Алгебра и логика, 40, N 5 (2001), 545—560

УДК 512.542

ФАКТОРИЗАЦИИ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

ГО ВЭНЬБИНЬ, А. Н. СКИБА

Все рассматриваемые здесь группы конечны. Формации — это классы групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация групп $\mathfrak{F}$ называется (разрешимо) насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, обладающая (разрешимой) нормальной подгруппой N такой, что $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$. Непустые насыщенные формации называют локальными. В силу теоремы Бэра (см. [1, гл. IV, 4.17]) непустые разрешимо насыщенные формации совпадают с композиционными, впервые введенными Л. А. Шеметковым [2, 3].

Теория локальных формаций в настоящее время является довольно развитой, в ней получено большое число ярких теорем и содержательных примеров. Особую роль занимают так называемые однопорожденные локальные формации. Напомним, что локальная формация $\mathfrak{F}$ называется однопорожденной, если найдется группа G такая, что $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением всех тех локальных формаций, которые содержат G. Как показано в [4, 5], решение многих вопросов теории локальных формаций сводится к исследованию соответствующих типов однопорожденных локальных формаций.

Композиционные формации введены с целью изучения внутреннего строения непростых (не обязательно разрешимых) групп. Хотя композиционные формации уже имеют много приложений (см. [3]), их систематическое изучение начато сравнительно недавно. Несмотря на очевидное родство в определениях композиционных и локальных формаций, спра-

© Сибирский фонд алгебры и логики, 2001

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ведливость многих известных в теории локальных формаций результатов до самого последнего времени остается неясной для композиционных формаций. В первую очередь это относится к результатам, связанным с произведениями формаций.

Напомним, что произведением $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ непустых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс всех групп G таких, что $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, где $G^{\mathfrak{H}}$ — пересечение всех нормальных в G подгрупп N со свойством $G/N \in \mathfrak{H}$. Такая операция ассоциативна на множестве всех формаций, и всякое представление формации $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1}\ldots\mathfrak{F}_t$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$, называется несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$ [5, гл. 3, с. 97]. В [5, гл. 3] описаны все возможные несократимые факторизации однопорожденных локальных формаций.

В данной статье приводится описание несократимых факторизаций вида $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ для однопорожденных композиционных формаций и композиционных подформаций формаций такого типа, что дает частичный ответ на вопрос 5.21 [5].

Нам необходимо следующее, восходящее к Л. А. Шеметкову и Р. Бэру, описание композиционных формаций. Пусть $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ — класс всех простых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$. Функция f, сопоставляющая каждой элементарной группе H некоторую (возможно, пустую) формацию $f(H)$, называется бэровской формационной функцией [1, гл. IV, 4.9] или композиционным экраном [3], если $f(A) = f(B)$ для любых двух элементарных групп A и B таких, что $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B)$.

Символом $CF(f)$ обозначается класс всех групп G таких, что $G \in CF(f)$ тогда и только тогда, когда либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$ для каждого главного фактора H/K из G. Если $\mathfrak{F} = CF(f)$, то говорят, что f — композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно теореме Р. Бэра [1, гл. IV, 4.17], непустая формация $\mathfrak{F}$ разрешимо насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = CF(f)$ для некоторого композиционного экрана f.

Пусть A — произвольная простая группа. Через $C^A(G)$ обозначается

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, чьи композиционные факторы изоморфны A (если же таких факторов нет, то полагают $C^A(G) = G$) [6]. В случае, когда $A = Z_p$ (группа простого порядка p), наряду с записью $C^{Z_p}(G)$ будем применять более короткую запись $C^p(G)$. Через $G_{E(A)}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой все композиционные факторы изоморфны группе A (при этом $G_{E(A)} = 1$, если G содержит неединичные нормальные подгруппы с таким свойством) [6].

ЛЕММА 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — композиционная формация с внутренним композиционным экраном m, $\mathfrak{H}$ — такая формация, что $\mathcal{K}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Если $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F} = CF(f)$, где*

$$f(A) = \begin{cases} m(Z_p)\mathfrak{H}, & \text{если } A = Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{F}, & \text{если } A \text{ — простая неабелева группа}, \\ \varnothing, & \text{если } A = Z_p \text{ абелева группа и } A \notin \mathcal{K}(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}_1 = CF(f)$, где f — композиционный экран из условия леммы.

