УДК 535.42

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАБЛИЧЕСКИХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. III. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ КУММЕРА – КУММЕРА И ТРИКОМИ – КУММЕРА С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN PARABOLIC ROTARY COORDINATES. III. SPATIOTEMPORAL WAVE PACKETS OF KUMMER – KUMMER AND TRICOMI – KUMMER WITH THE CONTINUOUS ANGULAR INDEX

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для пространственно-временных волновых пакетов Куммера – Куммера и Трикоми – Куммера с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах. Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких мод, чтобы они переносили конечную мощность.

Ключевые слова: *пространственно-временные волновые пакеты*, *параболические вращательные координаты*, *моды Куммера – Куммера*, *моды Трикоми – Куммера.*

Analytical expressions in the closed form for spatiotemporal wave packets of Kummer-Kummer and Tricomi-Kummer with continuous angular index m in parabolic rotary coordinates are offered and analyzed. Physical restrictions on possible values of free parameters of such modes that they transfer finite power are formulated.

Keywords: *spatiotemporal wave packets*, *parabolic rotary coordinates*, *modes Kummer – Kummer*, *modes Tricomi – Kummer.*

Введение

Поиск новых типов оптических полей ведется как в направлении нахождения новых решений, так и направлении обобщения уже известных решений. В последнее время нами изучаются световые поля, описываемые комплексными амплитудами с непрерывным угловым индексом m. Настоящая работа является продолжением работ [1]–[2], где изучались возможные новые типы световых полей типа Куммера – Куммера ($K-K$) и Трикоми – Куммера ($T-K$). Амплитуды таких полей с непрерывным угловым индексом m являются точными решениями волнового уравнения в параболических вращательных координатах.

Достаточно общее решение волнового уравнения для световых монохроматических волн в параболических вращательных безразмерных координатах можно записать в виде [1], [2]

$$E = e^{i(Q+T)} \cdot \left(X+iY\right)^m \times$$
$$\times(a_1 M_- + a_2 M_{1-} + a_3 U_- + a_4 \tilde{U}_-)\times$$
$$\times(a_5 M_+ + a_6 M_{1+} + a_7 U_- + a_8 \tilde{U}_-).$$

Здесь представленные функции

$$M_{\pm 1} = (R \pm Q)^{-m} M\left(a-m, 1-m; \mp i(R \pm Q)\right),$$
$$M_{\pm} = M\left(a, m+1; \mp i(R \pm Q)\right),$$
$$U_{\pm} = U\left(a, m+1; \mp i(R \pm Q)\right),$$
$$\tilde{U}_{\pm} = e^{\mp i(R \pm Q)} U\left(m+1-a, m+1; \pm i(R \pm Q)\right)$$

выражаются через функции Куммера M и Трикоми U. Безразмерные координаты и переменные:

$$kx = X;\ ky = Y;\ kz = Z;$$
$$\omega t = T;$$
$$k\rho = k\sqrt{x^2+y^2} = R_{\perp} = \sqrt{X^2+Y^2};$$
$$R = kr = \sqrt{X^2+Y^2+Q^2};$$
$$Q = Z - iZ_0.$$

Независимыми функциями в E можно выбрать по одной функции из каждой скобки, например $U_+ M_{-1}$. В общем случае параметры a комплексные, т. е. $a = a' + ia''$. В [1], [2] исследовались новые виды световых полей типа $K-K$ и $T-K$.

В данной работе этот подход распространяется на более общие решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. Получены выражения, описывающие пространственно-временные волновые пакеты (*ПВВП*) $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m и обсуждаются физически приемлемые значения их свободных параметров.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

© *Гиргель С.С.*, 2021

1 *ПВВП К – К* в параболических вращательных координатах

Амплитуда реального пучка, чтобы последний переносил конечную мощность, должна удовлетворять условиям квадратичной интегрируемости (КИ). В работах [1], [2] нами было установлено, что для непараксиальных пучков $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m путем подбора параметров можно, в лучшем случае, добиться, чтобы амплитуда E убывала как $E \to R_\perp^{-1}$ при $R_\perp \to \infty$, т. е. квази-КИ. Поэтому в настоящей работе будут найдены новые дополнительные решения волнового уравнения с непрерывным угловым индексом m, описывающие так натываемые *ПВВП К – К* и *Т – К* в параболических вращательных координатах и обладающие строго *КИ*.

