ на вопрос 2 из [1] в случае, когда $\omega$ — бесконечное множество.

**Теорема.** *Пусть $m$ и $n$ — целые неотрицательные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *всякое тождество решетки всех формаций $l_0^\omega$ выполняется в каждой из решеток $l_n^\omega$, $c_m^\omega$;*
2) *если $\omega$ — бесконечное множество, то системы тождеств решеток $l_n^\omega$ и $c_m^\omega$ совпадают.*

Символом $l_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех $n$-кратно $\omega$-локальных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. В [1] было доказано, что если $\mathfrak{F} = l_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где

$$f(a) = \begin{cases} l_{n-1}^\omega \operatorname{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } \ a \in \omega \bigcap \pi(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & \text{если } \ a \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X}); \\ l_{n-1}^\omega \operatorname{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } \ a = \omega'. \end{cases}$$

Такой спутник $f$ называется [1] минимальным $l_{n-1}^\omega$-значным $\omega$-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$.

**Лемма 1.** *Пусть $A$ — монолитическая группа с неабелевым монолитом $R$, $\mathfrak{M}$ — некоторая полуформация и $A \in l_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

**Доказательство.** Проведем индукцию по $n$. Пусть $n = 0$. Тогда

$$A \in l_0^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M} = \operatorname{form} \mathfrak{M}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Тогда согласно следствию 1.2.26 из [7] в $\operatorname{form} \mathfrak{M}$ найдется группа $H$ с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \ldots, N_t, M_1, \ldots, M_t$ $(t \geq 2)$, что выполняются следующие утверждения:

1) $A \simeq H/N$ и $M/N = \operatorname{Soc}(H/N)$; 2) $H/N_i$ — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом $M_i/N_i$, который $H$-изоморфен $M/N$.
Понятно, что $C_H(M/N) = N$. Значит, $N_i \subseteq N$. Поэтому $A \simeq H/N \in \mathfrak{M}$. Противоречие. Итак, утверждение леммы при $n = 0$ верно.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ лемма верна.

Обозначим через $f$ минимальный $l_{n-1}^\omega$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F} = l_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Если $\omega \bigcap \pi(R) = \varnothing$, то $A_{\omega d} = 1$ и поэтому по лемме 5 из [1]

$$A \simeq A/A_{\omega d} \in f(\omega') \subseteq l_{n-1}^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$. Пусть $\omega \bigcap \pi(R) \neq \varnothing$ и $p \in \omega \bigcap \pi(R)$. Тогда $F_p(A) = 1$ и поэтому по лемме 5 из [1]

$$A \simeq A/F_p(A) \in f(p) \subseteq l_{n-1}^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}.$$

Значит, $A \in \mathfrak{M}$. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — полуформация и $A \in l_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Тогда справедливы следующие условия:*

1) *если $\mathrm{O}_p(A) = 1$ и $p \in \omega$, то $A \in l_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/\mathrm{O}_p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$;*
2) *если $A_{\omega d} = 1$, то $A \in l_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/G_{\omega d}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.*

**Доказательство.** Если $A \in \mathfrak{M}$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Сначала предположим, что $A$ — монолитическая группа с монолитом $R$. Пусть $n = 0$. Тогда $A \in l_0^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M} = \operatorname{form}\mathfrak{M}$. Значит, согласно следствию 1.2.26 из [7] в формации $\operatorname{form}\mathfrak{M}$ найдется группа $H$ с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \ldots, N_t, M_1, \ldots, M_t$ $(t \geq 2)$, что выполняются следующие условия: 1) $H/N \simeq A$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$; 2) $N_1 \bigcap \cdots \bigcap N_t = 1$; 3) $H/N_i$ — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом $M_i/N_i$, который $H$-изоморфен $M/N$. Значит, из условий 2) и 3) следует, что

$$A \in \mathrm{HR}_0\{H/N_1, \ldots, H/N_t\} \subseteq \operatorname{form}\mathfrak{M}_1.$$