Допустим, что $\mathfrak{M}_1 \nsubseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Понятно, что $R \subseteq G^{\mathfrak{H}}$ и $G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$. Пусть $R = A \times \ldots \times A$, где A — простая неабелева группа. Поскольку $G \in \mathfrak{M}$, то

$$G \cong G/1 = G/C_G(R) \in f(A) = \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору группы G. Значит, $R = Z_p \times \ldots \times Z_p$ — абелева группа. Допустим, что $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Тогда $f(Z_p) = m(Z_p)\mathfrak{H}$. Следовательно, $G/C^p(G) \in m(Z_p)\mathfrak{H}$, т. е. $G^{\mathfrak{H}}C^p(G)/C^p(G) \in m(Z_p)$, и поэтому $G^{\mathfrak{H}}/C^p(G) \cap G^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}/C^p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(Z_p)$. Поскольку $G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ и поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие, значит, $Z_p \notin \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Тогда $f(Z_p) = \varnothing$. С другой стороны, $G/C^p(G) \in f(Z_p)$, снова приходим к противоречию. Итак, $G \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{M}_1$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}_1$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{M}_1}$. Пусть A — композиционный фактор группы R. Ясно, что $G/C^A(G) \notin f(A)$. Допустим, A — неабелева группа. Тогда

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$f(A) = \mathfrak{F}$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G/C^A(G) \in f(A)$. Получили противоречие. Итак, $A = Z_p$ — абелева группа. Поскольку $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Допустим, что $G^{\mathfrak{H}} = 1$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$ и $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Значит, $f(Z_p) = m(Z_p)\mathfrak{H}$ и поэтому $G/C^p(G) \in \mathfrak{H} \subseteq m(Z_p)\mathfrak{H}$. Данное противоречие показывает, что $R \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, то $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Поэтому $f(Z_p) = m(Z_p)\mathfrak{H}$. Тогда

$$G^{\mathfrak{H}}/C^p(G^{\mathfrak{H}}) = G^{\mathfrak{H}}/C^p(G) \cap G^{\mathfrak{H}} \cong C^p(G)G^{\mathfrak{H}}/C^p(G) \in m(Z_p).$$

Отсюда $(G/C^p(G))^{\mathfrak{H}} \in m(Z_p)$, а следовательно, $G/C^p(G) \in m(Z_p)\mathfrak{H} = f(Z_p)$. Снова получили противоречие, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1$. Лемма доказана.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор композиционных экранов. Тогда через $\bigcap_{i\in I} f_i$ обозначается композиционный экран f такой, что $f(H) = \bigcap_{i\in I} f_i(H)$ для всех элементарных групп H.

Пусть теперь $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех композиционных экранов формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\bigcap_{i\in I} f_i$ также является композиционным экраном формации $\mathfrak{F}$, и его называют минимальным композиционным экраном формации $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 2 [6]. *Пусть $\mathfrak{F} = c\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — композиционная формация, порожденная классом групп $\mathfrak{X}$. Тогда минимальный композиционный экран f формации $\mathfrak{F}$ таков, что $f(A) = \mathrm{form}(G/C^A(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ при всех $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$, и $f(A) = \varnothing$ для любой простой группы $A \notin \mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Кроме того, если h — произвольный композиционный экран формации $\mathfrak{F}$, то $f(A) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(A) \cap \mathfrak{F}$ и $G_{E(B)} = 1$ для всех $B \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \setminus (A))$ для любой неабелевой группы $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ и*

$$f(A) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(A) \cap \mathfrak{F}, G_{E(A)} = 1)$$

для любой абелевой группы A из $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$.

ЛЕММА 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс группы G и π — произвольное непустое множество простых чисел. Тогда*

$$G/O_\pi(G) \in \mathrm{form}(A/O_\pi(A) \mid A \in \mathfrak{X}).$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = G/O_\pi(G)$. Тогда $O_\pi(T) = 1$. Предположим прежде, что T — монолитическая группа. Пусть $\mathfrak{X}_1 = H\mathfrak{X}$. Допустим, что $T \in \mathfrak{X}_1$. т. е. $T \cong A/N$ для некоторой группы $A \in \mathfrak{X}$. Поскольку $O_\pi(T) = 1$ и $O_\pi(A)N/N \subseteq O_\pi(A/N)$, то $O_\pi(A) \subseteq N$. Значит,

$$T \in \mathfrak{H} = \mathrm{form}(A/O_\pi(A) \mid A \in \mathfrak{X}).$$

Пусть $T \notin \mathfrak{X}_1$. Согласно [7, теор. 4.2.11] в формации $\mathrm{form}\mathfrak{X}$ найдется группа H с нормальными подгруппами $N, N_1, \ldots, N_t, M, M_1, \ldots, M_t$ ($t \geqslant 2$) такими, что выполняются следующие условия:

1) $H/N \cong T$ и $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$ и H/N_i — монолитическая $\mathfrak{X}_1$-группа с монолитом M_i/N_i ($i = 1, \ldots, t$);

3) $L_i = N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap M_i \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$ — такая минимальная нормальная в H подгруппа, что $L_iN_i = M_i$ и $L_i \nsubseteq N$ ($i = 1, \ldots, t$).

Из условий 1 и 2 имеем $T \in \mathrm{form}(H/N_1, \ldots, H/N_t)$. В силу условия 3, $L_i \cong L_iN_i/N_i = M_i/N_i \cong L_iN/N = M/N$. Поскольку $O_\pi(T) = 1$, то $O_\pi(H/N_i) = 1$, $i = 1, \ldots, t$. Следовательно, $H/N_1, \ldots, H/N_t \in \mathfrak{H} = \mathrm{form}(A/O_\pi(A) \mid A \in \mathfrak{X})$. Поэтому $T \in \mathrm{form}(A/O_\pi(A) \mid A \in \mathfrak{X})$.