Известно, что если $f(X,Y,Z,T)$ является решением волнового уравнения, то, согласно первому преобразованию Бейтмена [3]–[5] в безразмерном виде

$$f(X,Y,Z,T) \to f_1(X,Y,Z,T) =$$
$$= \frac{1}{Z+T} f\left(\frac{BX}{Z+T}, \frac{BY}{Z+T}, \frac{S^2-B^2}{2(Z+T)}, \frac{S^2+B^2}{2(Z+T)}\right), \quad (1.1)$$

где $S^2 = R^2 - T^2$, функция $f_1(X,Y,Z,T)$ также является решением волнового уравнения. Это преобразование пригодно для любого решения волнового уравнения и дает новые решения из известных. Большинство авторов (Besiries [6], [7], Utkin [8], Borisov [9]) полагают $B=1$, тем самым исключая случай $B=0$. Однако Hillion [10], [11] полагает B произвольным комплексным числом. Мы также считаем, что в преобразовании Бейтмена (1.1) параметр B может быть любым, и, в частности, равным нулю. Компьютерное моделирование в системе Maple подтверждает вывод о том, что допустим параметр $B = 0$.

Чтобы избавиться от неопределенности при $Z+T \to 0$ произведем комплексификацию координаты Z в (1.1) соотношением $Z \to Q = Z - iZ_0$. Здесь $Z_0 > 0$, а Q – безразмерный комплексный параметр пучка, широко применяемый в теории гауссовых световых пучков.

Предварительно применим преобразование (1.1) к волне $E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m$, которая обладает бесконечной энергией и бесконечной переносимой мощностью. Тогда получаем

$$E = \frac{1}{Q+T}\left(\frac{X+iY}{Q+T}\right)^m \times$$
$$\times \exp\left(\frac{i(X^2+Y^2)}{Q+T}\right) \cdot \exp(i(Z-T)). \quad (1.2)$$

Это выражение описывает гауссов *ПВВП*, движущийся вдоль оси *OZ* со скоростью $v_{фаз} = \omega / k$. Его амплитуда убывает по гауссову закону в направлениях, перпендикулярных оси *OZ*. Поэтому пакет (1.2) переносит конечную мощность и является аналогом сфокусированной волновой моды (*focus wave mode*) с внедренным оптическим вихрем. Его перетяжка движется в противоположном направлении *Z*. При $m \neq 0$ – пакет полый. Здесь и далее полагаем угловой индекс m непрерывным, $m \geq 0$.

А. Обсудим применение комплексифицированного $(Z \to Q = Z - iZ_0)$ преобразования Бейтмена (1.1) для следующего решения

$$E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m \cdot M_+ M_-$$

[1], [2], описывающего пучки $K-K$ в параболических вращательных безразмерных координатах. Получаем *ПВВП К – К* с амплитудой

$$E(sM_+M_-) = \frac{1}{Q+T}\left(\frac{X+iY}{Q+T}\right)^m \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right) \times \quad (1.3)$$
$$\times M\left(a, m+1; i\frac{\sqrt{4B^2R_\perp^2 + (S^2-B^2)^2} - (S^2-B^2)}{2(Q+T)}\right) \times$$
$$\times M\left(a, m+1; -i\frac{\sqrt{4B^2R_\perp^2 + (S^2-B^2)^2} + (S^2-B^2)}{2(Q+T)}\right).$$

Здесь и далее нижний индекс s при амплитуде E означает spatio, т. е. *ПВВП*. Полагая затем, для простоты, $B=0$, $\mathrm{Re}(S-B) > 0$ в (1.3), находим амплитуду

$$E(sMM) = \frac{1}{Q+T}\left(\frac{X+iY}{Q+T}\right)^m \exp\left(i\frac{S^2}{Q+T}\right) \times$$
$$\times M\left(a, m+1; -i\frac{S^2}{Q+T}\right).$$

Здесь вторая функция Куммера M обратилась в константу, которую мы не пишем.

