Алгебра и логика, 54, № 3 (2015), 351—380

DOI: 10.17377/alglog.2015.54.304 УДК 512.54+512.57

О $\mathfrak{F}_\tau$-ВЛОЖЕННЫХ И $\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$-ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП*)

С. ЧЕН, В. ГО, А. Н. СКИБА

§ 1. Вспомогательные сведения

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Символ G обозначает конечную группу, p — простое число, $|G|$ — порядок G, и $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$. Мы используем символы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ для обозначения классов всех нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно, а символы $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{U}_p$ для обозначения классов всех p-нильпотентных и p-сверхразрешимых групп соответственно.

Функция τ, которая каждой группе G ставит в соответствие множество подгрупп $\tau(G)$ из G, называется *подгрупповым функтором*, если $1 \in \tau(G)$ и $\theta(\tau(G)) = \tau(\theta(G))$ для всякого изоморфизма $\theta : G \to G^*$. Если $H \in \tau(G)$, то говорят, что H является *τ-подгруппой* в G.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной* (*разрешимо насыщенной*), если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ для разрешимой нормальной подгруппы N из G). Формация $\mathfrak{F}$ называется *на-*

*)Работа первого и второго из авторов выполнена при финансовой поддержке NNSF-гранта Китая (грант #11371335) and Wu Wen-Tsun Key математической лаборатории Академии наук Китая, третьего — Chinese Academy of Sciences Visiting Professorship for Senior International Scientists (грант 2010T2J12) и Государственной программы фундаментальных исследований республики Беларусь (грант 0112850).

следственной (*нормально наследственной*), если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $H \leq G \in \mathfrak{F}$ ($H \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$). Главный фактор L/K из G называется $\mathfrak{F}$-*центральным* ($\mathfrak{F}$-*эксцентральным*) в G, если $(L/K) \rtimes (G/C_G(L/K)) \in \mathfrak{F}$ ($(L/K) \rtimes (G/C_G(L/K)) \notin \mathfrak{F}$). Главный фактор L/K из G называется *фраттиньевым* (*нефраттиньевым*) в G, если $L/K \leq \Phi(G/K)$ ($L/K \nleq \Phi(G/K)$). Нормальная подгруппа N из G называется $\mathfrak{F}$-*гиперцентральной* ($\mathfrak{F}\Phi$-*гиперцентральной*) в G, если либо $N = 1$, либо каждый главный фактор (каждый нефраттиньев главный фактор) из G ниже N является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Символы $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ и $Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ обозначают $\mathfrak{F}$-*гиперцентр* и $\mathfrak{F}\Phi$-*гиперцентр* группы G соответственно, т. е. произведение всех $\mathfrak{F}$-гиперцентральных и $\mathfrak{F}\Phi$-гиперцентральных соответственно нормальных подгрупп из G.

Напомним, что подгруппа H из G называется *квазинормальной* (или *перестановочной*) в G, если H перестановочна со всеми подгруппами из G. Подгруппа H из G называется S-*квазинормальной* (или S-*перестановочной*) в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. Основные свойства квазинормальных и S-квазинормальных подгрупп приведены в [1, разд. 1.2]. Подгруппа H из G называется S-*квазинормально вложенной* [2] в G, если каждая силовская подгруппа из H является силовской подгруппой в некоторой S-квазинормальной подгруппе из G.

В последние 20 лет в работах многих авторов исследовалось влияние различных условий вложения для подгрупп на строение группы. Напомним, напр., что подгруппа H группы G называется: *c-нормальной* [3] в G, если для некоторой нормальной подгруппы T из G и некоторой S-квазинормальной подгруппы S из G, содержащейся в H, $HT = G$ и $H \cap T \leq S$; *n-вложенной* [4] в G, если для некоторой нормальной подгруппы T из G и некоторой S-квазинормальной подгруппы S из G, содержащейся в H, подгруппа HT нормальна в G и $H \cap T \leq S$; S-*вложенной* [5] в G, если для некоторой нормальной подгруппы T из G и некоторой S-квазинормальной подгруппы S из G, содержащейся в H, подгруппа HT S-квазинормальна в G и $H \cap T \leq S$; *sn-вложенной* [6] в G, если для некоторой нормальной подгруппы T из G и некоторой S-квазинормально вложенной подгруппы S из G, содержащейся в H, подгруппа HT является S-квазинормальной в G и $H \cap T \leq S$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H из G называется: $\mathfrak{F}_s$-*квазинормальной* [7] в G, если для некоторой нормальной подгруппы T из G подгруппа HT является S-квазинормальной в G и $(H \cap \cap T)H_G/H_G \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/H_G)$; $\mathfrak{F}$-*квазинормальной* [8] в G, если для некоторой квазинормальной подгруппы T из G подгруппа HT квазинормальна в G и $(H \cap T)H_G/H_G \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/H_G)$.

Во всех этих и ряде других понятий и условий наблюдается некоторое сходство, что делает вполне естественной задачу нахождения общих закономерностей. Одно из решений этой задачи мы даём на основе следующих понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, τ — подгрупповой функтор и H — p-подгруппа из G. Предположим также, что $\bar{G} = G/H_G$ и $\bar{H} = H/H_G$. Говорим, что H является $\mathfrak{F}_\tau$-*вложенной* ($\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$-*вложенной*) в G, если для некоторой квазинормальной подгруппы $\bar{T}$ из $\bar{G}$ и некоторой τ-подгруппы $\bar{S}$ из $\bar{G}$, содержащейся в $\bar{H}$, подгруппа $\bar{H}\bar{T}$ является S-квазинормальной в $\bar{G}$ и $\bar{H} \cap \bar{T} \leq \bar{S}Z_{\mathfrak{F}}(\bar{G})$ ($\bar{H} \cap \bar{T} \leq \bar{S}Z_{\mathfrak{F}\Phi}(\bar{G})$).

Определим подгрупповые функторы, которые нам потребуются далее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть τ — подгрупповой функтор. Говорим, что τ является

(1) *индуктивным*, если для всякой группы G из того, что $H \in \tau(G)$ — p-группа и $N \trianglelefteq G$, следует, что $HN/N \in \tau(G/N)$;

(2) *наследственным*, если для всякой группы G из того, что $H \in \in \tau(G)$ — p-группа и $H \leq E \leq G$, следует, что $H \in \tau(E)$;

(3) *регулярным* (*квазирегулярным*), если для всякой группы G из того, что $H \in \tau(G)$ — p-группа, а N — минимальная нормальная подгруппа (минимальная абелева нормальная подгруппа соответственно) из G, следует, что $|G : N_G(H \cap N)|$ — степень числа p;

(4) Φ-*регулярным* (Φ-*квазирегулярным*), если для всякой примитивной группы G из того, что $H \in \tau(G)$ — p-группа и N — минимальная нормальная подгруппа (минимальная абелева нормальная подгруппа соответственно) из G, следует, что $|G : N_G(H \cap N)|$ — степень числа p.

Понятно, что каждая $\mathfrak{F}_\tau$-вложенная p-подгруппа из G является $\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$-вложенной в G.

Сформулируем основные результаты данной работы.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, τ — регулярный индуктивный подгрупповой функтор, и E — такая нормальная подгруппа из G, что $G/E \in \mathfrak{F}$ и либо $X = E$, либо $X = F^*(E)$. Предположим, что для всякой нециклической силовской подгруппы P из X каждая максимальная подгруппа H из P является $\mathfrak{U}_\tau$-вложенной в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, τ — Φ-регулярный индуктивный подгрупповой функтор, и E — такая нормальная подгруппа из G, что $G/E \in \mathfrak{F}$ и либо $X = E$, либо $X = F(E)$ (в случае, когда E разрешима). Предположим, что для всякой нециклической силовской подгруппы P из X каждая максимальная подгруппа H из P является $\mathfrak{U}_{\tau\Phi}$-вложенной в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, τ — Φ-регулярный наследственный индуктивный подгрупповой функтор, и E — такая нормальная подгруппа из G, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что для всякой нециклической силовской подгруппы P из $F^*(E)$ каждая максимальная подгруппа H из P является $\mathfrak{U}_\tau$-вложенной в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

ТЕОРЕМА 1.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, τ — либо квазирегулярный наследственный индуктивный подгрупповой функтор, либо регулярный индуктивный подгрупповой функтор, и E — такая нормальная подгруппа из G, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что для всякой нециклической силов-*

ской подгруппы P из $F^*(E)$ каждая циклическая подгруппа порядка p или 4 (в случае, когда P не является кватернионно свободной группой) из P является $\mathfrak{U}_\tau$-вложенной в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, τ — Φ-квазирегулярный наследственный индуктивный подгрупповой функтор, и E — такая нормальная подгруппа из G, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что для всякой нециклической силовской подгруппы P из E каждая циклическая подгруппа порядка p или 4 (в случае, когда P не является кватернионно свободной группой) из P является $\mathfrak{U}_\tau$-вложенной в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Вся используемая нами терминология стандартна, см. [9–11].

§ 2. Основные свойства

ЛЕММА 2.1. (1) *Если H — квазинормальная подгруппа из G, то $H^G/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$,* [12, теор.].

(2) *Множество S-квазинормальных подгрупп из G образует подрешётку решётки субнормальных подгрупп из G,* [13, теор. 2].

(3) *Пусть H — p-подгруппа из G. Она является S-квазинормальной в G тогда и только тогда, когда $O^p(G) \leq N_G(H)$,* [14, лемма A].