Допустим теперь, что группа T не является монолитической и $N_1 \times \ldots \times N_t = \mathrm{Soc}(T)$, где N_i — минимальная нормальная в T подгруппа ($i = 1, \ldots, t$). Согласно [5, лемма 4.1.3], $T \in R_0(T/M_1, \ldots, T/M_t)$, где T/M_i — монолитическая группа с $O_\pi(T/M_i) = 1$. Понятно, что $T/M_i \in \mathrm{form}\mathfrak{X}$. Согласно уже доказанному, $T/M_i \in \mathfrak{H} = \mathrm{form}(A/O_\pi(A) \mid A \in \mathfrak{X})$. Следовательно, $T \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Напомним, что символом $c\mathrm{form}G$ обозначается пересечение всех композиционных формаций, содержащих данную группу G. Формации такого типа называют однопорожденными композиционными. Композиционная формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной, если $\mathfrak{F} \subseteq c\mathrm{form}G$ для некоторой группы G. Формация $\mathfrak{F}$ называется однопорожденной (ограниченной), если $\mathfrak{F} = \mathrm{form}G$ (соответственно $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{form}G$) для некоторой группы G.

ЛЕММА 4. *Пусть f — минимальный композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является однопорожденной (ограниченной)*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

композиционной в том и только в том случае, если $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$ содержит лишь конечное множество попарно неизоморфных групп и для каждой группы $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ формация $f(A)$ является однопорожденной (соответственно ограниченной).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{F} = c\mathrm{form}G$ ($\mathfrak{F} \subseteq c\mathrm{form}G$) для некоторой группы G. Пусть h — минимальный композиционный экран формации $c\mathrm{form}G$. Из леммы 2 вытекает, что $f = h$ (соответственно $f \leq h$). Согласно той же лемме $\mathcal{K}(G) = \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, и для всякой группы $A \in \mathcal{K}(G)$ формация $h(A)$ является однопорожденной. Следовательно, в $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное множество попарно неизоморфных групп, и для всякой группы $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ формация $f(A)$ является однопорожденной (соответственно ограниченной).

Достаточность. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — набор всех попарно неизоморфных групп в $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$, и пусть $G_1, \dots, G_n$ — такие группы, что $f(A_i) = \mathrm{form}G_i$ (соответствено $f(A_i) \subseteq \mathrm{form}G$), $i = 1, \dots, n$.

Пусть

$$T_i = \begin{cases} G_i, & \text{если } A_i \text{ — неабелева группа,} \\ Z_p \wr (G_i/O_{p_i}(G_i)), & \text{если } |A_i| = p_i \text{ — простое число.} \end{cases}$$

Пусть, кроме того, $G = T_1 \times \dots \times T_n$, $\mathfrak{F}_1 = c\mathrm{form}G$.

Покажем вначале, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть f_1 — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}_1$. Для доказательства включения $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$ достаточно лишь установить, что $f \leq f_1$, (т.е., $f(A_i) \subseteq f_1(A_i)$ для всех $i = 1, \dots, n$). Если A_i — неабелева группа, то согласно [3, теор. 3.2], $f_1(A_i) = \mathfrak{F}_1$. Поскольку $G_i = T_i \in \mathfrak{F}_1$, то $f(A_i) \subseteq \mathrm{form}G_i \subseteq f_1(A_i)$. Пусть $|A_i| = p_i$ — простое число. В силу лемм 2, 3 имеем $f(A_i) \subseteq \mathrm{form}(G_i/O_{p_i}(G_i))$. По [6, лемма 2], $C^p(T_i) = K$, где K — база сплетения $Z_{p_i} \wr (G_i/O_{p_i}(G_i))$. Значит, $T_i/C^{p_i}(T_i) = T_i/K = G_i/O_{p_i}(G_i) \in f_i(A_i)$, и поэтому $f(A_i) \subseteq f_1(A_i)$. Итак, $f \leq f_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Предположим теперь, что $f(A_i) = \mathrm{form}G_i$ при всех $i = 1, \dots, n$. Поскольку экран f является внутренним, из [3, гл. 3, лемма 3.11] вытекает, что $T_1, \dots, T_n \in \mathfrak{F}$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$, и поэтому $\mathfrak{F}_1 = c\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{F}$. Следо-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

вательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$ — однопорожденная композиционная формация. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ — формации и каждая простая группа в $\mathfrak{M}$ абелева. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{H}$, m — натуральное число, и пусть для каждого натурального числа i в A имеется нормальная подгруппа A_i такая, что A/A_i — простая группа. Предположим, что все группы последовательности*

$$G_1 = (A/A_1) \wr B, G_2 = (A/A_2) \wr G_1, \dots , G_t = (A/A_t) \wr G_{t-1}, \dots$$