Применяя преобразование Куммера к оставшейся функции M, получаем *ПВВП К* в упрощенной форме с амплитудой

$$E(sM) = \frac{1}{Q+T}\left(\frac{X+iY}{Q+T}\right)^m \times$$
$$\times M\left(m+1-a, m+1; i\frac{iS^2}{Q+T}\right). \quad (1.4)$$

По сравнению с общим решением (1.3) здесь, благодаря ограничению $B=0$, осталась одна функция M вместо двух, исчезли корни в ее аргументе и исчез гауссиан. Последнее выражение (1.4) описывает локализованные *ПВВП*ы. Поскольку (1.4) является строгим решением волнового уравнения, то *ПВВП*ы можно также назвать сфокусированными волновыми модами или даже световыми пулями. Амплитуда *ПВВП* экспоненциально убывает в поперечных оси *OZ* направлениях. Это подтверждает также графическое моделирование интенсивности рассматриваемых полей. При $a=0$ выражение (1.4)

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

редуцируется к амплитуде, которая описывает гауссов *ПВВП*.

Проанализируем условия КИ для *ПВВП* (1.4). Условие КИ: $E \to R_\perp^d$, причем $d < -1$. Согласно Флюгге, [12, с. 304], при $|L| \to \infty$

$$M(a,b,L) \to \frac{e^{-i\pi a}\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} L^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} L^{a-b} e^L,$$

если $a \neq 0, -1, -2, ...$ Без ограничения общности можно при анализе не учитывать зависимости от Q и T. Тогда, при $R_\perp^2 = X^2 + Y^2 \to \infty$ получаем

$$E \to \frac{R_\perp^{m-2a} \exp\left(\dfrac{iR_\perp^2}{Q+T}\right)}{\Gamma(m+1-a)} + \frac{R_\perp^{2a-m-2}}{\Gamma(a)}.$$

1. Пусть $Z_0 > 0$ в $Q = Z - iZ_0$. Тогда при $a = -n = 0, -1, -2, ...,$ $m \geq 0$ пакет (1.4) превращается в *ПВВП* Лагерра с амплитудой

$$E_{sLG} = \frac{1}{Q+T}\left(\frac{X+iY}{Q+T}\right)^m \cdot L_n^m\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right)$$

и обладающий строго КИ!

2. Кроме того, находим, что при $Z_0 > 0$ возможны следующие варианты анализа условий КИ функции E_{sKK} (1.4):

1. Если $a' > \dfrac{m+2}{2}$, тогда $|E| \to \infty$ и $W \to \infty$.

Здесь и далее W – переносимая мощность.

2. Если $a' = \dfrac{m+2}{2}$, тогда $E \to const$, но $W \to \infty$.

3. Если $a' \in \left(\dfrac{m+1}{2}, \dfrac{m+2}{2}\right)$, тогда $E \to 0$, но $W \to \infty$.

4. Если $a' = \dfrac{m+1}{2}$, тогда $E \to R_\perp^{-1}$, т. е. квази-КИ, но $W \to \infty$.

5. Если $a' < \dfrac{m+1}{2}$, тогда $E \to 0$ и $W \to const$, т. е. строгая КИ! Здесь условие 5 включает в себя также условие 1 $(a = -n = 0, -1, -2, ...)$.

