ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО МНОЖЕСТВА МНОГОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В. Г. Ермаков

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$ — конечная область с достаточно гладкой и гомеоморфной сфере границей Γ. Рассматривается задача отыскания l гармонических в области Ω функций $u_1, \ldots, u_l$, удовлетворяющих граничному условию

$$(1) \qquad p_{k1} \cdot \operatorname{grad} u_1 + \ldots + p_{kl} \circ \operatorname{grad} u_l = f_k \qquad (k = 1, \ldots, l),$$

где p_{kj} — заданные на Γ достаточно гладкие вектор-функции, а точка обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$. Предполагается выполненным условие Лопатинского, в силу которого

$$(2) \qquad \det \Phi(\tau) \neq 0,$$

где $\Phi(\tau) = \| p_{kj} \cdot (-\nu + i\tau) \|_1^l$, а τ и ν — соответственно единичный касательный вектор и единичный вектор внутренней нормали к Γ.

Гомотопическая классификация задач (1), (2) при $n = 2$ и различных ограничениях на p_{kj} проведена в [1], [2]. Ниже указана топологическая структура множества $\mathfrak{M}$ задач (1), (2), для которых символические матрицы Φ строятся по аналогии с символом Ботта (см. [3]) следующим образом. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — заданные на Γ комплексные векторы с мнимыми частями, коллинеарными нормали к Γ, т.е. $p_k = q_k - ic_k\nu$ $(k = 1, \ldots, n)$, и $b(p_1) = p_1 \cdot (-\nu + i\tau)$. Тогда матрица $\Phi(\tau) = b(p_1, \ldots, p_n)$ определяется индуктивно соотношением $(m \geqslant 2)$:

$$b(p_1, \ldots, p_m) = \begin{pmatrix} p_1 \cdot (-\nu + i\tau)E & b(p_2, \ldots, p_m) \\ -b^*(p_2, \ldots, p_m) & \bar{p}_1 \cdot (-\nu - i\tau)E \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Существует такая сколь угодно малая деформация векторов $p_1, \ldots, p_n$, что условие (2) для задачи из $\mathfrak{M}$ становится эквивалентным невырожденности на Γ векторных полей*

$$\rho_\pm = (q_1 \cdot \nu, \ldots, q_n \cdot \nu, \; |A| \pm \sqrt{|A_1|^2 + \ldots + |A_{n+1}|^2}),$$

где $|A|$ — определитель матрицы A, в которой первая строка образована из компонент вектора ν, а остальные — из компонент векторов $q_1, \ldots, q_n$, соответственно; A_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ — матрица, полученная из A заменой ее k-го столбца столбцом $(0, c_1, \ldots, c_n)'$.

Теорема 1. *Пусть $\sigma_\pm$ — вращения по Γ полей $\rho_\pm$, отвечающих задаче $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$. Тогда*

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A} = (-1)^n(\sigma_+ + \sigma_-).$$

Теорема доказывается с помощью формул для индекса из [4] и [5]. При $n = 2$ она получена В. И. Шевченко [6].

Теорема 2. *σ_+ и σ_- образуют полный набор гомотопических инвариантов множества $\mathfrak{M}$, при этом для любых целых чисел l и m в $\mathfrak{M}$ имеются задачи, для которых $(\sigma_+, \sigma_-) = (l, m)$.*

Доказательство состоит в проведении одновременной гомотопической классификации двух векторных полей ρ_+ и ρ_- при условии сохранения их вида при гомотопиях. Благодаря явному заданию полей $\rho_\pm$, необходимые представители компонент связности строятся легко. Например, пусть $\Gamma = \{(x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \colon \|x\| = 1\}$, $m \geqslant l \geqslant 0$ и $\alpha + i\beta = \left(x_1 + ix_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m-l} \left(x_1 + ix_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^l$. Тогда задача, удовлетворяющая условию $(\sigma_+, \sigma_-) = (l, m)$, при четном n строится так: $q_1 = \alpha\nu + (0, x_{n+1}, 0, \ldots, 0, -x_2)$, $q_2 = \beta\nu + (x_{n+1}, 0, \ldots, 0, -x_1)$, $q_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $q_n = (0, \ldots, 0, 1, 0)$; $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, функция $c_n = 2$ в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $c_n = 0$ вне некоторой малой окрестности этой точки.

Следствие. *Пусть $\varkappa$ — произвольное целое число. Задачи из $\mathfrak{M}$, имеющие индекс $\varkappa$, образуют счетное семейство гомотопических классов.*

Аналогичный результат для нетеровых краевых задач с интегродифференциальными операторами указан в [7].

Пусть $\mathfrak{N}$ — подмножество задач из $\mathfrak{M}$, отвечающих действительным векторам $p_1, \ldots, p_n$, а σ — вращение поля, в которое превращаются поля $\rho_\pm$ при $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Справедлива

Теорема 3. *Индекс задачи является в $\mathfrak{N}$ единственным гомотопическим инвариантом, принимает любые четные значения и равен* $(-1)^n 2\sigma$.

При $n = 2$ эта теорема доказана В. И. Шевченко [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вольперт А. И. Эллиптические системы на сфере и двумерные сингулярные интегральные уравнения//Мат. сб.—1962.— Т. 59(101).— С. 195—214.

[2] Шевченко В. И. Гомотопическая классификация краевых задач типа наклонной производной для системы двух гармонических функций.—В кн.: Мат. физика: вып. 7.—Киев: Наукова думка, 1970.— С. 185—192.

[3] Федосов Б. В. Аналитические формулы для индекса эллиптических операторов// Тр. ММО.—1974.— Т. 30.— С. 159—241.

[4] Федосов Б. В. Об индексе эллиптической системы на многообразии//Функцион. анализ и его прил.—1970.— Т. 4, вып. 4.— С. 57—67.

[5] Ермаков В. Г. Явная формула индекса одной краевой задачи для системы гармонических функций//ДАН УССР. Сер. А.—1981.— № 5.— С. 6—7.

[6] Шевченко В. И. Вычисления вращения некоторого векторного поля.— В кн.: Мат. физика, вып. 16.— Киев: Наукова думка, 1974.— С. 185—190.

[7] Фролов П. А. О топологической структуре эллиптических краевых задач в пространстве//Функцион. анализ и его прил.—1984.— Т. 18, вып. 2.— С. 81—82.

Гомельский государственный университет

Поступило в Правление общества 25 ноября 1987 г.