Пусть $n > 0$. Предположим сначала, что $O_p(A) = 1$. Если $R$ — неабелева группа, то согласно лемме 1 $A \in \mathfrak{M}$, что противоречит нашему первоначальному соглашению относительно группы $A$. Значит, $R$ — $q$-группа, где $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Следовательно, $F_q(A) = O_q(A)$. Поскольку для любой группы $G$ имеет место

$$G/G_{\omega d} \simeq (G/\mathrm{O}_p(G))/(G_{\omega d}(G)/\mathrm{O}_p(G)) \simeq (G/\mathrm{O}_p(G))/(G/\mathrm{O}_p(G))_{\omega d},$$

то по лемме 5 из [1] $f(\omega') = h(\omega')$, где $f$ и $h$ — минимальные $l_{n-1}^\omega$-значные $\omega$-локальные спутники формаций $\mathfrak{F} = l_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} = l_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}_1$ соответственно. Значит, если $q \notin \omega$, то $A_{\omega d} = 1$ и поэтому

$$A \simeq A/A_{\omega d} \in f(\omega') = h(\omega') \subseteq \mathfrak{H}.$$

Пусть $q \in \omega$. Тогда поскольку для любой группы $G$ имеет место

$$G/\mathrm{F}_q(G) \simeq (G/\mathrm{O}_p(G))/(\mathrm{F}_q(G)/\mathrm{O}_p(G)) = (G/\mathrm{O}_p(G))/\mathrm{F}_q(G/\mathrm{O}_p(G)),$$

то по лемме 5 из [1] $f(q) = h(q)$. Значит, $A/O_q(A) \in \mathfrak{H}$ и, следовательно,

$$A/\mathrm{F}_r(A) \simeq (A/\mathrm{O}_q(A))/(\mathrm{F}_r(A)/\mathrm{O}_q(A)) = (A/\mathrm{O}_q(A))/\mathrm{F}_r(A/\mathrm{O}_q(A)) \in h(r)$$

для всех $r \in \omega \bigcap \pi(A)$. Значит, $A \in \mathfrak{H}$. Аналогично доказывается, что $A \in l_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/\mathrm{O}_{\omega d}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathrm{Soc}(A) = N_1 \times \cdots \times N_t$, где $t > 1$. Пусть $M_i$ — наибольшая нормальная в $A$ подгруппа, содержащая $N_1 \times \cdots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \cdots \times N_t$, но не содержащая $N_i$, $i = 1, \ldots, t$. Тогда согласно лемме 4.1.3 из [7] $A \in \mathrm{R}_0(A/M_1, \ldots, A/M_t)$, где $A/M_i$ — монолитическая группа с монолитом $N_iM_i/M_i$. Понятно, что $A/M_i \in l_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}$. Значит, согласно уже доказанному $A/M_i \in l_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}_1$. Следовательно, $A \in \mathfrak{H}$. $\square$

Для произвольной совокупности $n$-кратно $\omega$-локальных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee_n^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_n^\omega \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\Big),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H} = l_n^\omega \operatorname{form}(\mathfrak{M} \bigcup \mathfrak{H}).$$

Функция $f : \omega \bigcup \{\omega'\} \to$ {формации групп} называется $l_n^\omega$-значной, если все ее значения принадлежат решетке $l_n^\omega$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность $l_n^\omega$-значных функций вида

$$f_i : \omega \bigcup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee_n^\omega(f_i \mid i \in I)$ обозначим такую функцию $f$, что $f(\omega') = l_n^\omega \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega'))$, в частности, $(f_1 \vee_n^\omega f_2)(\omega') = l_n^\omega \operatorname{form}(f_1(\omega') \bigcup f_2(\omega'))$ и $f(p) = l_n^\omega \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(p))$, в частности, $(f_1 \vee_n^\omega f_2)(p) = l_n^\omega \operatorname{form}(f_1(p) \bigcup f_2(p))$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагаем $f(p) = \varnothing$.

