

В. А. Васильев

(ГТУ им. Ф. Скорины, Гомель)

О ГРУППАХ С СУБМОДУЛЯРНЫМИ НОРМАЛИЗАТОРАМИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппа M группы G называется модулярной в G , если M является модулярным элементом решетки всех подгрупп группы G [1, разд. 2.1]. Это означает, что выполняются следующие условия: (1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и (2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$. Всякая нормальная, всякая квазинормальная (т.е. перестановочная с каждой подгруппой группы) подгруппа является модулярной. Пример симметрической группы S_3 на 3 символах показывает, что обратное в общем случае не выполняется.

В работе [2] И. Циммерман было введено понятие субмодулярной подгруппы, которое обобщает понятие субнормальной подгруппы.

Определение [2]. Подгруппа H группы G называется субмодулярной в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$$

такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \dots, s$.

В [2] были установлены свойства субмодулярных подгрупп и начато изучение групп с заданными субмодулярными подгруппами, в частности, с субмодулярными силовскими подгруппами. В [3] был рассмотрен класс smU всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами и установлен ряд его свойств, выделен и изучен важный собственный подкласс из smU : класс sU всех сильно сверхразрешимых групп (т.е. сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами). Например, доказано [3], что smU и sU образуют наследственные насыщенные формации, найдены их локальные экраны, установлены критерии принадлежности группы классам smU и sU .

В настоящем сообщении получен следующий результат.

Заметим, что всегда группа $G \in smU$, если нормализатор в G любой силовской подгруппы из G есть субмодулярная в G подгруппа.

Теорема. Если нормализатор в G любой силовской подгруппы группы G является субмодулярной подгруппой в G , то G сильно сверхразрешима.

Следствие. Если любая подгруппа группы G субмодулярна в G , то G сильно сверхразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1 Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

2 Zimmermann, I. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

3 Васильев, В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В. А. Васильев // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.