принадлежат формации $\mathfrak{H}$. Тогда найдутся простое число $p \in \mathfrak{M}$ и группа $T \in \mathfrak{H}$ такие, что одна из подгрупп M группы T будет циклической порядка p^m и все минимальные нормальные в T подгруппы будут p-группами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|A| < \infty$, существуют простое число p и бесконечная последовательность индексов $i_1, i_2, \dots , i_n, \dots$ такие, что для всех $j = 1, 2, \dots$ имеет место $p \in \pi(A/A_{i_j})$, где $A_{i_j} \in \{A_i \mid i = 1, 2, \dots\}$. Пусть Z — некоторая группа порядка p и

$$T_1 = Z, T_2 = Z \wr T_1, \dots , T_{n+1} = Z \wr T_n, \dots .$$

Покажем: для каждого i найдется индекс j такой, что группа T_i изоморфна некоторой подгруппе из G_j. При $i = 1$ это очевидно.

Пусть $i > 1$, j — индекс такой, что группа T_{i-1} изоморфна некоторой подгруппе из G_j. Найдется индекс $t > j$, для которого $p \in \pi(A/A_t)$, т. е. Z изоморфна некоторой подгруппе из A/A_t. Тогда $T_i = Z \wr T_{i-1}$ изоморфна некоторой подгруппе из $G_t = (A/A_t) \wr G_{t-1}$ (см. [1; A, 18.2]).

Итак, при всяком натуральном i существует натуральное число j такое, что T_i изоморфна подгруппе из G_j. Пусть теперь P — произвольная p-группа, l — длина ее композиционного ряда. Применяя теорему Калужнина—Краснера (см. [8, теор. 6.2.8]) и тривиальную индукцию, видим, что группа P изоморфна подгруппе группы T_l. Значит, для каждой p-группы P найдется j такое, что P изоморфна подгруппе из $G_j \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq S(\mathfrak{H})$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Отсюда в $\mathfrak{H}$ содержится группа T такая, одна из подгрупп M которой является циклической порядка p^m и каждая минимальная нормальная подгруппа группы T является p-группой. Лемма доказана.

Представление формации $\mathfrak{F}$ в виде произведения

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_t, \tag{1}$$

где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ — формации и $t \geqslant 2$, называется факторизацией $\mathfrak{F}$. Факторизация (1) является несократимой, если $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1}\ldots\mathfrak{F}_t$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольный непустой класс групп. Тогда символом $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ обозначается формация $\mathrm{form}(A/O_p(A) \mid A \in \mathfrak{H})$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — несократимая факторизация композиционной формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является ограниченной композиционной тогда и только тогда, когда*

1) *$\mathfrak{M}$ — метанильпотентная однопорожденная локальная формация;*

2) *все абелевы композиционные факторы, встречающиеся у групп формации $\mathfrak{H}$, принадлежат $\mathfrak{M}$;*

3) *если формация $\mathfrak{M}$ не является примарной, то $\mathfrak{H}$ — ограниченная формация, причем эта формация абелева, если формация $\mathfrak{M}$ не нильпотентна;*

4) *для любых групп $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{H}$ экспоненты групп $A/F(A)$ и B взаимно просты;*

5) *если $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$ — примарная формация, то формация $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq c\mathrm{form}G$ и $|G| = m$. Обозначим через f минимальный композиционный экран формации $\mathfrak{F}$.

Покажем прежде, что каждая простая группа T из $\mathfrak{M}$ абелева. Предположим противное, и пусть T — произвольная простая неабелева группа из $\mathfrak{M}$. Рассмотрим сплетение $D = T \wr (B^m)$, где B — некоторая неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Пусть K — база этого сплетения. Согласно [5, лемма 3.1.9],

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

группа D является монолитической, и ее монолит совпадает с $K = \prod_{b \in B^m} T_1^b$, где T_1 — первая копия группы T в K. Понятно, что $D \in \mathfrak{F}$. По лемме 2

$$D \cong D/C_D(K) \in f(K) = \mathrm{form}(G/C^T(G)) \subseteq \mathrm{form}G.$$

Поскольку $|K| = |T|^{|B|^m} > m$, получаем противоречие с [5, лемма 3.1.5]. Таким образом, каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ является абелевой.

Докажем теперь, что формация $\mathfrak{M}$ разрешима. Предположим противное, и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{S}$. Обозначим через P монолит группы A. Тогда $P = A^{\mathfrak{S}}$. Как показано выше, каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева. Значит, $P \neq A$.