Из леммы 5 из [1] следует

**Лемма 3.** *Пусть* $f_i$ *— минимальный* $l^{\omega}_{n-1}$*-значный* $\omega$*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. *Тогда* $\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)$ *— минимальный* $l^{\omega}_{n-1}$*-значный* $\omega$*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F} = \vee^{\omega}_{n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ и $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$, то $f$ называется внутренним спутником формации $\mathfrak{F}$.

**Лемма 4.** *Для произвольного набора* $\{\mathfrak{F}_i = LF_{\omega}(f_i) \mid i \in I\}$ $\omega$*-локальных формаций* $\mathfrak{F}_i$, *где* $f_i$ *— некоторый внутренний* $l^{\omega}_{n-1}$*-значный спутник* $\mathfrak{F}_i$, *справедливо равенство*

$$\vee^{\omega}_{n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_{\omega}(\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)).$$

**Доказательство.** Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $n$-кратно $\omega$-локальных формаций и $f_i$ — некоторый внутренний $l^{\omega}_{n-1}$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Пусть $\mathfrak{F} = \vee^{\omega}_{n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, $\mathfrak{M} = LF_{\omega}(\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I))$ и $h_i$ — минимальный $l^{\omega}_{n-1}$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Тогда ввиду леммы 3 $h = \vee^{\omega}_{n-1}(h_i \mid i \in I)$ — минимальный $l^{\omega}_{n-1}$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ и, очевидно, $h \leq f = \vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I)$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Предположим, что обратное включение неверно. Пусть $G$ — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Обозначим через $R$ монолит группы $G$. Тогда $R = G^{\mathfrak{F}}$. Пусть $p \in \pi(R) \bigcap \omega$.

Предположим, что $R$ — неабелева группа. Тогда $\mathrm{F}_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/\mathrm{F}_p(G) \in (\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I))(p) = l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(p)\Big).$$

Значит, согласно лемме 1

$$G \in \bigcup_{i \in I} f_i(p) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $R$ — $p$-группа. Тогда $\mathrm{O}_p(G) = \mathrm{F}_p(G)$. Но $G \in \mathfrak{M} = LF_{\omega}(\vee^{\omega}_{n-1}(f_i \mid i \in I))$. Значит, $G/\mathrm{O}_p(G) \in l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(p))$. Так как при этом $\mathrm{O}_p(G/\mathrm{O}_p(G)) = 1$, то по лемме 2 и лемме 5 из [1]

$$G/\mathrm{O}_p(G) \in l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}(A/\mathrm{O}_p(A) \mid A \in \bigcup_{i \in I} f_i(p)) =$$
$$= l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}(A/\mathrm{O}_p(A) \mid A \in f_i(p))\Big) =$$
$$= l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} h_i(p)\Big) = (\vee^{\omega}_{n-1}(h_i \mid i \in I))(p) = h(p).$$

Значит, согласно лемме 4 из [1] $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\omega \bigcap \pi(R) = \varnothing$ и поэтому $G_{\omega d} = 1$. Снова применяя лемму 2 и лемму 5 из [1], имеем

$$G \simeq G/G_{\omega d} \in l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}(A/A_{\omega d} \mid A \in \bigcup_{i \in I} f_i(\omega')) =$$
$$= l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}(A/A_{\omega d} \mid A \in f_i(\omega'))\Big) =$$
$$= l^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} h_i(\omega')\Big) = (\vee^{\omega}_{n-1}(h_i \mid i \in I))(\omega') = h(\omega').$$