Б. Для пучка

$$E(M\_M_{+1}) = e^{i(Z+T)} \times$$
$$\times \left(X+iY\right)^m \left(R+Q\right)^{-m} M\left(a, 1+m; i(R-Q)\right) \times$$
$$\times M\left(a-m, 1-m; -i(R+Q)\right)$$

применим 1 преобразование Бейтмена. Затем, полагая $B \to 0$, находим амплитуду *ПВВП*

$$E(sM\_M_{+1}) =$$
$$= \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{S^2}\right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для *ПВВП* $E(sM\_M_{+1})$. При $|R_\perp| \to \infty$ получаем

$$E(sM\_M_{1+}) \to \left(\frac{R_\perp^{-2+2a-m}}{\Gamma(a-m)} + \frac{R_\perp^{m-2a}}{\Gamma(1-a)} \exp\left(\frac{iR_\perp^2}{Q+T}\right)\right).$$

Пусть $Z_0 > 0$ в $Q = Z - iZ_0$.

Тогда при $a - m = -N + 1 = 0, -1, -2, ...$ – КИ строго.

При $Z_0 > 0$ находим, что возможны также следующие варианты условий КИ функции $E(sM\_M_{+1})$:

– если $a' > \dfrac{m+2}{2}$, тогда $|E| \to \infty$ и $W \to \infty$;

– если $a' = \dfrac{m+2}{2}$, тогда $E \to const$, но $W \to \infty$;

– если $a' \in \left(\dfrac{m+1}{2}, \dfrac{m+2}{2}\right)$, тогда $E \to 0$, но $W \to \infty$;

– если $a' = \dfrac{m+1}{2}$, тогда $E \to R_\perp^{-1}$, но $W \to \infty$;

– если $a' < \dfrac{m+1}{2}$, тогда $E \to 0$ и $W \to const$.

Строгая КИ.

В. Обсудим пучки $K-K$ типа $E(M_{-1}M_{+1})$. Согласно [2], его амплитуду можно взять в форме

$$E_*(M_{-1}M_{+1}) = e^{i(Q+T)} \cdot \left(X - iY\right)^m \times$$
$$\times M\left(a+m, 1+m; -i(R+Q)\right) \times$$
$$\times M\left(a+m, 1+m; i(R-Q)\right).$$

При заменах $a + m = a_1$, $Y \to (-Y)$ последний пучок $E_*(M_{-1}M_{+1})$ преобразуется в пучок $E(M\_M_+)$, рассмотренный ранее в [7]. Используя полученные выше результаты (1.4) для пучка $E(M\_M_+)$, сразу можем записать выражения для *ПВВП* $E_*(sM_{-1}M_{+1})$. Амплитуда *ПВВП*

$$E_*(sM_{-1}M_{+1}) = \frac{1}{Q+T} \times$$
$$\times \left(\frac{X+iY}{S^2}\right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Условия КИ для *ПВВП* $E_*(sM_{-1}M_{+1})$:

– если $a' > \dfrac{-m+2}{2}$, тогда $|E| \to \infty$ и $W \to \infty$;

– если $a' = \dfrac{-m+2}{2}$, тогда $E \to const$, но $W \to \infty$;

– если $a' \in \left(\dfrac{-m+1}{2}, \dfrac{-m+2}{2}\right)$, тогда $E \to 0$, но $W \to \infty$;

– если $a' = \dfrac{-m+1}{2}$, тогда $E \to R_\perp^{-1}$, но $W \to \infty$;

– если $a' < \dfrac{-m+1}{2}$, тогда $E \to 0$ и $W \to const$.

Строгая КИ.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Г. Наконец, обсудим пучки с амплитудой в форме

$$E(M_{-1}M_+) = e^{i(Q-T)} \times$$
$$\times\left(X+iY\right)^m (R-Q)^{-m} M\left(a,1+m;-i(R+Q)\right)\times$$
$$\times M\left(a-m,1-m;i(R-Q)\right).$$

Здесь в работе [2] мы брали $Z<0$. Однако, для получения *ВППВ* удобнее заменить в $E(M_{-1}M_+)$ переменную $Q\to(-Q)$. Тогда получаем

$$E_*(M_{-1}M_+) = e^{-i(Q+T)} \times$$
$$\times\left(X+iY\right)^m (R+Q)^{-m} M\left(a,1+m;-i(R-Q)\right)\times$$
$$\times M\left(a-m,1-m;i(R+Q)\right).$$