ЛЕММА 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация.*

(1) *Если $N \trianglelefteq G$, то $Z_\mathfrak{F}(G)N/N \leq Z_\mathfrak{F}(G/N)$,* [15, лемма 2.2(i)].

(2) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $E \leq G$, то $Z_\mathfrak{F}(G) \cap E \leq Z_\mathfrak{F}(E)$,* [16, лемма 2.1(2)].

(3) *Каждый нефраттиньев главный фактор из G ниже $Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ является $\mathfrak{F}$-центральным в G,* [17, лемма 2.3(1)].

(4) *$Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)/\Phi(G) = Z_\mathfrak{F}(G/\Phi(G))$,* [18, теор. B].

(5) *Если $N \trianglelefteq G$, то $Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)N/N \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/N)$* [17, лемма 2.3(2)].

(6) *Если формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной и $E \trianglelefteq G$, причём $G/E \in \mathfrak{F}$ и $E \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$,* [17, предлож. 5.2(1)].

(7) *Если* $\mathfrak{F}$ *— нормально наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и* $E \trianglelefteq G$*, причём* $E/E \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G) \in \mathfrak{F}$*, то* $E \in \mathfrak{F}$*. В частности, если* $E \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$*, то* $E \in \mathfrak{F}$*,* [18, теор. C(ii)].

ЛЕММА 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая формация,* τ *— индуктивный подгрупповой функтор. Предположим, что* p*-подгруппа* H *из* G *является* $\mathfrak{F}_\tau$*-вложенной в* G*.*

(1) *Если* $N \trianglelefteq G$ *и либо* $N \leq H$*, либо* $(p, |N|) = 1$*, то* HN/N *является* $\mathfrak{F}_\tau$*-вложенной в* G/N*.*

(2) *Если* $\mathfrak{F}$ *— наследственная насыщенная формация,* τ *— наследственный функтор и* $H \leq E \leq G$*, то* H *является* $\mathfrak{F}_\tau$*-вложенной в* E*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{G} = G/H_G$ и $\bar{H} = H/H_G$. Поскольку H является $\mathfrak{F}_\tau$-вложенной в G, то $\bar{G}$ содержит квазинормальную подгруппу $\bar{T}$ и τ-подгруппу $\bar{S}$, содержащуюся в $\bar{H}$, такие что $\bar{H}\bar{T}$ S-квазинормальна в $\bar{G}$ и $\bar{H} \cap \bar{T} \leq \bar{S}\bar{Z}$, где $\bar{Z} = Z_{\mathfrak{F}}(\bar{G})$. Пусть $\bar{S} = S/H_G$, $\bar{T} = T/H_G$ и $\bar{Z} = Z/H_G$.

(1) Пусть $\widehat{G} = G/(HN)_G$, $\widehat{HN} = HN/(HN)_G$, $\widehat{T} = T(HN)_G/(HN)_G$, $\widehat{S} = S(HN)_G/(HN)_G$ и $\widehat{Z} = Z(HN)_G/(HN)_G$. Тогда $\widehat{S} \in \tau(\widehat{G})$ ввиду индуктивности τ, и $\widehat{Z} \leq Z_{\mathfrak{F}}(\widehat{G})$ в силу леммы 2.2(1). Очевидно, что $\widehat{T}$ квазинормальна в $\widehat{G}$ и $\widehat{HN}\widehat{T}$ является S-квазинормальной в $\widehat{G}$. Достаточно показать, что $\widehat{HN} \cap \widehat{T} \leq \widehat{S}\widehat{Z}$. Так как либо $N \leq H$, либо $(p, |N|) = 1$, то $HN \cap T = (H \cap T)(N \cap T)$. Следовательно, $\widehat{HN} \cap \widehat{T} = (H \cap T)(HN)_G/(HN)_G \leq \widehat{S}\widehat{Z}$, и поэтому HN/N является $\mathfrak{F}_\tau$-вложенной в G/N.

(2) Очевидно, что $H_G \leq H_E$. Пусть $\widetilde{E} = E/H_E$, $\widetilde{H} = H/H_E$, $\widetilde{T} = TH_E/H_E$, $\widetilde{S} = SH_E/H_E$ и $\widetilde{Z} = ZH_E/H_E$. Тогда $\widetilde{S} \in \tau(\widetilde{E})$ ввиду индуктивности и наследственности τ, и $\widetilde{Z} \cap \widetilde{E} = (Z \cap E)H_E/H_E \leq Z_{\mathfrak{F}}(\widetilde{E})$ в силу лемм 2.1(1) и 2.1(2). Легко показать, что $\widetilde{T}$ квазинормальна в $\widetilde{E}$, $\widetilde{H}\widetilde{T}$ является S-квазинормальной в $\widetilde{E}$ и $\widetilde{H} \cap \widetilde{T} \leq \widetilde{S}(\widetilde{Z} \cap \widetilde{E}) \leq \widetilde{S}Z_{\mathfrak{F}}(\widetilde{E})$. Следовательно, H является $\mathfrak{F}_\tau$-вложенной в E.

ЛЕММА 2.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая формация,* τ *— индуктивный подгрупповой функтор. Предположим, что* p*-подгруппа* H *из* G *является* $\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$*-вложенной в* G*. Если* $N \trianglelefteq G$ *и либо* $N \leq H$*, либо* $(p, |N|) = 1$*, то* HN/N *является* $\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$*-вложенной в* G/N*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2.3(1), и используя лемму 2.2(5) вместо леммы 2.2(1), получаем требуемое.

Для произвольной формационной функции $f\colon \mathbb{P} \cup \{0\} \to \{$формации групп$\}$ положим $CF(f) = \{G$ — группа $\mid G/C_G(H/K) \in f(0)$ для каждого неабелевого главного фактора H/K из G, и $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для каждого абелевого p-главного фактора H/K из $G\}$. Канонический композиционный спутник разрешимо насыщенной формации $\mathfrak{F}$ — это такая единственным образом определённая формационная функция F, что $\mathfrak{F} = CF(F)$, $\mathfrak{G}_p F(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых чисел p и $F(0) = \mathfrak{F}$, см. [19].

ЛЕММА 2.5 [18, лемма 2.14]**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация, и F — канонический композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть E — нормальная p-подгруппа из G. Соотношение $E \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ выполняется тогда и только тогда, когда $G/C_G(E) \in F(p)$.*

ЛЕММА 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая разрешимо насыщенная формация, и P — нормальная p-подгруппа из G. Если $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(P))$, то $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — канонический композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(P))$. Тогда $G/C_G(P/\Phi(P)) \in F(p)$ по лемме 2.5. С другой стороны, $C_G(P/\Phi(P))/C_G(P)$ — p-группа [20, гл. 5, теор. 1.4]. Следовательно, $G/C_G(P) \in \mathfrak{G}_p F(p) = F(p)$. По лемме 2.5 выполняется $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Следующие две леммы хорошо известны.

ЛЕММА 2.7 [3, лемма 2.8]**.** *Пусть M — максимальная подгруппа из G, и P — такая нормальная p-подгруппа из G, что $G = PM$, где p — простой делитель $|G|$. Тогда $P \cap M \trianglelefteq G$.*

ЛЕММА 2.8. *Пусть p — простой делитель $|G|$, причём $(|G|, p-1) = 1$.*

(1) *Если G имеет циклическую силовскую p-подгруппу, то G является p-нильпотентной.*

(2) *Если E — такая нормальная подгруппа из G, что $p^2 \nmid |E|$ и G/E является p-нильпотентной, то и G будет p-нильпотентной.*

Пусть $F^*(G)$ обозначает обобщённую подгруппу Фиттинга группы G, т. е. наибольшую нормальную квазинильпотентную подгруппу из G. Следующая лемма даёт основные свойства подгруппы $F^*(G)$, см. [21, гл. X].

ЛЕММА 2.9. (1) *Если $N \trianglelefteq G$, то $F^*(N) = N \cap F^*(G)$.*

(2) *Имеет место $F(G) \leq F^*(G) = F^*(F^*(G))$. Если $F^*(G)$ разрешима, то $F^*(G) = F(G)$.*

(3) *Имеют место $F^*(G) = F(G)E(G)$ и $F(G) \cap E(G) = Z(E(G))$, где $E(G)$ — слой G.*

(4) *Имеет место $C_G(F^*(G)) \leq F(G)$.*

(5) *Если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq Z_\infty(G)$, то $F^*(G/N) = F^*(G)/N$.*

ЛЕММА 2.10 [22, теор. B]**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Если $E \trianglelefteq G$ и $F^*(E) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, то $E \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

ЛЕММА 2.11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Если $E \trianglelefteq G$, $F^*(E) \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ и либо E разрешима, либо $E \cap \Phi(G) = 1$, то $E \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если E разрешима, то, ввиду леммы 2.9(2) и [18, теор. A(iii)], $E \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$. Предположим, что $E \cap \Phi(G) = 1$. Поскольку $F^*(E) \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$, то $F^*(E)\Phi(G)/\Phi(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G))$ в силу леммы 2.2(4), и поэтому $F^*(E\Phi(G)/\Phi(G)) = F^*(E)\Phi(G)/\Phi(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G))$. Следовательно, $E\Phi(G)/\Phi(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G))$ по лемме 2.10. Ввиду леммы 2.2(4), $E \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$.