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. $\square$

Напомним [7], что совокупность формаций $\Theta$ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из $\Theta$ снова принадлежит $\Theta$ и в $\Theta$ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой другой формации $\mathfrak{M}$ из $\Theta$. Формации, принадлежащие $\Theta$, называются $\Theta$-формациями. В дальнейшем $\Theta$ обозначает некоторую полную решетку формаций и если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{H}$ — нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в $\Theta$. Символом $\mathfrak{M} \vee_{\Theta} \mathfrak{H}$ обозначается ([7], с. 151) верхняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в $\Theta$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций $\theta$ назовем $\mathfrak{X}$-*отделимой*, если для любого терма $\omega(x_1,\dots,x_m)$ сигнатуры $\{\bigcap,\vee_\theta\}$, любых $\theta$-формаций $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m$ и любой группы $A\in\mathfrak{X}\bigcap\omega(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1\in\mathfrak{F}_1,\dots,A_m\in\mathfrak{F}_m$, что $A\in\omega(\theta\operatorname{form}A_1,\dots,\theta\operatorname{form}A_m)$.

**Лемма 5.** *Решетка $l_n^\omega$ $\mathfrak{G}$-отделима.*

**Доказательство.** Пусть $\omega(x_1,\dots,x_m)$ — терм сигнатуры $\{\bigcap,\vee_n^\omega\}$, $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m$ — произвольные формации из $l_n^\omega$ и $A\in\omega(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m)$. Индукцией по числу $r$ вхождений символов из $\{\bigcap,\vee_n^\omega\}$ в терм $\omega$ покажем, что найдутся такие группы $A_i\in\mathfrak{F}_i$, $i=1,\dots,m$, что $A\in\omega(\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_m)$, где $\mathfrak{M}_i=l_n^\omega\operatorname{form}A_i$. При $r=0$ это очевидно. Индукцией по $n$ докажем, что данное утверждение верно при $r=1$. Пусть $n=0$, т. е. либо $A\in\mathfrak{F}_1\bigcap\mathfrak{F}_2$, либо

$$A\in\mathfrak{F}_1\vee_0^\omega\mathfrak{F}_2=l_0^\omega\operatorname{form}(\mathfrak{F}_1\bigcup\mathfrak{F}_2)=\operatorname{form}(\mathfrak{F}_1\bigcup\mathfrak{F}_2).$$

В первом случае $A\in\operatorname{form}A\bigcap\operatorname{form}A$. Во втором случае по лемме 1.2.22 из [7] $A\simeq H/N$, где

$$H\in\mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_1\bigcup\mathfrak{F}_2).$$

Понятно, что $H^{\mathfrak{F}_1}\bigcap H^{\mathfrak{F}_2}=1$. Значит,

$$A\in\operatorname{form}\{H/H^{\mathfrak{F}_1},H/H^{\mathfrak{F}_2}\}=\operatorname{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1})\vee\operatorname{form}(H/H^{\mathfrak{F}_2})\subseteq\mathfrak{F}_1\vee_0^\omega\mathfrak{F}_2.$$

Пусть $n>0$, $\{p_1,\dots,p_t\}=\pi(A)$ и $A\in\mathfrak{F}_1\vee_n^\omega\mathfrak{F}_2$. Тогда ввиду теоремы 1.3.13 из [7] и леммы 3

$$A/\mathrm{F}_{p_i}(A)\in f_1(p_i)\vee_{n-1}^\omega f_2(p_i),\quad A/A_{\omega d}\in f_1(\omega')\vee_{n-1}^\omega f_2(\omega'),$$

где $f_j$ — минимальный $l_{n-1}^\omega$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_j$, $j=1,2$. По индукции найдутся такие группы $A_{i_1}\in f_1(p_i)$, $A_{i_2}\in f_2(p_i)$, $T_1\in f_1(\omega')$, $T_2\in f_2(\omega')$, что

$$A/\mathrm{F}_{p_i}(A)\in(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}A_{i_1})\vee_{n-1}^\omega(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}A_{i_2}),$$
$$A/A_{\omega d}\in(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}T_1)\vee_{n-1}^\omega(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}T_2).$$

