С. Н. Быков, Р. В. Бородич
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

ОБ ОПЕРАТОРНО-ОБОБЩЁННОЙ ПОДГРУППЕ ФРАТТИНИ

Введение. Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп восходит к работе Фраттини [1].

Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов [2–6].

Определение 1. Система операторов A в G называется группой, если A обладает следующими свойствами:

1) Произведение двух операторов из A есть снова оператор из A.

2) Тождественный (единичный) оператор $E(n)$ принадлежит A.

3) Для каждого оператора $U \in A$ существует обратный оператор U^{-1}, и этот обратный оператор принадлежит A.

Определение 2. Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда A – допустимую нормальную подгруппу H группы G назовем операторно-обобщённой подгруппой Фраттини, если $G=N_G(K)$ для каждой нормальной подгруппы L из G и каждой A-допустимой силовской подгруппы K из L такой, что $G=HN_G(K)$.

Теорема. Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и H – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы. Тогда

1) H – нильпотентная подгруппа группы G;

2) любая нормальная подгруппа, содержащаяся в операторно-обобщенной подгруппе Фраттини, является операторно-обобщенной подгруппой Фраттини;

3) если $\Delta(G) \neq G$, то $\Delta(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G;

4) $H\Phi(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G;

5) $HZ(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(H)$ и K – силовская р-подгруппа подгруппы H. По обобщенной лемме Фраттини $G=N_G(K)H$. Так как H – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G, то $G=N_G(K)$. Итак, любая силовская p-подгруппа из H нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа H p-нильпотентна для любого простого числа $p \in \pi(H)$, следовательно, H – нильпотентная подгруппа группы G. Пусть Q – нормальная подгруппа, содержащаяся в операторно-обобщенной подгруппе Фраттини H. Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие силовские р-подгруппы K из L, что $G=QN_G(K)$. Из того, что $Q \subseteq H$, следует, что $G=HN_G(K)$ и $G=N_G(K)$. Следовательно, Q – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G.

Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие силовские р-подгруппы K из L, что $G=\Delta(G)N_G(K)$. По лемме 1 $N_G(K)$ –

абнормальная подгруппа группы $\boldsymbol{G}$, следовательно, $\boldsymbol{N_G(K)}$ содержится в некоторой абнормальной максимальной подгруппе $\boldsymbol{T}$. Так как $T \supseteq \Delta(G)$, то $\boldsymbol{G=T}$. Из полученного противоречия получаем, что $\boldsymbol{G=N_G(K)}$, а это означает, что $\boldsymbol{\Delta(G)}$ **–** операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2 Gaschütz, W. Über die-Untergruppen endlicher Gruppen / W.Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – P. 160–170.

3 Beidleman, J. C. On Frattini-like subgroups / J. C.Beidleman, H. Smith // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.

4 Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

5 Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

6 Монахов, В. С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, №4. – С. 31–33.