МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 41, № 4 (1987)

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С НИЛЬПОТЕНТНЫМ ДЕФЕКТОМ 2

А. Н. Скиба, Е. А. Таргонский

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая локальная формация конечных групп, $\mathfrak{H}$ — непустой класс групп. Определим индуктивно понятие $\mathfrak{H}$-дефекта формации $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ положим равным нулю. $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ полагаем равным n (n — натуральное число), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, в $\mathfrak{F}$ имеется максимальная локальная подформация $\mathfrak{H}$-дефекта $n-1$ и среди других максимальных локальных подформаций из $\mathfrak{F}$ нет ни одной с $\mathfrak{H}$-дефектом меньшим, чем $n-1$.

В данной заметке дается классификация локальных формаций конечных групп с $\mathfrak{N}$-дефектом (или иначе с нильпотентным дефектом) 2. Работа примыкает к исследованиям авторов [1], [2], где были описаны соответственно минимальные локальные ненильпотентные формации и ненильпотентные локальные формации, все предмаксимальные локальные подформации которых нильпотентны.

Все рассматриваемые здесь группы предполагаются конечными. Для любых двух совокупностей групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ символом $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$ будем обозначать формацию $\mathrm{lform}\ (\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

ЛЕММА 1. *Решетка локальных формаций модулярна.*

Доказательство. Покажем прежде, что для любых трех формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, справедливо, что

$$\mathfrak{H} \cap \mathrm{form}\ (\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) = \mathrm{form}\ (\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})).$$

Для этого установим, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{H} \cap \mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{L} = \mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}))$. Пусть $A \in \mathfrak{R}$. Тогда $A \simeq G/N$, где $G \in \mathrm{R}_0\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F})$ и $A \in \mathfrak{H}$. Понятно, что $G^{\mathfrak{M}} \cap G^{\mathfrak{H}} = 1$ и A — гомоморфный образ фактор-группы $G/G^{\mathfrak{H}}$. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{M}}$. Значит, $G^{\mathfrak{M}} \cap G^{\mathfrak{H}}G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{H}}\,(G^{\mathfrak{M}} \cap G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, фактор-группа $G/G^{\mathfrak{H}}$ — подпрямое произведение фактор-групп $(G/G^{\mathfrak{H}})/(G^{\mathfrak{M}}/G^{\mathfrak{H}})$ и $(G/G^{\mathfrak{H}})/(G^{\mathfrak{H}}G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{H}})$. Поэтому $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathrm{R}_0\,(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}))$. Значит, $A \in \mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}))$. Таким образом, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{L}$.

Пусть теперь f_i — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Предположим, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_2 \cap (\mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3)$. Пусть m_1 — такой локальный экран, что для всякого простого числа p $m_1(p) = \mathrm{form}\,(f_1(p) \cup f_3(p))$. Тогда по лемме 1.3 [3] $\mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{F}_3 = \langle m_1 \rangle$, а по лемме 3.7 [4] $\mathfrak{M} = \langle f_2 \cap m_1 \rangle$. С другой стороны, $\mathfrak{H} = \langle t \rangle$, где t — такой локальный экран, что для всех простых p $t(p) = \mathrm{form}\,(f_1(p) \cup (f_2(p) \cap f_3(p)))$. Но включение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ влечет вложение $f_1 \leqslant f_2$. Значит, $f_1(p) \subseteq f_2(p)$. Следовательно, ввиду доказанного в предыдущем абзаце $\mathrm{form}\,(f_1(p) \cup f_3(p)) \cap f_2(p) = \mathrm{form}\,(f_1(p) \cup (f_2(p) \cap f_3(p)))$. Значит, $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — локальные формации, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда, если найдутся такие локальные формации $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_i$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}_{i-1}$ $(i = 2, \ldots, n)$, то будем писать $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H}|_l = n$. Если же $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то положим $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H}|_l = 0$. Для произвольных двух локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, символом $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{M}$ обозначим решетку всех локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации. Тогда, если n — $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$, то $n = |\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_l$.*