Здесь можно взять $Z>0;\ \ m\ge 0$. Применяем 1 преобразование Бейтмена. Затем, полагая $B\to 0$, находим, после некоторых преобразований, амплитуду *ПВВП*

$$E_*(sM_{-1}M_+) =$$
$$=\frac{1}{Q+T}\cdot\left(\frac{X+iY}{S^2}\right)^m M\left(1-a,1-m;\frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для *ПВВП* $E_*(sM_{-}M_{+1})$. Получаем, как для $E(sM_{-}M_{+1})$

– если $a'>\dfrac{m+2}{2}$, тогда $|E|\to\infty$ и $W\to\infty$;

– если $a'=\dfrac{m+2}{2}$, тогда $E\to const$, но $W\to\infty$;

– если $a'\in\left(\dfrac{m+1}{2},\dfrac{m+2}{2}\right)$, тогда $E\to 0$, но $W\to\infty$;

– если $a'=\dfrac{m+1}{2}$, тогда $E\to R_\perp^{-1}$, но $W\to\infty$;

– если $a'<\dfrac{m+1}{2}$, тогда $E\to 0$ и $W\to const$.

Строгая КИ.

В отличие от пакетов $E(sM_{-}M_{+1})$ здесь в $E_*(sM_{-}M_{+1})$ следует полагать $Z_0>0$.

2 Физически реализуемые *ПВВП ТК* с непрерывным угловым индексом *m*

Предварительно обсудим возможности использования функций Трикоми U_+ и U_- в (1.1). При $Z\to\infty$ функции $U_+\to Q^{-a}$, $U_-\to\dfrac{R_\perp^2}{2Q}$, что неплохо. Функции U_+ и U_- при $|R_\perp|\to 0$ стремятся к бесконечности, что физически неприемлемо. Попытки комплексифицировать переменные *Z* или *X*, *Y* функций U_+ и U_- приводят к разрывам (скачкам) аргументов $(\mp i(R\pm Q))$ и соответственно амплитуд вблизи $Z=0$, что также неприемлимо. Поэтому вариант $U_{-}U_{+}$ на всей оси *Z* не подходит. Однако можно использовать в (1.1), например, функцию $M_{-}U_{+}$ при $Z>0$ и функцию $U_{-}M_{+}$ при $Z<0$. Далее мы будем обсуждать пучки в области полупространства.

А. Обсудим непараксиальные пучки $T-K$

$$E(U_+M_-) = e^{i(Z+T)} \times$$
$$\times\left(X+iY\right)^m M\left(a,m+1;i(R-Q)\right)\times \tag{2.1}$$
$$\times U\left(a,m+1;-i(R+Q)\right),$$

которые пригодны при $Z>0$. Пусть при этом также $a=(m+1)/2$. Тогда

$$E=e^{i(Z+T)}\cdot\left(X+iY\right)^m \exp\left(\frac{i(R-Q)}{2}\right)J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{-i(R+Q)}{2}\right)(R+Q)^{-m/2}H_{m/2}^{(2)}\left(-\frac{R+Q}{2}\right)\to$$
$$\to e^{i(\varphi+T)}J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right)H_{m/2}^{(1)}\left(\frac{R+Q}{2}\right).$$

Последний вариант (при $Z_0=0$) соответствует Ковалеву [10], формула (21). Такие пучки он называет пучками Ханкеля – Бесселя. У него упоминаются также фактически пучки $T-K$ $E(U_{-}M_{+})$. Применяем 1 преобразование Бейтмена для $E(U_+M_-)$. Затем, полагая $B\to 0$, находим, после некоторых преобразований, амплитуду *ПВВП*

$$E(sU_+M_-)=\frac{1}{Q+T}\cdot\left(\frac{X+iY}{Q+T}\right)^m\times$$
$$\times U\left(a,1+m;\frac{-iS^2}{Q+T}\right)\exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для *ПВВП*. При $|R_\perp|\to\infty$ амплитуда $E(sU_+M_-)\to R_\perp^{m-2a}\exp\left(\dfrac{iS^2}{Q+T}\right)$. Отсюда при $Z>0\cap Z_0>0\cap m\ge 0$ – КИ *ПВВП* $E(sU_+M_-)$ при произвольном параметре *a*. При $a=(m+1)/2$ *ПВВП* $E(sU_+M_-)$ редуцируются к *ПВВП* Ханкеля – Бесселя.

