УДК 512.542

В.Н. Княгина

О разрешимости конечных групп с перестановочными подгруппами Шмидта четного порядка

Рассматриваются только конечные группы. Все определения и обозначения стандартны, их можно найти в [1, 2]. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучению таких групп положила работа О.Ю. Шмидта [3]. Возможности больших приложений групп Шмидта к исследованию групп впервые заметил С.А. Чунихин еще в 1929 году [4], обратив внимание на то, что строение группы тесно связано с наличием у нее того или иного множества подгрупп Шмидта. Им было также установлено, что каждая не p-нильпотентная группа содержит p-замкнутую pd-подгруппу Шмидта. Вопросам существования 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка посвящены работы Я.Г. Берковича [5] и В.С. Монахова [6]. В частности, В.С. Монахов доказал, что в любой группе, за исключением разрешимых групп 2-длины не более 2, существует недополняемая 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного индекса. Я.Г. Беркович и Э.М. Пальчик [7] исследовали группы, у которых подгруппы Шмидта перестановочны с некоторыми другими подгруппами.

В настоящей заметке устанавливается разрешимость групп с 2-замкнутыми и 2-нильпотентными подгруппами Шмидта, обладающими определенными свойствами.

Напомним необходимые определения и обозначения. Группа с нормальной силовской 2-подгруппой называется 2-замкнутой. Если в группе имеется дополнение к силовской 2-подгруппе и это дополнение является нормальной подгруппой, то группа называется 2-нильпотентной. pd-Группа – это группа, порядок которой делится на простое число p. Группа, порядок которой делится только на простые числа p и q, называется $\{p, q\}$-группой. Говорят, что подгруппы A и B перестановочны, если $AB = BA$, т.е. множество всех элементов $x = ab$, где $a \in A$, $b \in B$ образует подгруппу. Пусть H – подгруппа группы G. Через H^G обозначим нормальную оболочку подгруппы H, т.е. подгруппу, порожденную всеми сопряженными с H подгруппами группы G. Таким образом, $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$.

Следуя [6], группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть $S_{<p,q>}$-группой. Для $S_{<p,q>}$-группы будем использовать запись $[P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа.

Лемма 1 (лемма 1.5 [6]). *Если в группе G нет p-замкнутых подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

Лемма 2 (следствие 3.1.1 [6]). *Любая группа либо 2-замкнута, либо в ней существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта.*

Лемма 3 (следствие 3.2.2 [6]). *В любой группе, за исключением разрешимых групп 2-длины ≤ 2, существует недополняемая 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного индекса.*

Лемма 4 (лемма 1.8 [6]). *Если K и D – подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D – $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

(1) L – p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа;

(2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;

(3) L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L$.

Лемма 5 (предложение 1 [5]). *Неразрешимая группа G содержит $S_{<p,2>}$-подгруппу H для некоторого $p \in \pi(G)$ такую, что H не содержится в разрешимом радикале группы G и из условия $G = HK$ для некоторой подгруппы K группы G следует, что $G = K$.*

Лемма 6 (лемма VI.4.10 [2]). *Пусть A и B – подгруппы группы G и $G \neq AB$. Если $AB^x = B^x A$ для всех $x \in G$, то либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

Лемма 7 ([8]). *Подгруппа группы G, перестановочная с несколькими подгруппами $A_1, A_2, ..., A_k$ из G, перестановочна с их порождением $< A_1, A_2, ..., A_k >$.*

Лемма 8 (лемма 4 [9]). *Пусть A и B – подгруппы Шмидта простой группы G. Если $G = AB$, то $G \cong PSL(2,5)$ или $PSL(2,11)$.*

Теорема 1. *Пусть в группе G каждая 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима. Ясно, что условия теоремы наследуются всеми подгруппами группы G. Проверим, что это верно и для факторгрупп. Пусть $K \lhd G$, а A/K – 2-замкнутая, B/K – 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка. Пусть A_1 – минимальное добавление к подгруппе K в группе A, а B_1 – минимальное добавление к подгруппе K в группе B. По лемме 4 подгруппы A_1 и B_1 содержат подгруппы Шмидта C и D, для которых $C^{A_1} = A_1, D^{B_1} = B_1$. По условию, подгруппы C^x и D^y перестановочны для любых x и y из G. Тогда C^x по лемме 7 перестановочна с $D^{B_1} = B_1$ для всех x из G. Теперь, B_1 перестановочна с A_1. Так как $A = A_1K$, $B = B_1K$, то A и B перестановочны. Таким образом, подгруппы A/K и B/K перестановочны, т.е. условия теоремы наследуются факторгруппами.