ЛЕММА 2.12 [23, лемма 2.4]**.** *Пусть P — p-группа, α — p'-автоморфизм группы P, централизующий $\Omega_1(P)$. Если P не является неабелевой 2-группой, то $\alpha = 1$. Если $[\alpha, \Omega_2(P)] = 1$, то $\alpha = 1$.*

ЛЕММА 2.13 [24, лемма 2.15]**.** *Если σ — автоморфизм нечётного порядка кватернионно свободной 2-группы P и σ действует тривиально на $\Omega_1(P)$, то $\sigma = 1$.*

Если P — либо p-группа нечётного порядка, либо кватернионно свободная 2-группа, то символ $\Omega(P)$ обозначает подгруппу $\Omega_1(P)$; в противном случае $\Omega(P)$ обозначает $\Omega_2(P)$.

ЛЕММА 2.14. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая разрешимо насыщенная формация, P — нормальная p-подгруппа из G и C — критическая подгруппа Томпсона из P, см.* [20, гл. 5]. *Если $\Omega(C) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, то $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — канонический композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2.5, $G/C_G(\Omega(C)) \in F(p)$. Заметим также, что $C_G(\Omega(C))/C_G(C)$ — p-группа в силу лемм 2.12 и 2.13. Следовательно, $G/C_G(C) \in \mathfrak{G}_pF(p) = F(p)$. С учётом [20, гл. 5, теор. 3.11] получаем, что $C_G(C)/C_G(P)$ — p-группа. Следовательно, $G/C_G(P) \in \mathfrak{G}_pF(p) = F(p)$. По лемме 2.5, $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

ЛЕММА 2.15 [25, лемма 3.1]. *Пусть G — неабелева кватернионно свободная 2-группа. Тогда G содержит характеристическую подгруппу индекса 2.*

ЛЕММА 2.16. *Пусть C — критическая подгруппа Томпсона нетривиальной p-группы P.*

(1) *Если либо $p = 2$ и P — абелева группа, либо p — нечётное число, то экспонента $\Omega_1(C)$ равна p.*

(2) *Если $p = 2$, то экспонентна $\Omega_2(C)$ не превышает 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [26, с. 568].

§ 3. Доказательство основных результатов

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (разрешимо насыщенная формация), содержащая все сверхразрешимые группы, и τ — Φ-квазирегулярный (квазирегулярный) индуктивный подгрупповой функтор. Пусть P — нетривиальная нормальная p-подгруппа из G. Предположим, что каждая максимальная подгруппа из P является $\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$-вложенной ($\mathfrak{F}_\tau$-вложенной) в G. Тогда $P \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть (G, P) — контрпример с минимальным числом $|G| + |P|$. Разобьём доказательство на несколько этапов.

(1) Покажем: G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, содержащуюся в P, $P/N \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/N)$ ($P/N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/N)$) и

$P \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G) = 1$ ($P \cap Z_{\mathfrak{F}}(G) = 1$).

Действительно, пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в P. В случае, когда $N = P$, утверждение (1) справедливо. Предположим, что $N < P$. По леммам 2.3(1) и 2.4 условие теоремы справедливо для $(G/N, P/N)$. Выбор (G, P) влечёт, что $P/N \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/N)$ ($P/N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/N)$). Если $P \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G) > 1$ ($P \cap Z_{\mathfrak{F}}(G) > 1$), то можем считать, что $N \leq P \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($N \leq P \cap Z_{\mathfrak{F}}(G)$). Следовательно, $P \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$), что невозможно. Значит, $P \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G) = 1$ ($P \cap Z_{\mathfrak{F}}(G) = 1$). Предположим, что G содержит минимальную нормальную подгруппу L, отличную от N и содержащуюся в P. Как и выше, получаем, что $P/L \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/L)$ ($P/L \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/L)$). Если $P \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G) = 1$ и $NL/L \leq \Phi(G/L)$, то, по [10, гл. A, лемма 9.11], $NL \leq P \cap \Phi(G)L = L$; противоречие. Поэтому $NL/L \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/L)$. Из G-изоморфизма $N \cong NL/L$ следует, что $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$; противоречие. Значит, N является единственной минимальной нормальной подгруппой из G, содержащейся в P.

(2) Покажем: $\Phi(P) = 1$, и поэтому P — элементарная абелева p-группа.

Если $\Phi(P) \neq 1$, то $N \leq \Phi(P)$ по (1), и поэтому $P/\Phi(P) \leq$ $\leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/\Phi(P))$ ($P/\Phi(P) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(P))$). Следовательно, $P \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$) по лемме 2.6; противоречие.

(3) Пусть G_p — силовская p-подгруппа из G и W — такая максимальная подгруппа из N, что $W \trianglelefteq G_p$. Если $W \trianglelefteq G$, то $W = 1$, и поэтому $|N| = p$. Следовательно, $N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$, что противоречит (1). Значит, $W \ntrianglelefteq G$. Пусть B — дополнение к N в P и $V = WB$. Тогда V — максимальная подгруппа в P и $V_G = 1$ в силу (1).

По условиям теоремы V является $\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$-вложенной ($\mathfrak{F}_\tau$-вложенной) в G. Тогда для некоторой квазинормальной подгруппы T из G и некоторой τ-подгруппы S из G, содержащейся в V, VT является S-квазинормальной в G и $V \cap T \leq SZ_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($V \cap T \leq SZ_{\mathfrak{F}}(G)$). Предположим, что $N \nleq T^G$. По (1), $P \cap T^G = 1$. Следовательно, $W = V \cap N = VT \cap N$ является S-квазинормальной в G по лемме 2.1(2), и $O^p(G) \leq N_G(W)$ по лемме 2.1(3).

Поэтому $W \trianglelefteq G$, что невозможно. Следовательно, $N \leq T^G$. Если $N \nleq T$, то $P \cap T_G = 1$ в силу (1). Значит, $NT_G/T_G \leq Z_\infty(G/T_G)$ по лемме 2.1(1), и $N \leq Z_\infty(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ввиду G-изоморфизма $N \cong NT_G/T_G$, что противоречит (1). Следовательно, $N \leq T$. Из (1) вытекает, что $W = V \cap N \leq S(P \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)) \cap N = S \cap N$ ($W = V \cap N \leq S(P \cap Z_{\mathfrak{F}}(G)) \cap N = S \cap N$), и поэтому $W = S \cap N$.

Если $N \nleq \Phi(G)$, то G содержит такую максимальную подгруппу M, что $G = N \rtimes M$. В силу (1) верно $P \cap M_G = 1$. По условию теоремы, $|G : N_G(WM_G)| = |G : N_G((S \cap N)M_G)| = |G : N_G(SM_G \cap NM_G)|$ — степень числа p. Следовательно, $WM_G \trianglelefteq G$, и $W = WM_G \cap P \trianglelefteq G$; противоречие. Поэтому мы можем считать, что $N \leq \Phi(G)$. В силу (1) функтор τ является квазирегулярным. Следовательно, $|G : N_G(W)| = |G : N_G(S \cap N)|$ — степень числа p. Тогда $W \trianglelefteq G$; противоречие.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть τ — Φ-регулярный индуктивный подгрупповой функтор, E — такая нормальная подгруппа из G, что* $(|E|, p-1) = 1$, *и P — нетривиальная силовская p-подгруппа из E. Предположим, что каждая максимальная подгруппа H из P является $(\mathfrak{U}_p)_{\tau\Phi}$-вложенной в G. Тогда E является p-нильпотентной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема неверна, и пусть (G, E) — контрпример с минимальным числом $|G| + |E|$. Разобьём доказательство на несколько этапов.

(1) Покажем: G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, содержащуюся в E, E/N является p-нильпотентной и $N \nleq \Phi(G)$.

Действительно, пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в E. Если $p \nmid |E/N|$, то E/N является p-нильпотентной группой. Предположим, что $p \mid |E/N|$. Покажем, что условие теоремы справедливо для $(G/N, E/N)$. Пусть H/N — произвольная максимальная подгруппа из PN/N. Тогда P имеет такую максимальную подгруппу V, что $H = VN$ и $V \cap N = P \cap N$. Поскольку $(|VN : V|, p) = (|PN : P|, p) = 1$, для всякой квазинормальной подгруппы T из G выполняется $(|VN \cap T : V \cap T|, |VN \cap T : N \cap T|) = (|V(VN \cap T) : V|, |N(VN \cap T) : N|) = 1$, и поэтому $VN \cap T = (V \cap T)(N \cap T)$. Рассуждая как при доказательстве леммы 2.3(1), можно показать, что требуемое справедливо. Следовательно, выбор (G, E) влечёт p-нильпотентность группы E/N. Пусть $N \leq \Phi(G)$. По [26, лемма 3.1], E является p-нильпотентной; противоречие. Значит, $N \nleq \Phi(G)$. Единственность подгруппы N очевидна.

(2) Покажем: $O_{p'}(E) = 1$ и $E \cap Z_{\mathfrak{U}_p\Phi}(G) = 1$.

Если $O_{p'}(E) > 1$, то $N \leq O_{p'}(E)$ по (1), и E является p-нильпотентной группой; противоречие. Следовательно, $O_{p'}(E) = 1$. Если $E \cap Z_{\mathfrak{U}_p\Phi}(G) > 1$, то, ввиду (1) и леммы 2.2(7), E является p-сверхразрешимой. Поскольку $(|E|, p-1) = 1$, E является p-нильпотентной. Полученное противоречие показывает, что $E \cap Z_{\mathfrak{U}_p\Phi}(G) = 1$.

(3) Покажем: $O_p(E) > 1$.

Предположим, что $O_p(E) = 1$. Тогда N не является абелевой, и поэтому $p = 2$ по теореме Фейта-Томпсона. Очевидно, что $4 \mid |N|$.