Ясно, что

$$(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}A_{i_1})\vee_{n-1}^\omega(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}A_{i_2})=l_{n-1}^\omega\operatorname{form}\{A_{i_1},A_{i_2}\},$$
$$(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}T_1)\vee_{n-1}^\omega(l_{n-1}^\omega\operatorname{form}T_2)=l_{n-1}^\omega\operatorname{form}\{T_1,T_2\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — полуформация, порожденная группой $A_{i_1}$, $\mathfrak{M}_2$ — полуформация, порожденная группой $A_{i_2}$. Понятно, что $\mathfrak{M}_1\bigcup\mathfrak{M}_2$ — полуформация и

$$A/\mathrm{F}_{p_i}(A)\in l_{n-1}^\omega\operatorname{form}\{A_{i_1},A_{i_2}\}=l_{n-1}^\omega\operatorname{form}(\mathfrak{M}_1\bigcup\mathfrak{M}_2).$$

Значит, ввиду леммы 2 можно считать, что

$$|O_{p_i}(A_k)|=1=|O_{p_i}(B_l)|$$

для всех $k=1,\dots,t$ и $l=1,\dots,r$.

Применяя лемму 2 и аналогичные соображения, можем считать, что $(T_i)_{\omega d}=1$, $i=1,2$.

Пусть $D_{i_1}=A_1\times\dots\times A_t$ и $D_{i_2}=B_1\times\dots\times B_r$. Тогда

$$|O_{p_i}(D_{i_1})|=1=|O_{p_i}(D_{i_2})|.$$

Кроме того, понятно, что

$$A/\mathrm{F}_{p_i}(A)\in l_{n-1}^\omega\operatorname{form}(D_{i_1},D_{i_2})\subseteq l_{n-1}^\omega\operatorname{form}\{A_{i_1},A_{i_2}\}.$$

Пусть $Z_i$ — группа порядка $p_i$, $B_{i_1}=Z_i\wr D_{i_1}$, $B_{i_2}=Z_i\wr D_{i_2}$. Ввиду леммы 4 из [1] $B_{i_1}\in\mathfrak{F}_1$, $B_{i_2}\in\mathfrak{F}_2$. Значит,

$$A_1=B_{1_1}\times B_{2_1}\times\dots\times B_{t_1}\times T_1\in\mathfrak{F}_1,\quad A_2=B_{1_2}\times B_{2_2}\times\dots\times B_{t_2}\times T_2\in\mathfrak{F}_2.$$

Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = (l_n^\omega \operatorname{form} A_1) \vee_n^\omega (l_n^\omega \operatorname{form} A_2).$$

Для этого достаточно установить, что $A/A_{\omega d} \in f(\omega')$ и $A/\mathrm{F}_{p_i}(A) \in f(p_i)$, где $f$ — минимальный $l_{n-1}^\omega$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Понятно, что $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Значит, $B_{i_1}/\mathrm{F}_{p_i}(B_{i_1}) \in f(p_i)$. Но, поскольку $\mathrm{O}_{p_i}(D_{i_1}) = 1$, то $B_{i_1}/\mathrm{F}_{p_i}(B_{i_1}) \simeq D_{i_1}$, т.е. $D_{i_1} \in f(p_i)$. Аналогично убеждаемся, что $D_{i_2} \in f(p_i)$. Следовательно,

$$A/\mathrm{F}_{p_i}(A) \in l_{n-1}^\omega \operatorname{form}\{D_{i_1}, D_{i_2}\} \subseteq f(p_i).$$

Понятно, что $T_1, T_2 \in \mathfrak{F}$. Значит, по лемме 5 из [1]

$$T_i \simeq T_i/(T_i)_{\omega d} \in f(\omega') = l_{n-1}^\omega \operatorname{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{F}) = f(\omega').$$

Следовательно, $l_{n-1}^\omega \operatorname{form}\{T_1, T_2\} \subseteq f(\omega')$. Поэтому $A/A_{\omega d} \in f(\omega')$. Этим самым доказано утверждение леммы при $r = 1$.