Доказательство леммы проведем индукцией по n. Утверждение очевидно при $n = 0, 1$. Пусть $n \geqslant 2$ и лемма справедлива при всех $k \leqslant n - 1$. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ такую максимальную локальную подформацию в $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$-дефект которой равен $n - 1$. Пусть $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1$. Тогда, ввиду леммы 1, имеет место решеточный изоморфизм $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{F}_1/\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}$. Так как $|\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}|_l = n - 1$, то из последнего вытекает, что в $\mathfrak{F}$ найдется такая максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}_2$, что

$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$, и $\mathfrak{H}$-дефект $\mathfrak{F}_2$ равен $n-2$. Но тогда $\mathfrak{H}$-дефект $\mathfrak{F}_1$ равен $n-1$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$, и поэтому $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1$. Значит, $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_l = n$.

ЛЕММА 3. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда, если m и n — $\mathfrak{H}$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $m \leqslant n$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1 решетки $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})/_l\, \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} /_l \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{M} /_l \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ изоморфны. Значит, утверждение леммы 3 — следствие леммы 2.

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{R}$. Тогда, если m, r и t — $\mathfrak{H}$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $t \leqslant m + r$.*

Доказательство леммы проведем индукцией по $m + r$. Основание индукции тривиально. Пусть $m + r \geqslant 1$. Тогда $\mathfrak{H}$-дефект хотя бы одной из формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{R}$ положителен. Пусть, например, $m \geqslant 1$. Обозначим через $\mathfrak{M}_m$ такую максимальную локальную подформацию из $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$-дефект которой равен $m-1$. Ввиду соображений индукции, $\mathfrak{H}$-дефект t_1 формации $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M}_m \vee_l \mathfrak{R}$ не превосходит $m - 1 + r$. Покажем, что $t \leqslant m + r$. Это справедливо, если $t = t_1$. Пусть $t_1 \neq t$. Тогда, ввиду решеточного изоморфизма $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{R}/_l \mathfrak{M}_m \vee_l \mathfrak{R} \simeq \mathfrak{M}/_l (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M}) \vee_l \mathfrak{M}_m$, формация $\mathfrak{F}_1$ является максимальной локальной подформацией в $\mathfrak{F}$. В силу изоморфизмов $\mathfrak{F}_1/_l\, \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{H}/_l \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}/_l \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{F} \vee_l \mathfrak{H}/_l \mathfrak{H}$, леммы 2 и условия $t \neq t_1$ заключаем, что $\mathfrak{F} \vee_l \mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} \vee_l \mathfrak{H}/_l \mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{F}/_l \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F} \vee_l \mathfrak{H}$. Последнее означает, что $t_1 = t - 1$. Но $t_1 \leqslant m - 1 + r$. Следовательно, $t \leqslant m + r$.

Напомним, что минимальные локальные ненильпотентные формации — это ненильпотентные локальные формации, все нетривиальные локальные подформации которых нильпотентны [5].

ЛЕММА 5. *В точности тогда нильпотентный дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — нильпотентная локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, при этом:* 1) *всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{R})$;* 2) *всякая ненильпотентная локальная подформация $\mathfrak{H}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как формация $\mathfrak{F}$ не нильпотентна, то по лемме 3.1 [6] в $\mathfrak{F}$ входит некоторая минимальная локальная ненильпотентная формация $\mathfrak{H}$. По условию $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь вытекает из леммы 4. Докажем справедливость второго утверждения леммы. Так как $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{H}$, то из решеточного изоморфизма $((\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}) \vee_l \mathfrak{M}) \vee_l \mathfrak{H}/_l$ $/_l (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}) \vee_l \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{H}/_l\mathfrak{H} \cap ((\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}) \vee_l \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}/_l\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}$ следует, что $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}) \vee_l \mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Следовательно, поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$, то всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}) \vee_l \mathfrak{M}$. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}_1$, отличная от $\mathfrak{H}$. Пусть m, f, h и h_1 — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_1$. Тогда, ввиду леммы 1.3 [3], для всякого простого числа p $f(p) = \mathrm{form}\,(h(p) \cup m(p))$. Пусть формация $\mathfrak{H}$ разрешима. Тогда разрешимой является и формация $\mathfrak{H}_1$. По теореме 4 [1] найдутся такие группы Шмидта H и H_1, что $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, H$, $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{lform}\, H_1$. Пусть $\pi(H) = \{p, q\}$, причем в H инвариантна силовская p-подгруппа. Тогда экран f таков, что $f(p) = \mathrm{form}\; Z_q$, где Z_q — группа порядка q и $f(t) = \mathfrak{E}$ при всех $t \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$. Ввиду леммы 4 [1], $h_1 \leqslant f$. Значит, $\pi(H_1) = \{p, q\}$, и в H_1 инвариантна силовская p-подгруппа. Последнее, в силу лемм 3, 4 [1], означает, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Противоречие. Значит, формация $\mathfrak{H}$ не разрешима. По теореме 4 [1] $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, где G — некоторая простая неабелева группа. Следовательно, экран f таков, что $f(p) = \mathrm{form}\, G$ при всех $p \in \pi(G)$ и $f(p) = \mathfrak{F}$ при всех $p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(G)$. Используя теперь теорему 4, а также леммы 3,4 [1], заключаем, что $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{lform}\; G = \mathfrak{H}$. Последнее противоречит определению формации $\mathfrak{H}_1$. Таким образом, в формации нет минимальных локальных ненильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}$. Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная ненильпотентная локальная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда, в силу леммы 3.1 [6], $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, ввиду леммы 1, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}) = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$.