Б. Обсудим непараксиальные пучки $T-K$ [2]

$$E_*(U_+M_{-1}) = e^{i(Q+T)}\cdot(R+Q)^{-m}\times$$
$$\times\left(X-iY\right)^m M\left(a+m,1+m;i(R-Q)\right)\times \tag{2.3}$$
$$\times U\left(a,1-m;-i(R+Q)\right).$$

Здесь $Z>0\cap m\ge 0$. Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B\to 0$, находим амплитуду *ПВВП*

$$E_*(sU_+M_{-1})=\frac{1}{Q+T}\cdot\left(\frac{X-iY}{Q+T}\right)^m\times$$
$$\times U\left(a,1-m;\frac{-iS^2}{Q+T}\right)\exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда следует, что условия КИ *ПВВП* $E(sU_+M_{-1})$ такие же, как для $E(sU_+M_-)$, т. е. $Z>0\cap Z_0>0\cap m\ge 0$ произвольном параметре *a*.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

В. Обсудим теперь пучки $T-K$ [2]

$$E(\tilde{U}_+M_-)=e^{i(T-Q)}\cdot\left(X+iY\right)^m\times$$
$$\times U\left(m+1-a,m+1;i(R+Q)\right)\times$$
$$\times M\left(m+1-a,m+1;-i(R-Q)\right).$$

Поменяем предварительно $T\to(-T)$ в $e^{i(T-Q)}$, чтобы в дальнейшем получить бегущее поле. Тогда

$$E_*(\tilde{U}_+M_-)=e^{-i(T+Q)}\cdot\left(X+iY\right)^m\times$$
$$\times U\left(m+1-a,m+1;i(R+Q)\right)\times$$
$$\times M\left(m+1-a,m+1;-i(R-Q)\right).$$

Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B\to 0,$ находим амплитуду *ПВВП*

$$E_*(sU_+M_-)=\frac{1}{Q+T}\cdot\left(\frac{X+iY}{Q+T}\right)^m\times$$
$$\times U\left(m+1-a,1+m;\frac{-iS^2}{Q+T}\right)\exp\left(\frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Тогда, при $\left|R_\perp\right|>>1$ амплитуда волнового поля

$$E(\tilde{U}_+M_-)\to R_\perp^{-m-2+2a}\exp\left(\frac{-iR_\perp^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда условия КИ *ПВВП* $E_*(sU_+M_-)$ следующие: $Z>0\cap Z_0<0\cap m\ge 0$ при произвольном параметре a.

Г. Обсудим теперь пучки $T-K$ [2]

$$E_*(M_{-1}\tilde{U}_+)=e^{i(T-Q)}\cdot\left(X-iY\right)^m\cdot\left(R+Q\right)^{-m}\times$$
$$\times M\left(1-a,1+m,-i(R-Q)\right)\times$$
$$\times U\left(-m+1-a,-m+1;i(R+Q)\right).$$

Предварительно выполним замену $T\to(-T)$ в $e^{i(T-Q)}$ и получаем при $Z>0$ непараксиальные пучки $T-K$

$$E_{**}(M_{-1}\tilde{U}_+)=e^{-i(T+Q)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot\left(R+Q\right)^{-m}\times$$
$$\times M\left(1-a,1+m,-i(R-Q)\right)\times$$
$$\times U\left(-m+1-a,-m+1;i(R+Q)\right).$$

Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B\to 0,$ находим амплитуду *ПВВП*

$$E_{**}(s\tilde{U}_+M_{-1})=\frac{1}{Q+T}\cdot\left(\frac{X-iY}{S^2}\right)^m\times$$
$$\times U\left(-m+1-a,1-m;\frac{iS^2}{Q+T}\right)\exp\left(\frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Тогда, при $\left|R_\perp\right|>>1$ амплитуда волнового поля

$$E_{**}(s\tilde{U}_+M_{-1})\to R_\perp^{-2-2a+m}\exp\left(\frac{-iR_\perp^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда условия КИ *ПВВП* $E_{**}(s\tilde{U}_+M_{-1})$ следующие: $Z>0\cap Z_0<0\cap m\ge 0$ при произвольном параметре a, т. е. такие же, как для *ПВВП* $E_*(s\tilde{U}_+M_-)$.