Пусть B — произвольная неединичная группа, принадлежащая формации $\mathfrak{H}$. Рассмотрим сплетение $D = A \wr (B^m)$. Допустим, что $\mathfrak{H}$-корадикал $D^{\mathfrak{H}}$ группы D входит подпрямо в базу сплетения D. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$, то $D^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, и поэтому $D \in \mathfrak{F}$. Пусть A_1 — первая копия группы A в базе сплетения D, и пусть L_1 — ее монолит. По [5, лемма 3.1.10], $\prod_{b \in B^m} L_1^b$ — монолит группы D. Если F — композиционный фактор группы P, то

$$D/C^F(D) \cong D \in f(F) \subseteq \mathrm{form}(G/C^F(G)),$$

что противоречит [5, лемма 3.1.5]. Итак, $D^{\mathfrak{H}}$ не входит подпрямо в базу сплетения D. Следовательно, по [5, лемма 3.1.9] в группе A найдется максимальная нормальная подгруппа M такая, что $(A/M) \wr (B^m) \in \mathfrak{H}$. Рассуждая аналогично, видим, что в A имеется максимальная нормальная подгруппа H такая, что $(A/H) \wr ((A/M) \wr (B^m)) \in \mathfrak{H}$, и т.д. Применяя теперь лемму 5, видим, что найдутся простое число p и группа $T \in \mathfrak{H}$ такие, что одна из подгрупп M группы T будет циклической группой порядка p^m и каждая минимальная нормальная в T подгруппа будет p-группой. Для любой группы X выполняется $Z(Z_o \wr X) \neq 1$, поэтому и согласно [4, лемма 3.32] в формации $\mathfrak{H}$ содержится группа Z_p порядка p.

Понятно, что $Z_p \in \mathfrak{F}$. Предположим, что множество $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$ содержит группу Z_p простого порядка $q \neq p$. Тогда $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{F}$. Легко видеть, что для любого простого числа $r \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место

$$\mathfrak{N}_r = (\mathfrak{N}_r \cap \mathfrak{M})(\mathfrak{N}_r \cap \mathfrak{H}).$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если $r \in \pi(\mathfrak{F})$, то, в силу [5, следствие 3.3.11], либо $\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{M}$, либо $\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{H}$. Рассмотрим следующие формально возможные случаи:

1) $Z_p \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть H — циклическая группа порядка q^m и $D = Z_p \wr H = [K]H$, где K — база сплетения D. Поскольку $K = C^p(D)$ и, очевидно, $D \in \mathfrak{F}$, то

$$D/C^p(D) \cong H \in f(Z_p) = \mathrm{form}(G/C^p(G)) \subseteq \mathrm{form}G,$$

а это противоречит [5, лемма 3.1.5].

2) $Z_p, Z_q \notin \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть P — произвольная простая группа из $\mathfrak{M}$. В силу доказанного выше P — абелева r-группа, где r — простое число, отличное от q. Таким образом, мы пришли к случаю 1.

3) $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{M}$. Рассмотрим сплетение $D = Z_p \wr T = [K]T$, где K — база сплетения D. Поскольку $C^q(D) = K$, то $D/C^q(D)$ содержит циклическую подгруппу порядка p^m. Так как

$$D/C^q(D) \in f(Z_p) = \mathrm{form}(G/C^q(G)) \subseteq \mathrm{form}G,$$

получаем противоречие с [5, лемма 3.1.5]. Следовательно, данный случай также не имеет места.

Значит, все абелевы группы в $\mathfrak{K}(\mathfrak{F})$ имеют порядок p.

Покажем теперь, что для любой группы $T \in \mathfrak{F}$ выполняется $D = T^{\mathfrak{H}} \wr (T/T^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$. Пусть $T^{\mathfrak{H}}/M$ — главный фактор группы T. Поскольку $T^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, то $T^{\mathfrak{H}}/M$ — p-группа. Значит, по [5, лемма 3.5.20], $T/M \in \mathrm{form}(Z_p \wr (T/T^{\mathfrak{H}}))$, где Z_p — группа порядка p. Следовательно, $Z_p \wr (T/T^{\mathfrak{H}}) \notin \mathfrak{H}$, и поэтому в силу [5, лемма 3.1.9] $\mathfrak{H}$-корадикал $D^{\mathfrak{H}}$ группы D входит подпрямо в базу сплетения D. Поскольку $T \in \mathfrak{F}$, то $T^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $D^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, и поэтому $D \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \nsubseteq \mathfrak{H}$, и пусть E — группа минимального порядка из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Поскольку в $\mathfrak{H}$ имеется группа порядка p, то $R = E^{\mathfrak{H}} \neq E$. Как и выше, можно показать, что $E \in \mathrm{form}(Z_p \wr (E/R))$, где Z_p — некоторая группа порядка p. Следовательно, $Z_p \wr (E/R) \notin \mathfrak{H}$. Отсюда вытекает, что у группы $T = A \wr (E/T)$ ее $\mathfrak{H}$-корадикал $T^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямо в базу сплетения. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$, то $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Ясно, что $T^{\mathfrak{H}} \neq 1$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Следовательно, если $D = T^m = T_1 \times \ldots \times T_m$, где $T_1 \cong T_2 \cong \ldots \cong T_m \cong T$, то $D^{\mathfrak{H}} \neq 1$ и $D \in \mathfrak{F}$. В силу показанного выше, $H = D^{\mathfrak{H}} \wr (D/D^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$. Пусть $t = |D/D^{\mathfrak{H}}|$. Очевидно, $D^{\mathfrak{H}} \subseteq T_1^{\mathfrak{H}} \times \ldots \times T_m^{\mathfrak{H}}$ и $T_i/T_i^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Значит, $t > m$. Отсюда, в силу [5, лемма 3.1.9], для любой минимальной нормальной в H подгруппы K имеем $|K| \geqslant t \geqslant m$.