Локальную формацию $\mathfrak{F}$ назовем *приводимой*, если $\mathfrak{F} = \mathrm{lform} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — множество всех собственных локальных подформаций из $\mathfrak{F}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая локальная формация. В точности тогда нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, *а* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_2$ — *различные минимальные локальные ненильпотентные формации;*

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — *неприводимая локальная формация, нильпотентный дефект которой равен* 2.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Тогда, ввиду леммы 4, нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ не превосходит 2. Ввиду лемм 4 и 5, $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$ — локальная формация с нильпотентным дефектом 2. Значит, в силу леммы 3, нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 2. Случай, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2), очевиден.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — такая максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, нильпотентный дефект которой равен 1. Тогда по лемме 5 $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}_1$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}_2$, отличная от $\mathfrak{H}_1$. Ввиду леммы 5, $\mathfrak{H}_2 \not\subseteq \mathfrak{F}_1$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M})$, т. е. в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть теперь в $\mathfrak{F}$ нет минимальных локальных ненильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$. Индукцией по $|\pi(\mathfrak{F})|$ покажем, что в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Так как по условию $\mathfrak{F}$ — приводимая локальная формация, то в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ найдется такая группа G, что $\mathfrak{F}_0 = \mathrm{lform}\, G \neq \mathfrak{F}$. Пусть n — нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}_0$. Ввиду условия теоремы и леммы 3, $n \leqslant 2$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{F}_0$, то в силу леммы 4 $n \geqslant 1$. Пусть $n = 1$. Тогда $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}) \vee_l (\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}_1) = \mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{M}_1 \vee_l \mathfrak{M}_2)$. Последнее, ввиду леммы 3, противоречит условию. Значит, $n = 2$. Понятно, что $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{F}_0$. Следовательно, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}_0$. Поэтому $|\pi(\mathfrak{F}_0)| < |\pi(\mathfrak{F})|$. Таким образом, если $\mathfrak{F}_0$ — приводимая локальная формация, то мы можем считать, что $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{M}_3 \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация, нильпотентный дефект которой равен 2 и $\mathfrak{M}_3 \not\subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{F} = (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{M}_3) \vee_l \mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Это же справедливо и в случае, если $\mathfrak{F}_0$ — неприводимая локальная формация, так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_0 \neq \mathfrak{F}$.

ТЕОРЕМА 2. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом R, что либо R — неабелева группа, G/R — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и $\pi(R) \subseteq \pi(G/R)$, либо $G = R \leftthreetimes H$, где $R = C_G(R)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп:*

1) *простая неабелева p'-группа;*

2) *$Q \leftthreetimes N$, где $Q = C_{Q \leftthreetimes N}(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в $Q \leftthreetimes N$ $(q \neq p)$, а N — либо группа порядка p, либо прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и $p, q \in \pi(N)$;*

3) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \neq p$;*

4) *циклическая примарная группа порядка q^2, где q — простое число $\neq p$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация, то всякая собственная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация. Пусть f и m — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$. Тогда по лемме 2.1 [6] $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{M}}$, что для всякого $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}})$ $f(p)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p m(p))$-формация (т. е. $f(p) \not\subseteq \mathfrak{N}_p m(p)$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_p m(p)$ для всякой собственной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $f(p)$).