Аналогичные результаты получаются, если проанализировать варианты *ПВВП* $T-$К других типов, включающих в свою амплитуду функции Трикоми $\tilde{U}_-$ и U_-. Здесь всегда $Z<0$.

Заключение

В данной работе получены выражения, описывающие дополнительные типы 3D непараксиальных *ПВВП* $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах.

Установлено, что для таких *ПВВП* $K-K$ и $T-K$ путем подбора свободных параметров всегда можно добиться строгой КИ амплитуды и, тем самым, переносимой конечной мощности пакета и его физической реализуемости. Существенно также, что здесь для КИ не требуется гауссова аподизация пучков. Показано, что непараксиальные пучки $T-K$ физически реализуемы только в области полупространства $Z>0$ или при $Z>0$. Компьютерное моделирование в системе Maple подтверждает все эти выводы.

Одновременный переход от дискретных значений m к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям параметра a сильно расширяет класс известных в настоящее время *ПВВП* с цилиндрической симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиргель*, *С.С.* Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. I. 3D световые пучки Куммера – Куммера с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 13–17.

2. *Гиргель*, *С.С.* Решения волнового уравнения в параблических вращательных координатах. II. 3D световые пучки Трикоми – Куммера и другие пучки с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 20–24.

3. *Bateman*, *H.* The conformal transformations of a space of four dimensions and their applications to geometrical optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 2. – P. 70–89.

4. *Bateman*, *H.* The transformations of the electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1910. – Vol. 8. – P. 223–264.

5. *Бейтмен*, *Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн / Г. Бейтмен. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 180 с.

6. *Besieris*, *I.M.* Bateman conformal transformations within the framework of the bidirectional spectral representation / I.M. Besieris, A.M. Shaarawi, A.M. Attiya // Progress In Electromagnetics Research, PIER. – 2004. – Vol. 48. – P. 201–231.

7. *Besieris*, *I.M.* Spatiotemporall localized null electromagnetic waves I. Luminal / I.M. Besieris,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

A.M. Shaarawi // Progress In Electromagnetics Research B. – 2008. – Vol. 8. – P. 1–28.

8. *Utkin*, *A.B.* Mathieu Progressive Waves / A.V. Utkin // Commun. Theor. Phys. – 2011. – Vol. 56. – P. 733–739.

9. *Борисов*, *В.В*. Производящие функции сфокусированных волновых мод типа Бесселя – Гаусса / В.В. Борисов // Записки семинаров ПОМИ. – 2002. – Т. 285. – С. 53–57.

10. *Hillion*, *P*. The Courant-Hilbert solutions of the wave equation / P. Hillion // J. Math. Phys. – 1992. – Vol. 33, № 8. – P. 2749–2753.

11. *Hillion*, *P*. The Bateman solutions of the spinor wave equation / P. Yillion // Modern Physics Letters A. – 1993. – Vol. 8, № 22. – P. 2111–2115.

12. *Флюгге*, *З*. Задачи по квантовой механике. Т. 2. / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

13. *Ковалёв*, *А.А*. Лазерные пучки Ханкеля-Бесселя / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 297–304.

14. *Изместьев, А.А*. Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве / А.А. Изместьев // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1970. – Т. XIII, № 9. – С. 1380–1388.

15. *Three-dimensional nonparaxial beams in parabolic rotational coordinates* / D. Deng [et al.] // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38, № 19. – P. 3934–3936.

16. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редакцию 14.10.2020.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