Пусть H — произвольная максимальная подгруппа из P. Тогда $H_G = 1$. По условию теоремы H является $(\mathfrak{U}_2)_{\tau\Phi}$-вложенной в G. Значит, для некоторой квазинормальной подгруппы T из G и некоторой τ-подгруппы S из G, содержащейся в H, HT является S-квазинормальной в G и $H \cap T \leq SZ_{\mathfrak{U}_2\Phi}(G)$. Если $N \leq T^G$ и $N \nleq T$, то $E \cap T_G = 1$ по (1). В силу леммы 2.1(1) выполняется $NT_G/T_G \leq Z_\infty(G/T_G)$. Следовательно, $N \leq E \cap Z_\infty(G) \leq Z_\infty(E)$ ввиду G-изоморфизма $N \cong NT_G/T_G$. В силу (1), E/N является p-нильпотентной, поэтому E также p-нильпотентна. Полученное противоречие показывает, что либо $E \cap T^G = 1$, либо $N \leq T$ по (1). В первом случае, по лемме 2.1(2), $H = HT \cap E$ является S-квазинормальной в G, и поэтому $H \leq O_2(E) = 1$. Тогда $|P| = 2$; противоречие. В последнем случае $H \cap N \leq H \cap T \leq E \cap SZ_{\mathfrak{U}_2\Phi}(G) = S$ по (2), и поэтому $H \cap N = S \cap N$. Поскольку $N \nleq \Phi(G)$, то G содержит такую максимальную подгруппу M, что $G = NM$ и $N \cap M_G = 1$. Тогда $|G : N_G(SM_G \cap NM_G)|$ — степень числа 2 для Φ-регулярного и индуктивного функтора τ. Если $SM_G \cap NM_G > M_G$, то $NM_G = (SM_G \cap NM_G)^{G_2} \leq G_2M_G$, где G_2 — силовская 2-подгруппа из G, содержащая P. Следовательно, N является 2-группой; противоречие. Поэтому $SM_G \cap NM_G = M_G$, откуда $H \cap N = S \cap N \leq N \cap M_G = 1$.

Следовательно, $|P \cap N| \leq 2$. Полученное противоречие показывает, что $O_p(E) > 1$.

(4) Покажем: G содержит такую максимальную подгруппу M, что $G = N \rtimes M$, $E \cap M_G = 1$, $N = O_p(E) = C_E(N)$ и $E \cap M$ является p-нильпотентной.

Действительно, ввиду (1) и (3), $N \leq O_p(E)$, $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G и $E \cap M_G = 1$. Поскольку $E = N \rtimes \rtimes (E \cap M)$ и E/N является p-нильпотентной, $E \cap M$ также p-нильпотентна. Кроме того, $O_p(E) \cap M \trianglelefteq G$ по лемме 2.7, и $O_p(E) \cap M = 1$. Следовательно, $N = O_p(E)$, откуда в силу (2) получаем, что $N = O_{p',p}(E)$. Учитывая [11, теор. 1.8.19], $C_E(N) = N$.

(5) Пусть G_p — силовская p-подгруппа из G и U — максимальная подгруппа из G_p, содержащая $G_p \cap M$. Тогда $G_p = NU$, и $|P : U \cap E| = |G_p \cap \cap E : U \cap E| = |G_p : U| = p$. Следовательно, $U \cap E$ является максимальной подгруппой в P. Пусть $H = U \cap E$. Тогда $H \trianglelefteq G_p$, $P = NH$ и $N \nleq H$. Если $H_G > 1$, то $N \leq H$ по (1); противоречие. Значит, $H_G = 1$. Если $H \cap N = 1$, то $|N| = p$. По (1) и лемме 2.8(2), E является p-нильпотентной группой; противоречие. Следовательно, $H \cap N > 1$.

По условию теоремы, подгруппа H является $(\mathfrak{U}_p)_{\tau\Phi}$-вложенной в G. Тогда для некоторой квазинормальной подгруппы T из G и некоторой τ-подгруппы S из G, содержащейся в H, HT является S-квазинормальной в G и $H \cap T \leq SZ_{\mathfrak{U}_p\Phi}(G)$. Если $N \leq T^G$ и $N \nleq T$, то, рассуждая как при доказательстве (3), мы приходим к противоречию. Значит, в силу (1) либо $E \cap T^G = 1$, либо $N \leq T$. В первом случае, $H = HT \cap E$ является S-квазинормальной подгруппой в G по лемме 2.1(2). Поэтому по лемме 2.1(3) выполняется $O^p(G) \leq N_G(H)$. Следовательно, $H \trianglelefteq G$. Поскольку $N \nleq H$, то $H = 1$ ввиду (1); противоречие. В последнем случае $H \cap N \leq H \cap T \leq \leq E \cap SZ_{\mathfrak{U}_p\Phi}(G) = S$ в силу (2). Следовательно, $H \cap N = S \cap N$. Так как $S \in \tau(G)$, то $|G : N_G(SM_G \cap NM_G)|$ является степенью числа p ввиду Φ-регулярности и индуктивности функтора τ. Если $SM_G \cap NM_G > M_G$, то $NM_G = (SM_G \cap NM_G)^{G_p} \leq (HM_G)^{G_p} = HM_G$. Поскольку $E \cap M_G = 1$, имеем $N \leq H$; противоречие. Значит, $SM_G \cap NM_G = M_G$, и $H \cap N =$

$= S \cap N \leq N \cap M_G = 1$; противоречие.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть τ — Φ-регулярный (регулярный) индуктивный подгрупповой функтор, и E — нормальная подгруппа из G. Предположим, что для всякой нециклической силовской подгруппы P из E каждая максимальная подгруппа H из P является $\mathfrak{U}_{\tau\Phi}$-вложенной ($\mathfrak{U}_\tau$-вложенной) в G. Тогда $E \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$ ($E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть (G, E) — контрпример с минимальным числом $|G| + |E|$. Пусть p — наименьший простой делитель $|E|$. Если P является циклической группой, то E p-нильпотентна по лемме 2.8(1). С другой стороны, если P не является циклической, то E также p-нильпотентна по теореме 3.2. Пусть V — нормальное p-дополнение к E. Тогда $V \trianglelefteq G$. Если P циклическая, то $E/V \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/V) \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G/V)$. Предположим, что P не является циклической. Ввиду лемм 2.3(1) и 2.4 для $(G/V, E/V)$ справедливо условие теоремы 3.1. Следовательно, $E/V \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G/V)$ ($E/V \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/V)$). Поскольку условие теоремы справедливо для (G, V), то выбор (G, E) влечёт, что $V \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$ ($V \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$). Следовательно, $E \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$ ($E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$); противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.3. По теореме 3.3, $X \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, и $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ по лемме 2.10. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.4 проводится аналогично доказательству теоремы 1.3 при помощи теоремы 3.3 и лемм 2.2(6) и 2.11.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть τ — Φ-регулярный наследственный индуктивный подгрупповой функтор, и E — такая нормальная подгруппа из G, что G/E сверхразрешима. Предположим, что для всякой нециклической силовской подгруппы P из $F^*(E)$ каждая максимальная подгруппа H из P является $\mathfrak{U}_\tau$-вложенной в G. Тогда G сверхразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть (G, E) — контрпример с минимальным числом $|G| + |E|$. Разобьём доказательство на несколько этапов.

(1) Покажем: каждая собственная субнормальная подгруппа W из G, для которой $F^*(E) \leq W \leq E$, сверхразрешима.

Ввиду леммы 2.9(1), $F^*(W) = F^*(E)$. Условие теоремы справедливо для (W, W) по лемме 2.3(2). Следовательно, выбор (G, E) влечёт, что W сверхразрешима.

(2) Покажем: $F^*(E) = F(E) < E$ и $F(E) \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$.

Ввиду теоремы 3.3 и леммы 2.2(7) группа $F^*(E) \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$ сверхразрешима, и $F^*(E) = F(E)$ по лемме 2.9(2). Если $F(E) = E$, то, по теореме 1.4, G является сверхразрешимой группой; противоречие. Значит, $F(E) < E$.

(3) Покажем: $E = G$ не является разрешимой группой и $\Phi(G) > 1$.

В случае, когда E разрешима или $E \cap \Phi(G) = 1$, ввиду (2) и леммы 2.11 выполняется $E \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$, и G сверхразрешима по лемме 2.6(6), что невозможно. Следовательно, E не является разрешимой и $E \cap \Phi(G) > > 1$. Ввиду (1), $E = G$, откуда $\Phi(G) > 1$.

(4) Покажем: пусть P — такая силовская p-подгруппа из $F(G)$, что $P \cap \Phi(G) > 1$; тогда $G/F(G)$ — неабелева простая группа, и $G/P \cap \Phi(G)$ квазинильпотентна.

Пусть $L = P \cap \Phi(G)$ и $E(G/L)$ — слой G/L. Если $F^*(G/L) < G/L$, то ввиду (1) и леммы 2.9(2) выполняется $F^*(G/L) = F(G/L) = F(G)/L$. Следовательно, условие теоремы справедливо для $(G/L, G/L)$ по лемме 2.3(1). Выбор (G, E) влечёт, что группа G/L сверхразрешима. Поэтому G сверхразрешима; противоречие. Следовательно, $F^*(G/L) = G/L$, и поэтому G/L квазинильпотентна. Поскольку $E(G/L)/Z(E(G/L))$ является прямым произведением простых неабелевых групп, то, по лемме 2.9(3), $G/F(G) \cong F^*(G/L)/F(G/L)$ — прямое произведение простых неабелевых групп. Ввиду (1), $G/F(G)$ — неабелева простая группа.