Ввиду условия теоремы, нильпотентный дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Значит, по лемме 5 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. По теореме 4 [1] $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, где G — либо группа Шмидта, либо некоторая простая неабелева группа. Рассмотрим сначала случай, когда формация $\mathfrak{M}$ неразрешима. Тогда по лемме 3 [1] $m(t) = \mathrm{form}\, B$ при всех $t \in \pi(B)$ и $m(t) = \mathfrak{E}$ при всех $t \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus \pi(B)$. Предположим, что $G^{\mathfrak{M}}$ неабелева группа. В этом случае по лемме 4 [7] экран m таков, что $m(p) = \mathrm{form}\,((G/G^{\mathfrak{M}})/O_p(G/G^{\mathfrak{M}}))$ при всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}})$ и $m(p) = \mathrm{form}\,(G/F_p(G))$ при всех $p \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{M}})$. Следовательно, поскольку для всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}})$ и $q \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{M}})$

справедливо, что $O_p(G/G^{\mathfrak{M}}) \subseteq F_q(G/G^{\mathfrak{M}})$ и, кроме того, $F_q(G/G^{\mathfrak{M}}) = F_q(G)/G^{\mathfrak{M}}$, то $G/G^{\mathfrak{M}}$ — прямое произведение изоморфных копий группы B. Пусть найдется такое простое число p, что $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}}) \setminus \pi(G/G^{\mathfrak{M}})$. Тогда $p \notin \pi(B)$. Следовательно, в силу первого описания экрана m $m(p) = \mathfrak{E}$. Но из второго описания m следует, что $m(p) = \mathrm{form}\ (G/G^{\mathfrak{M}})$. Противоречие. Значит, $\pi(G^{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(G/G^{\mathfrak{M}})$. Таким образом, в рассматриваемом случае G удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $G^{\mathfrak{M}}$ — p-группа. Легко показать, что в $f(p) \setminus m(p)$ найдется такая монолитическая группа A, что $O_p(A) = 1$. Понятно, что $f(p) = \mathrm{form}\, A$. Обозначим через L монолит группы A. Ввиду следствия 53.56 [8], $\mathrm{form}\ (A/L) \neq f(p)$. Значит, $(A/L)/O_p(A/L) \in m(p)$. Предположим, что $p \notin \pi(B)$. Тогда $m(p) = \mathfrak{E}$. Следовательно, A/L — p-группа. Пусть $p \in \pi(L)$. Тогда, поскольку $O_p(A) = 1$, то L — неабелева группа. Значит, $F_p(A) = 1$. Следовательно, поскольку $A \notin m(p)$, то $A \notin \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, A$. Пусть $q \in \pi(B)$. Ввиду леммы 1 [1], это означает, что $q \in \pi(L)$. Ввиду леммы 4 [1], $m \leqslant f$. Значит, $B \in f(q) = \mathrm{form}\ (A/F_q(A)) = \mathrm{form}\, A$. По лемме 3 [7] $\mathrm{form}\ (A/L)$ — единственная максимальная подформация $f(q)$. Следовательно, $\mathrm{form}\, A = \mathrm{form}\, B$. Это означает, что $A \simeq B$. Но тогда $p \in \pi(B)$. Противоречие. Таким образом, $p \notin \pi(L)$. Ввиду леммы 1 [1] $\mathrm{lform}\, A \neq \mathfrak{F}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Пусть $q \in \pi(L)$. Допустим, что L является q-группой. Тогда очевидно $L = F_q(A)$. Следовательно, $A/L \in m(q)$. Но A/L — p-группа. Значит, $A = L$ — группа порядка q. В этом случае $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, T$, где T — группа Шмидта. Но тогда, ввиду леммы 5, нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Значит, L — неабелева группа. Следовательно, $F_q(A) = 1$. Поэтому $A \simeq A/F_q(A) \in m(q) = \mathrm{form}\ B$. Так как при этом группа A монолитична, то $A \simeq B$. Пусть P — точный неприводимый $GF(p)[B]$-модуль, $N = P \leftthreetimes B$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, N$ и N удовлетворяет условию 1).