Пусть теперь терм $\omega$ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\bigcap, \vee_n^\omega\}$ и для термов с меньшим числом вхождений лемма верна. Пусть $\omega$ имеет вид

$$\omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \triangle \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\bigcap, \vee_n^\omega\}$, и

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \bigcup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ формацию $\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через $\mathfrak{H}_2$ — формацию $\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что $A \in l_n^\omega \operatorname{form} A_1 \triangle l_n^\omega \operatorname{form} A_2$. С другой стороны, согласно индуктивному предположению найдутся такие группы $B_1, \dots, B_a, C_1, \dots, C_b$, что

$$B_k \in \mathfrak{F}_{i_k}, C_k \in \mathfrak{F}_{j_k}, A_1 \in \omega_1(l_n^\omega \operatorname{form} B_1, \dots, l_n^\omega \operatorname{form} B_n), A_2 \in \omega_2(l_n^\omega \operatorname{form} C_1, \dots, l_n^\omega \operatorname{form} C_b).$$

Пусть переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ не входят в слово $\omega_2$, а все переменные $x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}$ в это слово входят. Пусть $D_{i_k} = B_k$, если $k < t+1$, $D_{i_k} = B_k \times C_q$, где $q$ такое, что $x_{i_k} = x_{j_q}$ при всех $k \geq t+1$. Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_p$ формацию $l_n^\omega \operatorname{form} D_{i_p}$, а через $\mathfrak{X}_c$ — формацию

$$l_n^\omega \operatorname{form} D_{j_c}, \quad p = 1, \dots, a; \quad c = 1, \dots, b.$$

Тогда ясно, что

$$A_1 \in \omega_1(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_a), \quad A_2 \in \omega_2(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_b).$$

Значит, найдутся такие формации $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_m$, что

$$A \in \omega_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \dots, \mathfrak{H}_{i_a}) \triangle \omega_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \dots, \mathfrak{H}_{j_b}) = \omega(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_m),$$

где $\mathfrak{H}_i = l_n^\omega \operatorname{form} K_i$, $K_i \in \mathfrak{F}_i$. Итак, мы доказали, что решетка $l_n^\omega$ $\mathfrak{G}$-отделима. □

Для всякого терма $\omega$ сигнатуры $\{\bigcap, \vee_n^\omega\}$ через $\overline{\omega}$ обозначим терм сигнатуры $\{\bigcap, \vee_{n-1}^\omega\}$, получаемый из терма $\omega$, заменой каждого вхождения символа $\vee_n^\omega$ на символ $\vee_{n-1}^\omega$.

**Лемма 6.** *Пусть $\omega(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\bigcap, \vee_n^\omega\}$, $f_i$ — внутренний $l_{n-1}^\omega$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда*

$$\omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = LF_\omega(\overline{\omega}(f_1, \dots, f_m)).$$

**Доказательство.** Проведем индукцию по числу $r$ вхождений в терм $\omega$ символов из $\{\bigcap, \vee_n^\omega\}$. Пусть

$$\omega(x_1, \dots, x_m) = \omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \triangle \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\bigcap, \vee_n^\omega\}$,

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \bigcup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$$

и лемма для термов $\omega_1$, $\omega_2$ выполняется. Тогда

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a}) = LF_\omega(\overline{\omega}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})),$$
$$\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}) = LF_\omega(\overline{\omega}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})).$$

Понятно, что оба спутника $\overline{\omega}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})$ и $\overline{\omega}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})$ внутренние. Значит,

$$\omega(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m) = \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a}) \triangle\, \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}) =$$
$$= LF_\omega(\overline{\omega}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})\overline{\triangle}\,\overline{\omega}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})) = LF_\omega(\overline{\omega}(f_1,\dots,f_m)),$$

где $\overline{\triangle} = \bigcap$, если $\triangle = \bigcap$ и $\overline{\triangle} = \vee^\omega_{n-1}$, если $\triangle = \vee^\omega_n$. $\square$