(5) Покажем: $F(G) = P$ и $C_G(P) \leq P$.

Предположим, что $F(G) > P$. Пусть q — такой простой делитель $|F(G)|$, что $q \neq p$, и Q — силовская q-подгруппа из $F(G)$. В силу (4), G/P квазинильпотентна, и $QP/P \leq Z_\infty(G/P)$ по [21, гл. X, след. 13.7(c)]. Ввиду G-изоморфизма $Q \cong QP/P$ имеем $Q \leq Z_\infty(G)$. По лемме 2.9(5) выполняется $F^*(G/Q) = F^*(G)/Q = F(G)/Q$, и поэтому $(G/Q, G/Q)$ удовлетворяет условию теоремы. Значит, G/Q сверхразрешима по выбору (G, E). Следовательно, G разрешима, что противоречит (3). Значит, $F(G) = P$. По лемме 2.9(4), $C_G(P) \leq P$.

(6) Покажем: p является наибольшим простым делителем $|G|$ и каждая силовская q-подгруппа Q из G, где $q \neq p$, является абелевой.

Пусть $V = PQ$. По лемме 2.3(2) и теореме 1.4 группа V сверхразрешима. Если $q > p$, то $Q \trianglelefteq V$, и $Q \leq C_V(P) \leq P$ ввиду (5); противоречие. Следовательно, $q < p$. Значит, p является наибольшим простым делителем $|G|$. По (5) верно $C_V(P) \leq P$. Тогда $F(V) = P$, и $Q \cong V/P$ — абелева группа.

(7) Поскольку G не является разрешимой в силу (3), по теореме Фейта–Томпсона справедливо $2 \mid |G|$. Ввиду (6) силовские 2-подгруппы из G/P являются абелевыми. По теореме Уолтера, см. [21, гл. X, теор. 13.7], G/P изоморфна одной из групп: (a) $PSL(2, 2^f)$; (b) $PSL(2, q)$, где $8 \mid q-3$, либо $8 \mid q-5$; (c) группе Янко J_1; (d) группе Ри. Нетрудно показать, что в каждом из этих случаев G/P имеет такую неабелеву сверхразрешимую подгруппу V/P, что $p \nmid |V/P|$. В силу (5), $C_V(P) \leq P$, и поэтому $P = F(V)$. С другой стороны, V сверхразрешима по лемме 2.3(2) и теореме 1.4. Следовательно, V/P является абелевой группой; противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.5. Ввиду леммы 2.3(2) и теоремы 3.4, E сверхрахрешима. Поэтому утверждение теоремы прямо следует из теоремы 1.4.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (разрешимо насыщенная формация), содержащая все сверхразрешимые группы, и τ — Φ-квазирегулярный (квазирегулярный соответственно) индуктивный подгрупповой функтор. Пусть P — нетривиальная нормальная p-подгруппа из G экспоненты, равной либо p, либо 4 в случае, когда P не является кватернионно свободной группой (нетривиальная нормальная p-подгруппа из G). Предположим, что каждая циклическая подгруппа порядка p или 4 в случае, когда P не является кватернионно свободной группой, из P является*

$\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$-вложенной ($\mathfrak{F}_\tau$-вложенной) в G. Тогда $P \le Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($P \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема неверна, и пусть (G, P) — контрпример с минимальным числом $|G| + |P|$. Разобьём доказательство на несколько этапов.

(1) Покажем: G содержит такую нормальную подгруппу N, содержащуюся в P, что P/N — главный фактор в G, $N \le Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($N \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$ соответственно), $|P/N| > p$ и $R \le N$ для всякой нормальной подгруппы R из G, собственно содержащейся в P.

Действительно, пусть P/N — главный фактор из G. Если $N = 1$, то (1) очевидно. Предположим, что $N > 1$. Тогда (G, N) удовлетворяет условию теоремы. Следовательно, выбор (G, P) влечёт, что $N \le Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($N \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$). Очевидно, что фактор P/N является $\mathfrak{U}$-эксцентральным в G, поэтому $|P/N| > p$. Для всякой нормальной подгруппы R из G, собственно содержащейся в P, как и выше можно показать, что $R \le Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($R \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$). Если $R \not\le N$, то $P = NR \le Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ ($P \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$). Полученное противоречие показывает, что $R \le N$.

(2) Покажем: экспонента группы P равна либо p, либо 4 в случае, когда P не является кватернионно свободной группой.

Ввиду условия теоремы можем считать, что функтор τ является квазирегулярным и $N \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Пусть C — критическая подгруппа Томпсона из P. Предположим, что $\Omega(C) < P$. В силу (1) выполняется $\Omega(C) \le N \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, $P \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$ по лемме 2.14; противоречие. Тогда $P = \Omega(C)$. Если P — неабелева кватернионно свободная 2-группа, то P содержит характеристическую подгруппу V индекса 2 по лемме 2.15. Следовательно, ввиду (1) имеем $V \le N$, и поэтому $|P/N| = 2$; противоречие. По лемме 2.16 получаем, что экспонента P равна либо p, либо 4 в случае, когда P не является кватернионно свободной группой.

(3) Пусть V/N — произвольная минимальная нормальная подгруппа из $P/N \cap Z(G_p/N)$, где G_p — силовская p-подгруппа из G. Пусть $x \in V \setminus N$ и $H = \langle x \rangle$. Тогда $V/N = HN/N$ и $|H|$ равен либо p, либо 4 в случае, когда P не является кватернионно свободной группой, ввиду (2). Если $V \trianglelefteq G$, то $P = V$ по (1), и $|P/N| = p$; противоречие. В силу (1) справедливо

$H_G \leq V_G = N$.

По условию теоремы H является $\mathfrak{F}_{\tau\Phi}$-вложенной ($\mathfrak{F}_{\tau}$-вложенной) в G. Тогда для некоторой квазинормальной подгруппы T/H_G из G/H_G и некоторой τ-подгруппы S/H_G из G/H_G, содержащейся в H/H_G, $(H/H_G)(T/H_G)$ является S-квазинормальной подгруппой в G/H_G и $(H/H_G) \cap (T/H_G) \leq (S/H_G)Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/H_G)$ $((H/H_G) \cap (T/H_G) \leq$ $\leq (S/H_G)Z_{\mathfrak{F}}(G/H_G))$.

Если $P \nleq T^G$, то $P \cap T^G \leq N$ ввиду (1). Следовательно, $V = HN =$ $= (HT \cap P)N$ является S-квазинормальной в G по лемме 2.1(2). Ввиду леммы 2.1(3) верно $O^p(G) \leq N_G(V)$, поэтому $V \trianglelefteq G$. Полученное противоречие показывает, что $P \leq T^G$. Если $P \nleq T$, то $P \cap T_G \leq N$ по (1). Из леммы 2.1(1) получаем, что $PT_G/T_G \leq Z_\infty(G/T_G)$. Поэтому $P/P \cap T_G \leq$ $\leq Z_\infty(G/P \cap T_G)$. Следовательно, $P/N \leq Z_\infty(G/N) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/N) \leq$ $\leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/N)$. В силу (1) выполняется $P \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$ $(P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G))$, что невозможно. Значит, $P \leq T$. Следовательно, $H/H_G = (S/H_G)((H/H_G) \cap$ $\cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/H_G))$ $(H/H_G = (S/H_G)((H/H_G) \cap Z_{\mathfrak{F}}(G/H_G)))$.

Поскольку H является циклической группой, то либо $H/H_G = S/H_G$ является τ-подгруппой в G/H_G, либо $H/H_G \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/H_G)$ $(H/H_G \leq$ $\leq Z_{\mathfrak{F}}(G/H_G))$. В первом случае, если $P/N \nleq \Phi(G/N)$, то G/N содержит такую максимальную подгруппу M/N, что $G/N = P/N \rtimes M/N$. Очевидно, $P \cap M_G = P \cap M = N$, и поэтому PM_G/M_G является минимальной нормальной подгруппой в G/M_G в силу (1). Функтор τ является индуктивным и $H_G \leq N \leq M_G$, поэтому HM_G/M_G — τ-подгруппа в G/M_G. Тогда $|G : N_G(HM_G)|$ является степенью числа p в случае, когда τ — Φ-квазирегулярный функтор. Следовательно, $HM_G \trianglelefteq G$. Значит, $V = HN = (HM_G \cap P)N \trianglelefteq G$, что невозможно. Предположим теперь, что $P/N \leq \Phi(G/N)$. Ввиду (1) мы можем считать, что τ квазирегулярен. Следовательно, $|G : N_G(V)| = |G : N_G(HN)|$ — степень числа p, и поэтому $V \trianglelefteq G$, противоречие. Во втором случае в силу лемм 2.2(1) и 2.2(5) выполняется $1 < V/N = HN/N \leq P/N \cap Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/N)$ $(1 < V/N = HN/N \leq$ $\leq P/N \cap Z_{\mathfrak{F}}(G/N))$. По (1), $P/N \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G/N)$ $(P/N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/N))$; противоречие.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть τ — либо Φ-квазирегулярный наследственный индуктивный подгрупповой функтор, либо регулярный индуктивный подгрупповой функтор, E — такая нормальная подгруппа из G, что $(|E|, p-1) = 1$, и P — нетривиальная силовская p-подгруппа из E. Предположим, что каждая циклическая подгруппа порядка p или 4 в случае, когда P не является кватернионно свободной группой, из P является $(\mathfrak{U}_p)_\tau$-вложенной в G. Тогда E является p-нильпотентной группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть (G, E) — контрпример с минимальным числом $|G| + |E|$. Разобьём доказательство на несколько этапов.