Пусть F — простая неабелева группа, изоморфная композиционным факторам подгруппы $P = A^{\mathfrak{S}}$. Для минимальной нормальной подгруппы L в H нетрудно показать, что композиционные факторы L изоморфны F, т. е. L — неабелева группа и $|L| \geqslant m$. Пусть M — наибольшая нормальная в H подгруппа со свойством $L \not\subseteq M$. Тогда H/M — монолитическая группа, и ее монолит LM/M изоморфен L. Значит, $|LM/M| \geqslant m$. Так как $H/M \in \mathfrak{F}$, то H/M — гомоморфный образ от

$$H/C^F(H) \in f(F) \subseteq \mathrm{form}(G/C^F(G)) \subseteq \mathrm{form} G,$$

что противоречит [5, лемма 3.1.5]. Поэтому $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H}$ и E — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $R = E^{\mathfrak{H}}$. Пусть $R \cong A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \cong \ldots \cong A_t$ — простые группы. Поскольку $E \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $A_1 \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $A_1 \cong Z_p$. Тогда $E \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Учитывая полученное противоречие, имеем $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Последнее противоречит несократимости факторизации $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Итак, $\mathfrak{M}$ — разрешимая формация. Рассуждая аналогично [5, док-во теор. 3.5.21], видим, что формация $\mathfrak{M}$ является композиционной. Значит, $\mathfrak{M}$ — разрешимая локальная формация. Следовательно, $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть m — минимальный композиционный экран формации $\mathfrak{M}$.

Допустим, для некоторого простого числа p выполняется $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}) \setminus \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $Z_p \notin \mathfrak{M}$. Значит, если A — простая группа в $\mathfrak{M}$, то $|A| \neq p$. Пусть B — циклическая группа порядка p^m и $D = A \wr B = [K]B$. Тогда $D \in \mathfrak{F}$. Заметим, что $B \in f(A)$. Действительно, в силу показанного выше A — группа простого порядка $q \neq p$. По [6, лемма 2], $C^q(D) = K$, и поэтому $B \cong D/C^q(D) \in f(A)$. Итак, в формации $f(A)$ имеется группа экспоненты p^m. По [5, лемма 3.1.5] экспонента любой

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

группы из $f(A) \subseteq \mathrm{form}(G/C^A(G))$ не превосходит числа m. Данное противоречие показывает, что $\mathcal{K}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. Следовательно, по лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ имеет композиционный экран h такой, что $h(Z_p) = m(p)\mathfrak{H}$ для всех $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$.

Предположим, найдутся различные простые числа p и q такие, что $Z_q \in m(Z_p)$ и $q \in \pi(\mathfrak{H})$. Пусть H — некоторая qd-группа в $\mathfrak{H}$, и пусть $D = H^m$. Рассмотрим регулярное сплетение $T = Z_q \wr D$. Понятно, что $T \in m(Z_p)\mathfrak{H} = h(Z_p)$. Поскольку $O_p(T) = 1$, по лемме 3

$$T \in f(Z_p) \subseteq \mathrm{form}(G/C^p(G)) \subseteq \mathrm{form} G.$$

Если L — подгруппа порядка q из H, то согласно [5, лемма 3.1.7] ступень сплетения $Z_q \wr (L^m)$ не меньше, чем $m + 1 = |G| + 1$. Согласно [9, п. 22.13] в группе T имеется подгруппа, изоморфная группе $Z_q \wr (L^m)$. Таким образом, в формации $f(Z_p) = \mathrm{form}(G/C^p(G))$ содержится группа, один из нильпотентных факторов которой имеет ступень не меньшую чем $|G| + 1$. А это противоречит [5, лемма 3.1.5].

Итак, в дальнейшем можно считать, что если p и q — различные простые числа и группа Z_q порядка q принадлежит формации $m(Z_p)$, то $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Более того, покажем, что в такой ситуации формация $\mathfrak{H}$ является абелевой. Предположим противное, и пусть M — произвольная неабелева группа из $\mathfrak{H}$. Понятно, что $q \notin \pi(M)$. Пусть F_q — поле из q элементов, $\overline{F}_q$ — его алгебраическое замыкание. Поскольку группа M неабелева, то существует, по крайней мере, один неприводимый $\overline{F}_q[M]$-модуль T ранга $\geqslant 2$.