Предположим, что группа G не простая. Пусть N – собственная неединичная нормальная подгруппа группы G. По индукции подгруппа N и факторгруппа G/N разрешимы, следовательно разрешима и группа G. Противоречие. Значит, группа G простая. Если в группе G нет 2-замкнутых подгрупп Шмидта четного порядка, то по лемме 1 группа G 2-нильпотентна, а значит разрешима. Если в группе G нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то по лемме 3 группа G разрешима. Значит, мы должны рассмотреть случай, когда в группе G имеются 2-замкнутые и 2-нильпотентные подгруппы Шмидта четного порядка.

Пусть A – 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка, а B – 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка. Предположим, что $AB \neq G$. Так как $AB^x = B^x A$ для всех $x \in G$, то группа G по лемме 6 непроста. Противоречие. Значит, $AB = G$ для любой 2-замкнутой подгруппы Шмидта A и любой 2-нильпотентной подгруппы Шмидта B группы G. Тогда выполняются условия леммы 8 и группа $G \cong PSL(2,5)$ либо $G \cong PSL(2,11)$. Но в группе $G \cong PSL(2,5)$ имеются подгруппы Шмидта $A \cong A_4$ и $B \cong S_3$, причем $AB \neq G$. В группе $G \cong PSL(2,11)$ имеются подгруппы Шмидта $A \cong A_4$ и $B \cong [Z_5]Z_2$, причем $AB \neq G$. Получили противоречие. Значит, группа G разрешима. Теорема доказана.

Подгруппа A группы G называется *полунормальной*, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и для каждой подгруппы B_1 из B произведение AB_1 является подгруппой группы G.

Теорема 2. *Если в группе G все 2-нильпотентные подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны, то G разрешима.*

Доказательство индукцией по порядку группы G. Предположим, что группа G неразрешима. Тогда по лемме 5 в группе G существует 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка H не добавляемая в G. По условию, подгруппа H полунормальна в группе G, поэтому H перестановочна со всеми подгруппами группы G.

Пусть x – произвольный элемент группы G. Так как $HH^x \neq G$ и $HH^g = H^gH$ для всех $g \in G$, то $H^G \neq G$ по лемме 6. Кроме того, все 2-нильпотентные подгруппы Шмидта, содержащиеся в подгруппе H^G, полунормальны в ней. Значит, для подгруппы H^G выполняются условия теоремы, и по индукции H^G разрешима.

Обозначим через $D = \prod H^G$ произведение нормальных оболочек всех 2-нильпотентных подгрупп Шмидта группы G. Ясно, что D – нормальная разрешимая подгруппа группы G. Рассмотрим факторгруппу G/D. Предположим, что она содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта K/D. Тогда по лемме 4 в минимальном добавлении L к подгруппе D в группе K существует 2-нильпотентная подгруппа Шмидта $[P]Q$ такая, что $([P]Q)^L = L$ и $[P]Q$ не содержится в D. Получили противоречие. Значит, в G/D нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта. Теперь по лемме 2 факторгруппа G/D 2-замкнута, значит G разрешима. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 2 условие 2-нильпотентности нельзя заменить условием 2-замкнутости. Так, в группе $PSL(2,5)$ все 2-замкнутые подгруппы Шмидта четного порядка изоморфны знакопеременной группе A_4. Они имеют индекс 5, поэтому полунормальны в $PSL(2,5)$. Но группа $PSL(2,5)$ не является разрешимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. – М., 1978. – 272 с.
2. **Huppert B.** Endliche Gruppen, I. Berlin-Heidelberg-New York, 1967. – 792 s.
3. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Математический сборник, 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
4. **Чунихин С.А.** О специальных группах // Матем. сб. – 1929. – Т. 4, № 3. – С. 512–530.
5. **Беркович Я.Г.** Условие, необходимое для совпадения группы с коммутантом // Известия высших учебных заведений. Математика, 1968, № 8(75). – С. 11–18.
6. **Монахов В.С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // В сб.: Вопросы алгебры. Гомель, 1998, № 13. – С. 153–171.
7. **Беркович Я.Г., Пальчик Э.М.** О перестановочности подгрупп конечной группы // Сибирский математический журнал, 1967, т. 8, № 4. –С. 741–753.
8. **Ore O.** On the application of structure theory to groups // Bull. Amer. Math. Soc., 1938. – V. 44. – P. 801–806.
9. **Монахов В.С.** Произведение двух групп Шмидта // Докл. АН БССР. – 1975. – Т. 19, № 1. – С. 8–11.

SUMMARY

Solvability of finite groups with 2-closed and 2-nilpotent Schmidt's subgroups, which possess the certain properties, is established.

Поступила в редакцию 11.04.2003