(1) Покажем: τ является регулярным.

Предположим, что функтор τ является Φ-квазирегулярным и наследственным. Ввиду леммы 2.3(2), (A, A) удовлетворяет условию теоремы для всякой собственной подгруппы A из E. По выбору (G, E) группа A является p-нильпотентной. Следовательно, E — минимальная не p-нильпотентная группа, и она p-замкнута по [28, гл. IV, теор. 5.4]. Ввиду [10, гл. VII, теор. 6.18] фактор $P/\Phi(P)$ является главным в E, и экспонента P равна либо 2, либо 4 в случае, когда $p = 2$ и P — неабелева группа. Если $p = 2$ и P — неабелева кватернионно свободная группа, то P содержит характеристическую подгруппу индекса 2 по лемме 2.15. Следовательно, $|P/\Phi(P)| = 2$, и поэтому P циклическая, что противоречит нашему предположению. Значит, P имеет экспоненту p или 4 в случае, когда P не является кватернионно свободной группой. По теореме 3.5 справедливо $P \leq Z_{\mathfrak{U}_p\Phi}(G)$, и E является p-сверхразрешимой по лемме 2.2(7). Поскольку $(|E|, p-1) = 1$, то E p-нильпотентна; противоречие. Следовательно, функтор τ является квазирегулярным.

(2) Покажем: $O_{p'}(E) = 1$.

Если $O_{p'}(E) > 1$, то условие теоремы справедливо для $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$ по лемме 2.3(1). Выбор (G, E) влечёт, что группа $E/O_{p'}(E)$ является p-нильпотентной. Следовательно, и E будет p-нильпотентной, что невозможно.

(3) Покажем: $O_p(E) \leq Z_\infty(E)$.

Предположим, что $O_p(E) > 1$. По теореме 3.5, $O_p(E) \leq Z_{\mathfrak{U}_p}(G)$. Поскольку $(|E|, p-1) = 1$, то $O_p(E) \leq E \cap Z_{\mathfrak{U}_p}(G) \leq Z_{\mathfrak{U}_p}(E) = Z_{\mathfrak{N}_p}(E)$ по лемме 2.2(2). Следовательно, $O_p(E) \leq Z_\infty(E)$.

(4) Покажем: Пусть N — нормальная подгруппа из G, собственно содержащаяся в E. Тогда $N \leq O_p(E)$.

Поскольку условие теоремы справедливо для (G, N), то N является p-нильпотентной группой ввиду выбора (G, E). Значит, $N \leq O_p(E)$ для $O_{p'}(E) = 1$ по (2).

(5) Покажем: $p = 2$ и $E/O_2(E)$ — неабелев главный фактор из G.

Ввиду (4) фактор $E/O_p(E)$ является главным в G. Если $p \nmid |E/O_p(E)|$, то в силу (3) группа E p-нильпотентна в случае, когда $O_p(E) \leq Z_\infty(E)$. Следовательно, $p \mid |E/O_p(E)|$, и поэтому $E/O_p(E)$ не является абелевой. Значит, E неразрешима. Поскольку $(|E|, p-1) = 1$, по теореме Фейта–Томпсона получаем, что $p = 2$.

(6) Ввиду [28, гл. IV, теор. 5.4], E содержит 2-замкнутую минимальную не 2-нильпотентную подгруппу A. Пусть A_2 — силовская 2-подгруппа из A, содержащаяся в P. В силу [10, гл. VII, теор. 6.18] фактор $A_2/\Phi(A_2)$ является главным в A, $\Phi(A) = Z_\infty(A)$, $\Phi(A_2) = A_2 \cap \Phi(A)$ и экспонента A_2 равна либо 2, либо 4 в случае, когда A_2 неабелева. Рассуждая так же, как и при доказательстве (1), можно показать, что экспонента A_2 равна либо 2, либо 4 в случае, когда A_2 не является кватернионно свободной группой.

Ввиду (3) и леммы 2.2(2) выполняется $A_2 \cap O_2(E) \leq A_2 \cap Z_\infty(E) \leq \leq A_2 \cap Z_\infty(A) = A_2 \cap \Phi(A) = \Phi(A_2)$. Значит, A_2 содержит такой элемент x, что $\langle x \rangle \nleq O_2(E)$. Пусть $H = \langle x \rangle$. Тогда $|H|$ равен либо 2, либо 4 в случае, когда A_2 не является кватернионно свободной группой. По условию теоремы H является $(\mathfrak{U}_2)_\tau$-вложенной в G. Тогда для некоторой квазинормальной подгруппы T/H_G из G/H_G и некоторой τ-подгруппы S/H_G из G/H_G, содержащейся в H/H_G, $(H/H_G)(T/H_G)$ является S-квазинормальной в G/H_G и $(H/H_G) \cap (T/H_G) \leq (S/H_G)Z_{\mathfrak{U}_2}(G/H_G)$.

Если $E \nleq T^G$, то $E \cap T^G < E$. По (4), $E \cap T^G \leq O_2(E)$. Ввиду леммы 2.1(2), $HO_2(E) = (HT \cap E)O_2(E)$ S-квазинормальна в G, и $H \leq O_2(E)$; противоречие. Значит, $E \leq T^G$. Если $E \nleq T$, то $E \cap T_G \leq O_2(E)$

ввиду (4). По лемме 2.1(1), $ET_G/T_G \leq Z_\infty(G/T_G)$, поэтому $E/O_2(E) \leq \leq Z_\infty(G/O_2(E))$. Следовательно, $E/O_2(E)$ является абелевой группой, что противоречит (5). Значит, $E \leq T$. Тогда $H/H_G = (S/H_G)((H/H_G) \cap \cap Z_{\mathfrak{U}_2}(G/H_G))$. Поскольку группа H/H_G является циклической, то либо $H/H_G = S/H_G$ — τ-подгруппа в G/H_G, либо $H/H_G \leq Z_{\mathfrak{U}_2}(G/H_G)$. В первом случае $HO_2(E)/O_2(E)$ является τ-подгруппой в $G/O_2(E)$ ввиду индуктивности функтора τ. Следовательно, $|G : N_G(HO_2(E))|$ является степенью числа 2 в силу (1). Значит, $(HO_2(E))^G$ является 2-группой, и $H \leq \leq O_2(E)$; противоречие. Во втором случае

$$HO_2(E)/O_2(E) \leq Z_{\mathfrak{U}_2}(G/O_2(E))$$

ввиду леммы 2.2(1). Следовательно, $1 < HO_2(E)/O_2(E) \leq E/O_2(E) \cap \cap Z_{\mathfrak{U}_2}(G/O_2(E))$. Значит, $E/O_2(E) \leq Z_{\mathfrak{U}_2}(G/H_G)$ в силу (5), и $E/O_2(E)$ является абелевой группой; противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.6. Рассуждая как при доказательстве теоремы 3.3 и используя теоремы 3.5 и 3.6, получаем, что $F^*(E) \leq \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Ввиду леммы 2.10 выполняется $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.7. Предположим противное, и пусть (G, E) — контрпример с минимальным числом $|G| + |E|$. Если E не является разрешимой группой, то по теореме Фейта–Томпсона $2 \mid |E|$. Ввиду теоремы 3.6 группа E является 2-нильпотентной; противоречие. Следовательно, E разрешима. Очевидно, что для всякой такой максимальной подгруппы M из G, что $G^{\mathfrak{F}} \nleq M$, справедливо $G = EM$ для $G^{\mathfrak{F}} \leq E$, и $(M, E \cap M)$ удовлетворяет условию теоремы по лемме 2.3(2). Поэтому выбор (G, E) влечёт, что $M \in \mathfrak{F}$. Ввиду [29, теор. 1.1], $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой, $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ — главный фактор в G и экспонента $G^{\mathfrak{F}}$ равна либо p, либо 4 в случае, когда $p = 2$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не является абелевой. Если $p = 2$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — неабелева кватернионно свободная группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ содержит характеристическую подгруппу индекса 2 по лемме 2.15. Следовательно, $|G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})| = 2$, и $G^{\mathfrak{F}}$ циклическая, что невозможно. Значит, экспонента $G^{\mathfrak{F}}$ равна либо p, либо

4 в случае, когда $G^{\mathfrak{F}}$ не является кватернионно свободной группой. Ввиду теоремы 3.5 выполняется $G^{\mathfrak{F}} \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}\Phi}(G)$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.2(6); противоречие.

§ 4. Приложения

В данном разделе рассматриваются различные подгрупповые функторы, удовлетворяющие условиям наших теорем. Заметим, что в случае, когда τ — регулярный индуктивный подгрупповой функтор, применимы теоремы 1.3 и 1.6. Ниже приводятся примеры регулярных индуктивных подгрупповых функторов.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $\tau(G)$ — множество всех нормальных (всех квазинормальных, S-квазинормальных) подгрупп некоторой группы G. В силу [30, предлож. 2.2(3)] простой проверкой можно показать, что τ является регулярным наследственным индуктивным подгрупповым функтором.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Подгруппа H из G называется *$\mathfrak{F}$-гиперцентрально вложенной* [31] в G, если $H^G/H_G \leq$ $\leq Z_{\mathfrak{F}}(G/H_G)$. Пусть $\tau(G)$ — множество всех $\mathfrak{U}$-гиперцентрально вложенных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является регулярным наследственным индуктивным подгрупповым функтором ввиду [30, предлож. 2.3(2); 31, леммы 2(i) и 1(i)].