Пусть D — внешнее тензорное произведение (см. [9, § 43]) m экземпляров модуля T. Тогда $\overline{F}_q[M]$-модуль D неприводим (см. [9, § 27, упр. 1]), и его ранг не меньше 2^m. Значит, найдется неприводимый $F_q[M^m]$-модуль L такой, что D — прямое слагаемое модуля $L^{\overline{F}_q}$ (см. [9, § 29, упр. 8]). Последнее означает, что ранг модуля L не меньше 2^m. Поскольку $M \in \mathfrak{H}$ и L — элементарно абелева q-группа, то $R = [L]M^m \in m(Z_p)\mathfrak{H}$. Поскольку $m(Z_p)\mathfrak{H} = h(Z_p)$, то, по лемме 2, $R/O_p(R) \in f(Z_p)$. Заметим, что группа $R/O_p(R)$ обладает главным фактором $LO_p(R)/O_p(R)$ порядка $\geqslant q^{2^m}$, а это

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

противоречит [5, лемма 3.1.5]. Итак, $\mathfrak{H}$ — абелева формация.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — метанильпотентная формация. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$. Согласно [5, лемма 2.1.11] в $\mathfrak{M}$ имеется минимальная локальная не метанильпотентная подформация $\mathfrak{H}_1$. По [5, следствие 2.4.11] имеем $\mathfrak{H}_1 = l\mathrm{form}A$, где $A = [P]([Q]N)$ — монолитическая группа с монолитом $P = C_A(P)$, $Q = C_{[Q]N}(Q)$, N — неединичная нильпотентная группа. Пусть $\{p\} = \pi(P)$, $\{q\} = \pi(Q)$. В силу [3, лемма 3.9], $O_p(N) = 1$. Поскольку $F_q(A) = C^q(A) = PQ$, в $m(Z_q)$ имеется группа Z_r простого порядка $r \neq q$. Значит, $\mathfrak{H}$ — абелева формация, и $\pi(N) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Пусть $T = A \wr (B^m)$, где B — некоторая неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Пусть K — база сплетения T, A_1 — первая копия группы A в T, а подгруппы P_1 и Q_1 в A_1 соответствуют подгруппам P и Q в группе A при изоморфизме A на A_1. По [5, лемма 3.1.10], $R = \prod_{b\in B^m} P_1^b$ — монолит группы T, и $T/R \cong ([Q]N) \wr (B^m)$.

Пусть M_1 — первая копия группы $[Q]N$ в базе сплетения $E = ([Q]N) \wr (B^m)$, и Q_2 — подгруппа из M_1, соответствующая подгруппе Q при изоморфизме групп $[Q]N$ и M_1. По [5, лемма 3.1.10] группа E является монолитической, и ее монолит $L = \prod_{b\in B^m} Q_2^b$.

Допустим, $T \notin \mathfrak{F}$. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$, подгруппа $T^{\mathfrak{H}}$ не входит подпрямо в K. Значит, в A_1 найдется собственная нормальная подгруппа M такая, что $(A_1/M)\wr(B^m) \in \mathfrak{H}$. Тогда $\pi(N)\cap\pi(\mathfrak{H}) \neq \varnothing$. Данное противоречие показывает, что $T \in \mathfrak{F}$. Значит, $T/C^p(T) \in f(Z_p)$. Нетрудно заметить, что R обладает дополнением в T. Значит, $R = C_T(R)$, и поэтому $C^p(T) = R$. Следовательно, $T/R \cong E \in f(Z_p) \subseteq \mathrm{form}(G/C^p(G))$. У группы T/R имеется минимальная нормальная подгруппа порядка $\left|\prod_{b\in B^m} Q_2^b\right| > m$, а это противоречит [5, лемма 3.1.5]. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ — однопорожденная локальная формация. В силу [5, лемма 1.4.4] всякая локальная подформация из $\mathfrak{M}$ наследственна. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда по [4, лемма 8.9] в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное множество локальных подформаций. Пусть

$$(1) = \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{M} \text{ —}$$

такая цепь локальных формаций, что $\mathfrak{M}_i$ — максимальная локальная под-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

формация в $\mathfrak{M}_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Пусть $H_i \in \mathfrak{M}_i \setminus \mathfrak{M}_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\mathfrak{M} = l\mathrm{form}\{H_1, \dots, H_n\} = l\mathrm{form}(H_1 \times \dots \times H_n),$$

т. е. $\mathfrak{M}$ — локальная однопорожденная формация. Итак, $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 1.