**Лемма 7.** *Пусть $\theta$ — $\mathfrak{X}$-отделимая полная решетка формаций, $M$ — такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией $\mathfrak{F}$ содержит и все ее однопорожденные $\theta$-подформации вида $\theta\operatorname{form} A$, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда тождество $\omega_1 = \omega_2$ сигнатуры $\{\bigcap, \vee_\theta\}$ истинно в $M$, если оно выполняется для всех однопорожденных $\theta$-формаций из $M$.*

**Доказательство.** Пусть $x_{i_1},\dots,x_{i_a}$ — переменные, входящие в терм $\omega_1$, $x_{j_1},\dots,x_{j_b}$ — переменные, входящие в терм $\omega_2$, и пусть $\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a},\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b} \in M$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq \mathfrak{M} = \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}).$$

Не теряя общности, можем считать, что

$$x_{j_1},\dots,x_{j_t} \in \{x_{i_1},\dots,x_{i_a}\},$$

но

$$\{x_{j_{t+1}},\dots,x_{j_b}\} \bigcap \{x_{i_1},\dots,x_{i_a}\} = \varnothing.$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_{i_1},\dots,A_{i_a}$, что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ и

$$A \in \omega_1(\theta\operatorname{form} A_{i_1},\dots,\theta\operatorname{form} A_{i_a}).$$

Пусть

$$\mathfrak{H}_{i_k} = \theta\operatorname{form} A_{i_k}, \quad \mathfrak{H}_{j_k} = \mathfrak{H}_{i_c},$$

если $x_{j_k} = x_{i_c}$, и пусть для каждого $k > t$ $\mathfrak{H}_{j_k} = \theta\operatorname{form} B_{j_k}$, где $B_{j_k}$ — некоторая группа из $\mathfrak{F}_{j_k}$. По условию

$$\omega_1(\mathfrak{H}_{i_1},\dots,\mathfrak{H}_{i_a}) = \omega_2(\mathfrak{H}_{j_1},\dots,\mathfrak{H}_{j_b}).$$

Но $\omega_2(\mathfrak{H}_{j_1},\dots,\mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. $\square$

**Доказательство теоремы.** Докажем 1). Зафиксируем некоторое тождество

$$\omega_1(x_{i_1},\dots,x_{i_a}) = \omega_2(x_{j_1},\dots,x_{j_b}) \tag{2}$$

сигнатуры $\{\bigcap, \vee^\omega_n\}$. И пусть

$$\overline{\omega}_1(x_{i_1},\dots,x_{i_a}) = \overline{\omega}_2(x_{j_1},\dots,x_{j_b}) \tag{3}$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\bigcap, \vee^\omega_{n-1}\}$.

Предположим, что тождество (3) выполняется в решетке $l^\omega_{n-1}$. Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a},\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}$$

— произвольные $n$-кратно $\omega$-локальные формации, $f_{i_c}$ — минимальный $l^\omega_{n-1}$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_{i_c}$, $f_{j_d}$ — минимальный $l^\omega_{n-1}$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_{j_d}$. По лемме 6

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a}) = LF_\omega(\overline{\omega}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})),$$
$$\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}) = LF_\omega(\overline{\omega}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})).$$

Для произвольного простого числа $p \in \omega$ формации

$$f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p), f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)$$

принадлежат решетке $l_{n-1}^{\omega}$. Значит,

$$\overline{\omega}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})(p) = \overline{\omega}_1(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)) = \overline{\omega}_2(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)) = \overline{\omega}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})(p).$$

Аналогично,

$$\overline{\omega}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})(\omega') = \overline{\omega}_1(f_{i_1}(\omega'), \ldots, f_{i_a}(\omega')) = \overline{\omega}_2(f_{j_1}(\omega'), \ldots, f_{j_b}(\omega')) = \overline{\omega}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})(\omega').$$

Следовательно,

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_a}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_k}) = \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Таким образом, тождество (2) выполняется в решетке $l_n^{\omega}$. Отсюда вытекает утверждение 1).