Пусть $p \in \pi(B)$, $q \in \pi(L) \setminus \{p\}$. Предположим, что L — неабелева группа. Тогда $A \in f(q)$. Так как $G^{\mathfrak{M}}$ — q'-группа, то $G/F_q(G) \simeq (G/G^{\mathfrak{M}})/(F_q(G)/G^{\mathfrak{M}}) = (G/G^{\mathfrak{M}})/F_q(G/G^{\mathfrak{M}})$. Значит, $m(q) = f(q)$. Из этого следует, что $A \simeq B$. Но тогда $A \in m(p)$. Противоречие. Следовательно, в рассматриваемом случае группа L абелева. Пусть $H = L \leftthreetimes (A/C_A(L))$. По лемме 7.21 [9, гл. 6],

$H \in f(p)$. При этом ясно, что $\mathrm{lform}\, H \neq \mathfrak{F}$. Значит, $H \in \mathfrak{M}$. Поэтому $H/F_q(H) \simeq A/C_A(L) \in m(q)$. Легко видеть, что $C_A(L) \neq A$. Следовательно, $A/C_A(L)$ — прямое произведение групп, изоморфных B. Пусть P — точный неприводимый $GF(p)$ $[H]$-модуль и $M = P \rightthreetimes H$. Нетрудно заметить, что $\mathrm{lform}\, M = \mathfrak{F}$ и что $q \in \pi(B)$. Таким образом, группа M удовлетворяет условию 2).

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{H} \bigcup \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. По теореме 2.3 [6] $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, D$, где D — такая монолитическая группа с монолитом P, что либо P — неабелева группа, совпадающая с $\mathfrak{A}$-корадикалом группы D, либо $D = P \rightthreetimes H$, где $P = C_D(P)$ — p-группа, а H — одна из следующих групп: а) $Q \rightthreetimes N$, где $Q = C_{Q \rightthreetimes N}(Q) = (Q \rightthreetimes N)^{\mathfrak{A}} \neq 1$ — минимальная нормальная q-подгруппа в $Q \rightthreetimes N$; б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; в) группа кватернионов порядка 8. Легко видеть, что найдется такое $l \in \pi(\mathfrak{M})$, что $m(l) = \mathrm{form}\, F$, где F — группа простого порядка $c \neq l$ и $m(r) = \mathfrak{E}$ при всех $r \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus \{l\}$. Пусть P — неабелева группа. Тогда по лемме 4 [7] $m(t) = \mathrm{form}((D/P)/O_t(D/P))$ при всех $t \in \pi(P)$. Пусть $r \in \pi(P) \setminus \{l\}$. Тогда, с одной стороны, $m(r) = \mathfrak{E}$, с другой — $m(r) = \mathrm{form}((D/P)/O_r(D/P))$. Значит, D/P — r-группа. Следовательно, поскольку $|\pi(P) \setminus \{l\}| \geqslant 2$, то D — простая неабелева группа. Ввиду теоремы 4 [1], $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, D$ имеет нильпотентную максимальную локальную подформацию. Это противоречит условию. Значит, P — абелева группа. Пусть H удовлетворяет условию а). Тогда по лемме 4 [7] $m(p) = \mathrm{form}(N/O_p(N))$, $m(q) = \mathrm{form}\, N$ и $m(t) = \mathfrak{E}$ при всех $t \in \pi(N) \setminus \{p\}$. Сравнивая такое описание экрана m с данным выше, заключаем, что $l = q$ и $p = c$. Отсюда вытекает, что $N \in \mathrm{form}\, F$. Являясь неприводимой абелевой группой автоморфизмов, группа N циклична, т. е. $|N| = c$. Таким образом, в рассматриваемом случае группа H удовлетворяет условию 2). Пусть H удовлетворяет условию в). Тогда по следствию 2.3.1 [6] в этом случае найдется такое простое число t, что $m(t)$ — формация абелевых групп экспоненты 4. Но это противоречит приведенному выше описанию экрана m. Значит, рассматриваемый случай невозможен.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Так как формация $\mathfrak{M}$ локальна, то

$G^{\mathfrak{M}} \nsubseteq \Phi(G)$. Следовательно, $G^{\mathfrak{M}}$ имеет в G дополнение T. Понятно, что $G^{\mathfrak{M}} = F(G)$. Значит, $T \in \mathfrak{A}$. Так как при этом T — неприводимая группа автоморфизмов, то T — циклическая группа. Применяя теперь лемму 1.4 [3] заключаем, что $|T| = q^2$, где q — простое число $\neq p$. Таким образом, G удовлетворяет условию 4).