Предположим теперь, что формация $\mathfrak{M}$ не нильпотентна. Тогда найдется $p \in \pi(\mathfrak{M})$ такое, что $(1) \subset m(Z_p)$. Поскольку формация $\mathfrak{M}$ метанильпотентна, то $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}$. По лемме 2, $m(Z_p) \cap \mathfrak{N}_p = (1)$. Поэтому в $m(Z_p)$ имеется группа простого порядка $q \neq p$. В этом случае, как установлено выше, формация $\mathfrak{H}$ абелева. Значит, $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{M})$. Понятно также, что $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ формацию $\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid p \in \pi(G))$. Понятно, что $\mathfrak{F}_1$ — разрешимая однопорожденная формация. Согласно [10] в $\mathfrak{F}_1$ имеется лишь конечное множество подформаций. Значит, каждая подформация из $\mathfrak{F}_1$ является однопорожденной (см. выше доказательство того, что $\mathfrak{M}$ — однопорожденная локальная формация). Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть A — произвольная монолитическая группа из $\mathfrak{H}$. Тогда A — циклическая p-группа для некоторого простого числа p. Пусть $q \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus \{p\}$ и $T = Z_p \wr A$. Ясно, что $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ и поэтому $T/C^p(T) \cong A \in f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, все монолитические группы из $\mathfrak{H}$ принадлежат формации $\mathfrak{F}_1$. Отсюда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$ и, следовательно, $\mathfrak{H}$ — однопорожденная формация.

Пусть формация $\mathfrak{H}$ неабелева. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Допустим, что $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Тогда, как и выше, можно доказать, что формация $\mathfrak{H}$ ограничена. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$ для некоторого простого числа p. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}) = \mathrm{form}(A/O_p(A) \mid A \in \mathfrak{H})$ — ограниченная формация. Пусть $A \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим сплетение $T = Z_p \wr (A/O_p(A))$. Тогда $T \in \mathfrak{F}$ и

$$A/O_p(A) \cong T/C^p(T) \in f(Z_p) = \mathrm{form}(G/C^p(G)).$$

Итак, $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ — ограниченная формация.

Достаточность. Покажем прежде, что в $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$ имеется конечное множество неизоморфных групп. Пусть $\mathfrak{M} = c\mathrm{form}G = l\mathrm{form}G$ и $\pi = \pi(G)$. По лемме 2 класс $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$ с точностью до изоморфизма содержит лишь ко-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

нечное множество простых групп. Поскольку $\mathfrak{H}$ (или $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$) — ограниченная формация, то в $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ также имеется лишь конечное множество неизоморфных групп. Итак, в $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$ содержится лишь конечное множество неизоморфных групп. Если $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{H}$ — абелева формация, и поэтому формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — локальная формация. Применяя [5, теор. 3.1.17] к формациям $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, получаем, что $\mathfrak{F}$ — однопорожденная локальная, а значит, и однопорожденная композиционная формация.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда для каждой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеет место $F(G) \subseteq \subseteq C^A(G)$, а значит, и $G^{\mathfrak{H}} \subseteq C^A(G)$ для всех простых групп A. Таким образом, согласно лемме 2, минимальный композиционный экран f формации $\mathfrak{F}$ таков, что $f(A) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех простых групп $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. В силу леммы 4, $\mathfrak{F}$ — ограниченная композиционная формация. Теорема доказана.

С небольшими изменениями в доказательстве теоремы 1 получается

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — несократимая факторизация композиционной формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является однопорожденной композиционной тогда и только тогда, когда*

1) $\mathfrak{M}$ — *метанильпотентная однопорожденная локальная формация;*

2) *все абелевы композиционные факторы, встречающиеся у групп формации $\mathfrak{H}$, принадлежат $\mathfrak{M}$;*

3) *если формация $\mathfrak{M}$ не является примарной, то $\mathfrak{H}$ — однопорожденная формация, причем эта формация абелева, если формация $\mathfrak{M}$ не нильпотентна;*

4) *для любых групп $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{H}$ экспоненты групп $A/F(A)$ и B взаимно просты;*

5) *если $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$ — примарная формация, то формация $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ однопорождена.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Doerk, T. Hawkes*, Finite soluble groups, Berlin—New York, Walter de Gruyter, 1992.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2. *Л. А. Шеметков*, Два направления в развитии теории непростых конечных групп, Успехи матем. наук, **30**, N 2 (1975), 179–198.
3. *Л. А. Шеметков*, Формации конечных групп, М., Наука, 1978.
4. *Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба*, Формации алгебраических систем, М., Наука, 1989.
5. *А. Н. Скиба*, Алгебра формаций, Минск, Беларуская навука, 1997.
6. *А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков*, О минимальном композиционном экране композиционной формации, в сб.: "Вопр. алгебры", **7**, Гомель, 1992, 39–43.
7. *Guo Wenbin*, The theory of group classes, Beijing, Science Press, 1997.
8. *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков*, Основы теории групп, М., Наука, 1972.
9. *Ч. Кэртис, И. Райнер*, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., Наука, 1969.
10. *R. M. Bryant, R. A. Bryce, B. Hartley*, The formation generated by a finite group, Bull. Aust. Math. Soc., **2**, N 3 (1970), 347–357.

Адреса авторов:
Го Вэньбинь,
КИТАЙ,
221009, г. Худжоу,
Худжоуский нормальный
университет.
e-mail: yzgwb@pub.yz.jsinfo.net

Поступило 3 февраля 2000 г.

СКИБА Александр Николаевич,
БЕЛАРУСЬ,
246699, г. Гомель,
ул. Советская, 104,
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины.
e-mail: skiba@gsu.unibel.by

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