Докажем 2). Предположим, что тождество (2) выполняется в решетке $l_n^{\omega}$. Покажем, что тождество (3) выполняется в решетке $l_{n-1}^{\omega}$. Для этого ввиду леммы 6 достаточно установить, что если

$$\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}$$

— произвольные однопорожденные $(n-1)$-кратно $\omega$-локальные формации, то

$$\overline{\omega}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \overline{\omega}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_c} = l_{n-1}^{\omega} \operatorname{form} A_{i_c}, \quad \mathfrak{F}_{j_d} = l_{n-1}^{\omega} \operatorname{form} A_{j_d}, \quad c = 1, \ldots, a; \quad d = 1, \ldots, b.$$

Выберем такое простое число $p \in \omega$, что $p \notin \pi(A_{i_1}, \ldots, A_{i_a}, A_{j_1}, \ldots, A_{j_b})$, и пусть $B_{i_c} = P \wr A_{i_c}$, $B_{j_d} = P \wr A_{j_d}$ — сплетения, где $P$ — группа порядка $p$. Формации

$$\mathfrak{M}_{i_1} = l_n^{\omega} \operatorname{form} B_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a} = l_n^{\omega} \operatorname{form} B_{i_a},$$
$$\mathfrak{M}_{j_1} = l_n^{\omega} \operatorname{form} B_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b} = l_n^{\omega} \operatorname{form} B_{j_b}$$

принадлежат решетке $l_n^{\omega}$. Значит,

$$\mathfrak{F} = \omega_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a}) = \mathfrak{M} = \omega_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b}).$$

Пусть $f_{i_c}$ — минимальный $l_{n-1}^{\omega}$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{M}_{i_c}$, а $f_{j_d}$ — минимальный $l_{n-1}^{\omega}$-значный $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{M}_{j_d}$. Тогда ввиду леммы 6

$$\omega_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_a}) = LF_{\omega}(\overline{\omega}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})),$$
$$\omega_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_b}) = LF_{\omega}(\overline{\omega}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})).$$

Пусть $f$ и $m$ — минимальные $l_{n-1}^{\omega}$-значные $\omega$-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Нетрудно убедиться, что

$$\overline{\omega}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})(p) = f(p)$$

и

$$\overline{\omega}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})(p) = m(p).$$

Значит,

$$\overline{\omega}_1(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)) = \overline{\omega}_2(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)).$$

Но ввиду леммы 5 из [1]

$$f_{i_c}(p) = \mathfrak{F}_{i_c}, \quad f_{j_d}(p) = \mathfrak{F}_{j_d}, \quad c = 1, \ldots, a; \quad d = 1, \ldots, b.$$

Следовательно,

$$\overline{\omega}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \overline{\omega}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}),$$

т. е. тождество (3) истинно в решетке $l_{n-1}^{\omega}$. Таким образом, каждое тождество решетки $l_n^{\omega}$ выполняется в решетке всех формаций $l_0^{\omega}$. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что каждое тождество решетки $c_m^\omega$ выполняется в решетке всех формаций $c_0^\omega$. Применяя теперь 1), получаем 2). $\square$

## Литература


1. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп* // Матем. тр. – 1999. – Т. 2. – № 1. – С. 1–34.
2. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* – Walter de Gruyter: Berlin, New York, 1992. – 889 p.
3. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Частично композиционные формации конечных групп* // Докл. АН Беларуси. – 1999. – Т. 43. – № 4. – С. 5–8.
4. Скиба А.Н. *Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины* // Вопр. алгебры. – Минск, 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.
5. Скиба А.Н. *О локальных формациях длины* 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск, 1986. – С. 135–149.
6. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем.* – М.: Наука, 1989. – 254 с.
7. Скиба А.Н. *Алгебра формаций.* – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
8. Ballester-Bolinches A., Shemetkov L.A. *On lattices of p-local formations of finite groups* // Math. Nachr. – 1997. – V. 186. – P. 57–65.



*Сюйчжоуский университет*
(*Китайская народная республика*)

*Гомельский государственный*
*университет* (*Беларусь*)



*Поступила*
25.08.2000