ПРИМЕР 4.3. Подгруппа H из G называется *модулярной* в G, если H является модулярным элементом решётки подгрупп из G. Пусть $\tau(G)$ — множество всех модулярных подгрупп некоторой группы G. Тогда простой проверкой можно показать, что τ является наследственным индуктивным подгрупповым функтором, см. также [32, разд. 5.1]. Более того, ввиду [32, теор. 5.2.5] каждая модулярная подгруппа из G является $\mathfrak{U}$-гиперцентрально вложенной в G, поэтому фуктор τ будет регулярным в силу примера 4.2.

ПРИМЕР 4.4. Подгруппа H из G называется *CAP-подгруппой*, если H покрывает либо изолирует каждый главный фактор из G. Пусть $\tau(G)$ —

множество всех CAP-подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является регулярным индуктивным подгрупповым функтором [30, предлож. 2.3(1); 33, лемма 3.2(a)].

ПРИМЕР 4.5. Подгруппа H из G называется *SS-квазинормальной* [34] в G, если H имеет такое добавление K в G, что H перестановочна с каждой силовской подгруппой из K. Пусть $\tau(G)$ — множество всех SS-квазинормальных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является регулярным наследственным индуктивным подгрупповым функтором [35, лемма 7.1(6); 34, леммы 2.1(i) и 2.1(ii)].

ПРИМЕР 4.6. Подгруппа H из G называется *S-полуперестановочной* [36] в G, если H перестановочна с каждой такой силовской подгруппой X из G, что $(|H|, |X|) = 1$. Пусть $\tau(G)$ — множество всех S-полуперестановочных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является регулярным наследственным индуктивным подгрупповым функтором [35, лемма 7.1(5); 37, предлож. 1 и 2].

ПРИМЕР 4.7. Подгруппа H из G называется *τ-квазинормальной* [38] в G, если $HG_p = G_pH$ для всякой такой силовской p-подгруппы G_p из G, что $(|H|, p) = 1$ и $(|H|, |{G_p}^G|) \neq 1$. Пусть $\tau(G)$ — множество всех τ-квазинормальных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является наследственным индуктивным подгрупповым функтором [38, лемма 2.2(1); 39, лемма 2.6(2)].

Покажем, что функтор τ является регулярным. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, и H — τ-квазинормальная p-подгруппа из G. Предположим, что $H \cap N > 1$. Если $O_{p'}(G) > 1$, то $N \cap O_{p'}(G) = 1$. Воспользовавшись индукцией по $|G|$, получаем, что $|G : N_G((H \cap N)O_{p'}(G))| = |G : N_G(HO_{p'}(G) \cap NO_{p'}(G))|$ является степенью числа p. Поскольку $N_G(H \cap N) \leq N_G((H \cap N)O_{p'}(G)) \leq N_G((H \cap \cap N)O_{p'}(G) \cap N) = N_G(H \cap N)$, то $N_G(H \cap N) = N_G((H \cap N)O_{p'}(G))$, и поэтому $|G : N_G(H \cap N)|$ — степень числа p. Рассмотрим теперь случай, когда $O_{p'}(G) = 1$. Тогда $p \mid |{G_q}^G|$ для любого простого числа $q \neq p$, делящего $|G|$. Следовательно, H является S-полуперестановочной в G, и

$|G : N_G(H \cap N)|$ — степень числа p. Значит, τ является регулярным.

ПРИМЕР 4.8. Подгруппа H из G называется *почти S-перестановочной* [40] в G, если для всякого такого простого числа p, что $(p, |H|) = 1$, и для любой подгруппы K из G, содержащей H, $N_K(H)$ содержит некоторую силовскую p-подгруппу из K. Пусть $\tau(G)$ — множество всех почти S-перестановочных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является индуктивным подгрупповым функтором [40, лемма 2.2(3)].

Покажем, что функтор τ является регулярным. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, и H — почти S-перестановочная p-подгруппа из G. Ввиду [40, лемма 2.2(2)], $H \cap N$ является почти S-перестановочной подгруппой в G, и $N_G(H \cap N)$ содержит некоторую силовскую q-подгруппу из G для каждого простого числа $q \neq p$, делящего $|G|$. Тогда $|G : N_G(H \cap N)|$ — степень числа p. Значит, τ является регулярным функтором.

ПРИМЕР 4.9. Подгруппа H из G удовлетворяет П-*свойству* [30] в G, если $|G/K : N_{G/K}(HK/K \cap L/K)|$ является $\pi(HK/K \cap L/K)$-числом для каждого главного фактора L/K из G. Пусть $\tau(G)$ — множество всех подгрупп некоторой группы G, удовлетворяющих П-свойству в G. Тогда τ является регулярным индуктивным подгрупповым функтором ввиду его выбора и [30, предлож. 2.1(1)].

Заметим, что в случае, когда τ является Ф-регулярным наследственным индуктивным (Ф-регулярным индуктивным) подгрупповым функтором, применимы теоремы 1.4, 1.5 и 1.7 (применима теорема 1.4). Следующие два примера являются примерами Ф-регулярных индуктивных подгрупповых функторов.

ПРИМЕР 4.10. Пара (K, L) подгрупп из G называется максимальной парой в G, если K является максимальной подгруппой в L. Подгруппа H из G называется $\{1 \leq G\}$-*вложенной* [41] в G, если H покрывает либо изолирует каждую максимальную пару из G. Пусть $\tau(G)$ — множество всех $\{1 \leq G\}$-вложенных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является наследственным индуктивным подгрупповым функтором [41, леммы 2.3(1) и 2.3(2)].

Покажем, что функтор τ является Φ-регулярным. Пусть G — примитивная группа, N — минимальная нормальная подгруппа из G, и H — $\{1 \leq G\}$-вложенная p-подгруппа из G. Мы можем считать, что $H \cap N > 1$. Ввиду [41, лемма 2.5], H субнормальна в G. Следовательно, N является p-группой [10, предлож. 4.13(b)]. Тогда $H \leq N = F(G)$. Пусть M — такая максимальная подгруппа из G, что $G = N \rtimes M$. Поскольку $H \nleq M$, то H покрывает максимальную пару (M, G), и поэтому $G = HM$. Следовательно, $H = N$, и поэтому $|G : N_G(H \cap N)|$ является степенью числа p. Значит, τ является Φ-регулярным.

ПРИМЕР 4.11. Подгруппа H из G называется CAP^*-*подгруппой* [42], если H покрывает либо изолирует каждый нефраттиньев главный фактор из G. Пусть $\tau(G)$ — множество всех CAP^*-подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является Φ-регулярным индуктивным подгрупповым функтором ввиду его определения и [42, лемма 2.1(i)].

В случае, когда τ — квазирегулярный наследственный индуктивный подгрупповой функтор, применима теорема 1.6. Приведём несколько примеров квазирегулярных наследственных индуктивных подгрупповых функторов.

ПРИМЕР 4.12. Подгруппа H из G называется S-*квазинормально вложенной* [2] в G, если каждая силовская подгруппа из H является силовской подгруппой в некоторой S-квазинормальной подгруппе из G. Пусть $\tau(G)$ — множество всех S-квазинормально вложенных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является наследственным индуктивным подгрупповым функтором [2, лемма 1].

Покажем, что функтор τ является квазирегулярным. Пусть N — абелева минимальная нормальная подгруппа из G, и H — S-квазинормально вложенная p-подгруппа из G. Тогда G имеет такую S-квазинормальную подгруппу V, что H является силовской p-подгруппой в V. Мы можем считать, что $H \cap N > 1$ и N — p-группа. Поскольку V является S-квазинормальной в G, то $H \cap N = V \cap N$ является S-квазинормальной в G по лемме 2.1(2), и $O^p(G) \le N_G(H \cap N)$ ввиду леммы 2.1(3). Следовательно, $|G : N_G(H \cap N)|$ является степенью числа p. Значит, τ является квазирегулярным.

ПРИМЕР 4.13. Подгруппа H из G называется *вполне c-перестановочной* [43] в G, если для всякой подгруппы T из G существует такой элемент $x \in \langle H, T \rangle$, что $HT^x = T^x H$. Пусть $\tau(G)$ — множество всех вполне c-перестановочных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является наследственным индуктивным подгрупповым функтором [43, лемма 2.1(3) и след. 2.2(1)].

Покажем, что функтор τ является квазирегулярным. Пусть N — абелева минимальная нормальная подгруппа из G, и H — вполне c-перестановочная p-подгруппа из G. Мы можем считать, что $H \cap N > 1$ и N — p-группа. Тогда для всякого простого числа $q \neq p$, делящего $|G|$, G содержит такую силовскую q-подгруппу G_q, что $HG_q = G_q H$. Следовательно, $H \cap N = HG_q \cap N$, и $G_q \le N_G(H \cap N)$. Значит, $|G : N_G(H \cap N)|$ является степенью числа p. Поэтому τ является квазирегулярным подгрупповым функтором.

ПРИМЕР 4.14. Подгруппа H из G называется *вполне c-полуперестановочной* [44] в G, если существует такое минимальное добавление T к H в G, что для всякой подгруппы K из T найдётся такой элемент $x \in \langle H, K \rangle \cap T$, что $HK^x = K^x H$. Пусть $\tau(G)$ — множество всех вполне c-полуперестановочных подгрупп некоторой группы G. Тогда τ является наследственным индуктивным подгрупповым функтором [44, лемма 2.3]. Более того, рассуждая как и в примере 4.13, можно показать, что τ является квазирегулярным.