Достаточность. Пусть R — неабелева группа. По лемме 4 [7] в $\mathfrak{F}$ имеется лишь одна максимальная локальная подформация $\mathfrak{M}$, минимальный локальный экран m которой таков, что $m(p) = \mathrm{form}\,(G/R)$ при всех $p \in \in \pi(G)$. Так как G/R — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и $\pi(R) \subseteq \pi(G/R)$, то $\mathfrak{M} = = \mathrm{lform}\,(G/R)$, и по теореме 4 [1] $\mathfrak{M}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Следовательно, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2.

Пусть H удовлетворяет условию 1). Обозначим через $\mathfrak{M}$ формацию $\mathrm{lform}\, H \vee_l \mathfrak{N}_p$, а через m — ее минимальный локальный экран. Так как $m(p) = \mathfrak{E}$ — единственная максимальная подформация в $f(p)$ (здесь, как и выше, f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$) и, как нетрудно заметить, $f(t) = m(t)$ при всех простых $t \neq \neq p$, то $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная собственная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, h — ее минимальный локальный экран. Тогда $h \leqslant f$, причем найдется такое простое число t, что $h(t) \neq f(t)$. Если $t = p$, то $h(t) \subseteq \mathfrak{E} = m(t)$. Значит, $h \leqslant m$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $h(p) = f(p)$. Тогда, ввиду леммы 3.11 [4], $G \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Это противоречит определению формации $\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация. По лемме 5 нильпотентный дефект $\mathfrak{M}$ равен 1. Значит, $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2.

Пусть H удовлетворяет условию 2). Тогда, ввиду леммы 4 [7], $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация, причем минимальный локальный экран m максимальной локальной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ таков, что $m(p) = = \mathrm{form}(N/O_p(N))$ и $m(t) = \mathrm{form}\, N$ при всех $t \in \pi(N) \setminus \{p\}$. Пусть $|N| = p$. Тогда $m(p) = \mathfrak{E}$, $m(q) = \mathrm{form}\, N$. В этом случае $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M}$, т. е. нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 2. Пусть N — неабелева группа. Тогда $O_p(N) = 1$. Значит, при всех $t \in \pi(G)$ справедливо, что $m(t) = \mathrm{form}\, N$.

Последнее означает, что $\mathfrak{M} = \mathrm{lform}\, N$. Следовательно, в силу теоремы 4 [1] нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 2.

Случаи, когда H удовлетворяет одному из условий 3) или 4), очевидны.

Гомельское отделение
института математики АН БССР

Поступило
28.12.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Скиба А. Н. О критических формациях // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981, № 3. С. 33—38.
[2] Таргонский Е. А. О локальных формациях с нильпотентными немаксимальными собственными локальными подформациями // Вопросы алгебры. Вып. 1 / Минск: изд-во Белорусского госуниверситета. 1985.
[3] Скиба А. Н. О формациях с заданными системами подформаций // Подгрупповое строение конечных групп / Минск: Наука и техника, 1980.
[4] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[5] Шеметков Л. А. Экраны ступенчатых формаций // VI Всесоюз. симпоз. по теории групп / Киев: Наукова думка, 1980.
[6] Скиба А. Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности. Труды Института математики СО АН СССР. Т. 4./ Новосибирск: Наука, 1984.
[7] Скиба А. Н. О минимальных локальных не π-сверхразрешимых формациях // Вопросы алгебры. Вып. 1 / Минск: изд-во Белорусского госуниверситета, 1985.
[8] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
[9] Huppert B. Endliche Gruppen. Heidelberg: Springer, 1967.