Наконец, в случае, когда τ — Φ-квазирегулярный наследственный индуктивный подгрупповой функтор, применима теорема 1.7. Приведём пример Φ-квазирегулярного наследственного индуктивного подгруппового функтора.

ПРИМЕР 4.15. Пусть $\tau(G)$ — множество всех подгрупп, порождённых S-квазинормально вложенными подгруппами группы G. Тогда τ является наследственным индуктивным подгрупповым функтором [2, лемма 1].

Покажем, что функтор τ является Φ-квазирегулярным. Пусть G — примитивная группа, и N — абелева минимальная нормальная подгруппа из G. Пусть $H = \langle H_1, H_2, \dots, H_t \rangle$, $t \geq 1$, — p-подгруппа из G, где H_i — S-квазинормально вложенная подгруппа из G для всякого $1 \leq i \leq t$. Тогда G содержит такую S-квазинормальную подгруппу V_i, что H_i — силовская p-подгруппа в V_i. Мы можем считать, что $H \cap N > 1$ и N — p-группа. Если $(V_i)_G > 1$ для некоторого i, то $N \leq V_i$, и $N \leq H_i \leq H$. Следовательно, $H \cap N = N$. Значит, $|G : N_G(H \cap N)|$ является степенью числа p. Пусть теперь $(V_i)_G = 1$ для каждого $1 \leq i \leq t$. Ввиду [14, предлож. A и B], H_i является S-квазинормальной в G, и поэтому H будет S-квазинормальной в G по лемме 2.1(2). Ввиду примера 4.1, $|G : N_G(H \cap N)|$ — степень числа p. Следовательно, τ является Φ-квазирегулярным.

Приведённые выше примеры показывают, что многие известные результаты являются прямыми следствиями наших теорем. За подробностями заинтересованные читатели могут обратиться к соответствующей литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad*, Products of finite groups (de Gruyter Exp. Math., **53**), Berlin, Walter de Gruyter, 2010.
2. *A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera*, Sufficient conditions for supersolubility of finite groups, J. Pure Appl. Algebra, **127**, No. 2 (1998), 113—118.
3. *Y. Wang*, C-normality groups and its properties, J. Algebra, **180**, No. 3 (1996), 954—965.
4. *W. Guo, A. N. Skiba*, Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups, J. Algebra, **321**, No. 10 (2009), 2843—2860.
5. *W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba*, On solubility and supersolubility of some classes of finite groups, Sci. China, Ser. A, **52**, No. 2 (2009), 1—15.
6. *I. A. Malinowska*, Finite groups with sn-embedded or s-embedded subgroups, Acta Math. Hungar., **136**, Nos. 1/2 (2012), 76—89.

7. *J. Huang*, On $\mathfrak{F}_s$-quasinormal subgroups of finite groups, Commun. Algebra, **38**, No. 11 (2010), 4063—4076.
8. *L. Miao, B. Li*, On $\mathfrak{F}$-quasinormal primary subgroups of finite groups, Commun. Algebra, **39**, No. 10 (2011), 3515—3525.
9. *A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro*, Classes of finite groups (Math. Appl. (Springer), **584**), Dordrecht, Springer-Verlag, 2006.
10. *K. Doerk, T. Hawkes*, Finite soluble groups (De Gruyter Expo. Math., **4**), Berlin etc., Walter de Gruyter, 1992.
11. *W. Guo*, The theory of classes of groups (Math. Appl. (Dordrecht), **505**), Dordrecht, Kluwer Acad. Publ.; Beijing, Sci. Press, 2000.
12. *R. Maier, P. Schmid*, The embedding of quasinormal subgroups in finite groups, Math. Z., **131**, No. 3 (1973), 269—272.
13. *O. Kegel*, Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen, Math. Z., **78**, No. 1 (1962), 205—221.
14. *P. Schmid*, Subgroups permutable with all Sylow subgroups, J. Algebra, **207**, No. 1 (1998), 285—293.
15. *W. Guo, A. N. Skiba*, On factorizations of finite groups with $\mathfrak{F}$-hypercentral intersections of the factors, J. Group Theory, **14**, No. 5 (2011), 695—708.
16. *W. Guo*, On $\mathfrak{F}$-supplemented subgroups of finite groups, Manuscr. Math., **127**, No. 2 (2008), 139—150.
17. *L. A. Shemetkov, A. N. Skiba*, On the $\mathfrak{X}\Phi$-hypercentre of finite groups, J. Algebra, **322**, No. 6 (2009), 2106—2117.
18. *W. Guo, A. N. Skiba*, On $\mathfrak{F}\Phi^*$-hypercentral subgroups of finite groups, J. Algebra, **372** (2012), 275—292.
19. *A. N. Skiba, L. A. Shemetkov*, Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups, Ukr. Math. J., **52**, No. 6 (2000), 898—913.
20. *D. Gorenstein*, Finite groups (Harper's Series in Modern Mathematics), New York a.o., Harper & Row Publ., 1968.
21. *B. Huppert, N. Blackburn*, Finite groups III (Grundlehren Math. Wiss., **243**), Berlin a. o., Springer-Verlag, 1982.
22. *A. N. Skiba*, On two questions of L. A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups, J. Group Theory, **13**, No. 6 (2010), 841—850.

23. *T. M. Gagen*, Topics in finite groups (London Math. Soc. Lecture Note Ser., **16**), Cambridge etc., Cambridge Univ. Press, 1976.

24. *L. Dornhoff*, M-groups and 2-groups, Math. Z., **100**, No. 3 (1967), 226—256.

25. *H. N. Ward*, Automorphisms of quaternion-free 2-groups, Math. Z., **112**, No. 1 (1969), 52—58.

26. *Y. G. Berkovich, L. S. Kazarin*, Indices of elements and normal structure of finite groups, J. Algebra, **283**, No. 2 (2005), 564—583.

27. *A. Ballester-Bolinches, M. D. Pérez-Ramos*, On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group, Glasg. Math. J., **36**, No. 2 (1994), 241—247.

28. *B. Huppert*, Endliche Gruppen. I (Grundlehren mathem. Wiss. Einzeldarstel., **134**), Berlin a.o., Springer-Verlag, 1967.

29. *В. Н. Семечук*, Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы, Алгебра и логика, **18**, № 3 (1979), 348—382.

30. *B. Li*, On Π-property and Π-normality of subgroups of finite groups, J. Algebra, **334**, No. 1 (2011), 321—337.

31. *L. M. Ezquerro, X. Soler-Escrivà*, Some permutability properties related to $\mathfrak{F}$-hypercentrally embedded subgroups of finite groups, J. Algebra, **264**, No. 1 (2003), 279—295.

32. *P. Schmid*, Subgroup lattices of groups, Berlin, Walter de Gruyter, 1994.

33. *A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro*, A note on the Jordan–Hölder theorem, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **80** (1987), 25—32.

34. *S. Li, Z. Shen, J. Liu, X. Liu*, The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups, J. Algebra, **319**, No. 10 (2008), 4275—4287.

35. *X. Chen, W. Guo*, On the partial Π-property of subgroups of finite groups, J. Group Theory, **16**, No. 5 (2013), 745—766.

36. *Z. Chen*, On a theorem of Srinivasan (Chinese), J. Southwest Teach. Univ., Ser. B, 1987, No. 1, 1—4.

37. *Q. Zhang, L. Wang*, The influence of S-semipermutable subgroups on the structure of finite groups (Chinese), Acta Math. Sin., **48**, No. 1 (2005), 81—88.

38. *V. O. Lukyanenko, A. N. Skiba*, On weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups, Acta Math. Hung., **125**, No. 3 (2009), 237—248.

39. *С. Чен, В. Го*, О слабо S-вложенных и слабо τ-вложенных подгруппах, Сиб. матем. ж., **54**, № 5 (2013), 1162—1181.

40. *K. A. Al-Sharo*, On nearly S-permutable subgroups of finite groups, Commun. Algebra, **40**, No. 1 (2012), 315—326.

41. *W. Guo, A. N. Skiba*, Finite groups with systems of Σ-embedded subgroups, Sci. China, Math., **54**, No. 9 (2011), 1909—1926.

42. *S. Li, J. Liu*, A generalization of cover-avoiding properties in finite groups, Commun. Algebra, **39**, No. 4 (2011), 1455—1464.

43. *W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba*, Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups, Southeast Asian Bull. Math., **29**, No. 3 (2005), 493—510.

44. *Б. Ху, В. Го*, c-Полуперестановочные подгруппы конечных групп, Сиб. матем. ж., **48**, № 1 (2007), 224—235.

Поступило 16 января 2014 г.

Окончательный вариант 8 мая 2015 г.

Адреса авторов:

ЧЕН Сяу, матем. ф-т, Ун-т науки и технологии Китая, Хефей 230026, КИТАЙ. e-mail: jelly@mail.ustc.edu.cn

ГО Вэньбинь, матем. ф-т, Ун-т науки и технологии Китая, Хефей 230026, КИТАЙ. e-mail: wbguo@ustc.edu.cn

СКИБА Александр Николаевич, матем. ф-т, Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины, г. Гомель, 246019, БЕЛАРУСЬ.
e-mail: alexander.skiba49@gmail.com